

Introduction

Chapitre I: Les lignes de transmission

I.1. Introduction

Le terme ligne de transmission sert à désigner de préférence des systèmes comportant plusieurs conducteurs métalliques isolés les un des autres, permettant la transmission d'ondes hautes fréquences (HF), tels que un fil parallèle au sol ou deux fils parallèle entre eux.

Lorsqu'on étudie les réseaux électriques basses fréquences (BF) en régime sinusoïdal, on le fait dans le cadre de «l'approximation des régime permanents». On néglige dans ce cas le phénomène de propagation et on admet que l'intensité, à un instant donné, est la même en tous les points d'un même conducteur. Ceci suppose que la longueur d'onde est beaucoup grande que les dimensions du circuit.

Au contraire, lorsqu'on considère la transmission de signaux HF, on ne peut plus faire cette approximation et l'intensité varie, à un instant donné, dans un même conducteur. Ainsi, les constantes électriques de la ligne de transmission en HF sont considérées comme uniformément réparties. Les constantes électriques à considérer sont :

- La résistance ohmique R
- la capacité C (entre un fil et le sol, ou entre les deux fils),
- l'inductance L
- la résistance d'isolement $R'=1/G$, car il y a des fuites dans les isolants entre les deux fils.

Le schéma équivalent d'une ligne de transmission est illustré sur la figure I.1.

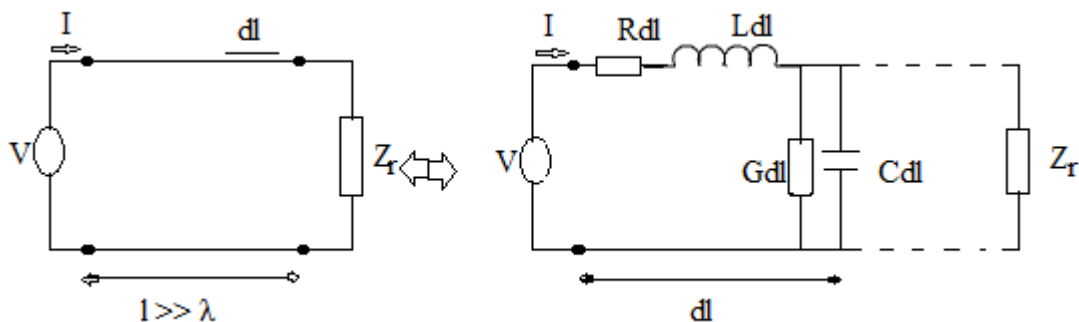


Figure I.1. Schéma équivalent d'une ligne de transmission

Chaque élément dl de la ligne peut être représenté par une self, une capacité, une résistance et une conductance.

Nous allons étudier dans ce chapitre, les nombreuses propriétés d'une ligne sans pertes ($R=0$ et $G \rightarrow \infty$), ainsi que la répartition du courant et de la tension sur la ligne et à son extrémité selon la charge (récepteur) appliquée. Nous nous contenterons de l'étude détaillée des lignes sans pertes puisque en Radio, en électronique, dans les radars et en U.H.F, on fait usage de ce type de supports de transmission. Nous montrerons également dans ce chapitre, l'usage de l'abaque de Smith permettant la caractérisation des lignes de transmission.

I.2. Lignes sans pertes

I.2.1. Equations fondamentales

La figure I.2. rappelle le schéma équivalent d'une ligne de transmission bifilaire sans pertes.

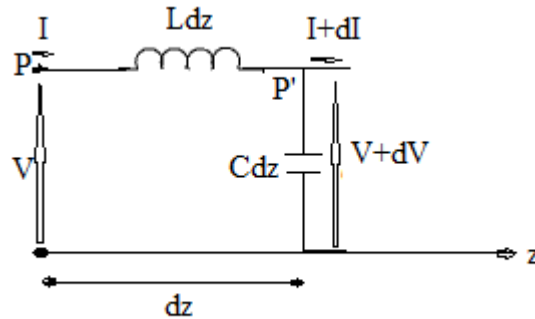


Figure I.2. Schéma équivalent d'une ligne sans pertes

Plaçons-nous au point P, situé à la distance z de la source, où le courant est I et la tension est V par rapport à l'autre fil. Considérons un accroissement dz très petit, au point P', alors le schéma équivalent de cet élément de ligne (figure I.2), de longueur dz , constitué d'une inductance série de valeur Ldz et d'une capacité en parallèle Cdz . Au point P', la tension devient $(V+dV)$ et le courant $(I+dI)$, reliés par les équations (1.1 et 1.2).

$$V - (V+dV) = jL\omega Idz ; \text{ donc } \frac{-dV}{dz} = jL\omega I \quad (1.1)$$

$$I - (I+dI) = jC\omega Vdz ; \text{ donc } \frac{-dI}{dz} = jC\omega V \quad (1.2)$$

Les équations (1.1) et (1.2) constituent un système de deux équations différentielles à deux inconnues V et I . Ce système conduit à l'équation (1.3).

$$\frac{dV}{dI} = \frac{L}{C} \frac{I}{V} ; \text{ ce qui donne } VdV = \frac{L}{C} IdI \quad (1.3)$$

Intégrons cette dernière équation de 0 à V pour la tension V et de 0 à I pour le courant I , d'où l'on obtient finalement l'équation (1.4).

$$V^2 = \frac{L}{C} I^2 \Rightarrow \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.4)$$

Or le rapport (V/I) au point P de la ligne (figure I.2), représente évidemment une impédance et comme elle est indépendante de z et de la pulsation ω (donc de la fréquence f), elle est constante en tous les points de la ligne et caractérise cette ligne. Cette impédance est appelée impédance caractéristique Z_c de la ligne de transmission.

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (en } \Omega) \quad (1.5)$$

Cette impédance est réelle pour les lignes sans pertes et représente une résistance pure. Pour calculer V et I, on dérive les équations (1.1) et (1.2) par rapport à z.

$$\frac{-d^2V}{dz^2} = jL\omega \frac{dI}{dz} = jL\omega(-jC\omega V) \Rightarrow \frac{d^2V}{dz^2} + LC\omega^2 V = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{-d^2I}{dz^2} = jC\omega \frac{dV}{dz} = jC\omega(-jL\omega I) \Rightarrow \frac{d^2I}{dz^2} + LC\omega^2 I = 0 \quad (1.6)$$

Les équations (1.5) et (1.6) sont fondamentales pour les lignes de transmission.

I.2.2. Résolution des équations différentielles

Les équations (1.5) et (1.6) constituent des équations différentielles du second ordre, incomplètes, sans second membre et à coefficients constants L, C et ω .

L'équation caractéristique de chacune d'elle s'écrit :

$$a^2 + LC\omega^2 = 0 ; \text{d'où } a = \pm j\omega\sqrt{LC} = \pm j\beta \text{ et } j^2 = -1 \text{ (nombre complexe).}$$

Soit $\beta = \omega\sqrt{LC}$ (en rad/m), correspondant à la constante de propagation longitudinale (ici selon oz) de V et de I

La solution de l'équation différentielle (1.5) pour V, admet une solution de la forme:

$$V = A.\sin\beta z + B.\cos\beta z \quad (1.7)$$

Où A et B sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

Les équations (1.1) et (1.7), donnent alors la solution pour le courant I, traduite par l'équation (1.8).

$$I = j(A.\cos\beta z - B.\sin\beta z)/Z_c \quad (1.8)$$

Pour déterminer les constantes A et B, plaçons-nous à l'entrée de ligne (c'est-à-dire à $z=0$) où l'on applique une tension V_0 et un courant I_0 . En posant $z=0$ dans les équations (1.7) et (1.8), on obtient respectivement $B = V_0$ et $A = -jZ_c I_0$.

D'où les équations (1.7) et (1.8) deviennent sous la forme (1.9) et (1.10), représentant les équations des télégraphistes pour les lignes de transmission sans pertes.

$$V = V_0.\cos\beta z - jZ_c I_0.\sin\beta z \quad (1.9)$$

$$I = I_0.\cos\beta z - j(V_0/Z_c).\sin\beta z \quad (1.10)$$

Il est souvent commode d'exprimer V et I, en un point quelconque de la ligne, en fonction des données du récepteur V_r et I_r , en comptant les distances non pas depuis la source, mais depuis la charge (récepteur). Il suffit dans ce cas de changer dans les équations (1.9) et (1.10) z par ($-z$), V_0 par V_r et I_0 par I_r , soit :

$$V = V_r.\cos\beta z + jZ_c I_r.\sin\beta z \quad (1.11)$$

$$I = I_r.\cos\beta z + j(V_r/Z_c).\sin\beta z \quad (1.12)$$

Les équations des télégraphistes, montre une variation sinusoïdale de V et de I, calculés à partir de la source ou à partir de la charge. Ainsi si (βz) augment de (2π) , V et I ne changent pas. Cette distance correspond à la longueur d'onde λ (en mètre), qui vaut :

$$\beta \lambda = 2\pi ; \text{ d'où } \lambda = 2\pi/\beta \text{ (en mètre)} \quad (1.13)$$

La vitesse de propagation v est obtenue à partir de la relation $\lambda = v/f$, où f est la fréquence de la source ; soit :

$$v = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\omega}{\beta} \text{ en (m/s)} \quad (1.14)$$

ou encore, en introduisant la constante de propagation ($\beta = \omega\sqrt{LC}$) :

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dans le cas où les fils formant la ligne, sont placés dans l'air, cette vitesse v équivaut à celle de la lumière dans l'air (vide), soit $v = c = 3.10^8$ m/s

I.2.3. Cas d'une ligne de longueur infinie

La solution des équations différentielles (1.5) et (1.6) peut s'écrire sous la forme exponentielle suivante.

$$V = Ae^{+j\beta z} + Be^{-j\beta z} \quad (1.15)$$

$$I = A_1e^{+j\beta z} + B_1e^{-j\beta z} \quad (1.16)$$

Lorsque $z \rightarrow \infty$; $V = 0$ et $I = 0$; d'où $A = A_1 = 0$.

Lorsque $z = 0$, on pose $V = B = V_0$ et $I = B_1 = I_0$ (tension et courant à l'entrée de la ligne).

D'où les expressions donnant la variation de V et I en fonction de z, deviennent:

$$V = V_0e^{-j\beta z} \quad (1.17)$$

$$I = I_0e^{-j\beta z} \quad (1.18)$$

On déduit finalement l'impédance caractéristique $Z_c = V/I = V_0/I_0 = Z_0$; où Z_0 est l'impédance d'entrée de la ligne de longueur infinie. Ce qui veut dire que la source (générateur) alimentant la ligne par la tension V_0 et le courant I_0 débite sur directement sur Z_c . V et I sont traduits par des ondes progressives uniquement, d'où une adaptation parfaite.

A partir des équations (1.17) et (1.18) donnant V et I sous forme complexe, on peut déduire aussitôt leurs valeurs instantanées suivantes.

$$V_{inst} = V_0 \sin(\omega t - \beta z) \quad (1.19)$$

$$I_{\text{inst}} = I_0 \sin(\omega t - \beta z) \quad (1.20)$$

On en déduit également que V_{inst} et I_{inst} sont en phase dans le temps et possèdent un déphasage (βz) variable avec la distance z . On a des ondes progressives.

I.2.4. Cas d'une ligne de longueur finie

I.2.4.1. Impédance d'entrée d'une ligne terminée sur une impédance quelconque Z_r

Soit une ligne de transmission sans pertes, de longueur l et chargée par une impédance quelconque Z_r , où l'on dispose d'une tension V_r et d'un courant I_r . On déduit alors à partir des équations (1.11) et (1.12), la tension V_0 et le courant I_0 à l'entrée de la ligne, en posant $z = l$.

$$V_0 = V_r \cos \beta l + j Z_c I_r \sin \beta l \quad (1.21)$$

$$I_0 = I_r \cos \beta l + j (V_r / Z_c) \sin \beta l \quad (1.22)$$

D'où l'on calcule l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne, comme suit :

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_r \cos \beta l + j Z_c I_r \sin \beta l}{I_r \cos \beta l + j \frac{V_r}{Z_c} \sin \beta l} \quad (1.23)$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de l'équation (1.23) par I_r et en posant $Z_r = V_r / I_r$, on obtient finalement l'expression de l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne en fonction de l'impédance de charge Z_r de cette ligne.

$$Z_0 = Z_c \frac{(Z_r + j Z_c \operatorname{tg} \beta l)}{(Z_c + j Z_r \operatorname{tg} \beta l)} \quad (1.24)$$

On peut également exprimer Z_r en fonction de Z_0 et de Z_c , en permutant Z_r et Z_0 et en changeant le signe (+) par le signe (-) dans l'équation (1.24).

$$Z_r = Z_c \frac{(Z_0 - j Z_c \operatorname{tg} \beta l)}{(Z_c - j Z_0 \operatorname{tg} \beta l)} \quad (1.25)$$

Exemple : Soit $Z_c = 55 \Omega$, $Z_r = (115 + 75j) \Omega$ et $l = 1,68\lambda$

Sachant que $\beta = 2\pi/\lambda$, on déduit $\beta l = 10,5 \text{ rad} = 66^\circ$.

L'équation (1.24) donne l'impédance d'entrée $Z_0 = (26 - 36j) \Omega$

On remarque également de l'équation (1.24), que si l'impédance de charge Z_r est égale à l'impédance caractéristique Z_c de la ligne (c'est-à-dire une adaptation de la charge à la ligne), alors l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne est aussi égale à l'impédance caractéristique Z_c de la ligne (c'est-à-dire une adaptation à l'entrée de la ligne). Cela veut dire que la source débite sur Z_c , comme dans le cas de la ligne de longueur infinie et on a uniquement une onde progressive dans la ligne.

I.2.4.2. Ligne quart d'onde

La ligne quart d'onde est une ligne de transmission de longueur $l = \lambda/4$. On en déduit $\beta l = \pi/2$ et $\text{tg}\beta l \rightarrow \infty$.

En levant l'indétermination dans l'équation (1.25), on obtient une relation directe entre l'impédance de charge Z_r , l'impédance d'entrée Z_0 et l'impédance caractéristique Z_c de la

ligne, soit $Z_r = \frac{Z_c^2}{Z_0}$.

$$\text{D'où } Z_c = \sqrt{Z_r Z_0} \quad (1.26)$$

Il en serait de même si l était un multiple de $\lambda/4$, c'est à-dire $(2n+1) \lambda/4$.

L'impédance d'entrée $Z_0 = \frac{Z_c^2}{Z_r}$ est inversement proportionnelle à l'impédance de charge Z_r ,

d'une ligne d'impédance caractéristique Z_c . La ligne quart d'onde est un inverseur d'impédance. Si Z_r est réactif, Z_0 sera aussi une résistance, mais Z_0 croît si Z_r diminue et inversement.

Une application de la ligne quart d'onde consiste à s'en servir pour coupler une ligne à une charge ohmique, comme par exemple une antenne caractérisée par une résistance d'entrée R_a (figure I.3).

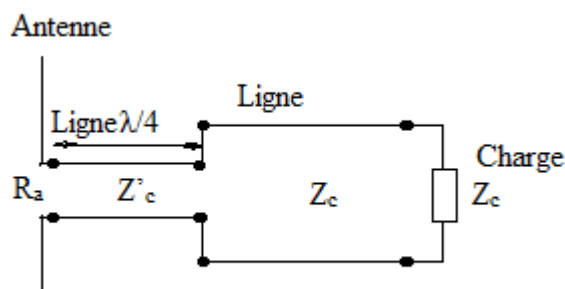


Figure I.3. Adaptation d'une antenne (R_a) à une ligne à l'aide d'une ligne $\lambda/4$

La figure I.3 montre l'adaptation d'une antenne de résistance d'entrée R_a à une ligne de transmission d'impédance caractéristique Z_c , à l'aide d'une ligne $\lambda/4$. L'impédance caractéristique Z'_c du tronçon de ligne $\lambda/4$, sera déterminée telle que la résistance R_a de l'antenne soit transformée en une valeur égale à l'impédance caractéristique Z_c de la ligne.

Soit $Z'_c = \sqrt{R_a Z_c}$

Si la distance de la ligne à l'antenne est beaucoup plus grande que $\lambda/4$, on prendra $3\lambda/4$ ou $(2n+1)\lambda/4$, avec n un entier.

Nous citons dans la suite deux cas de la ligne quart d'onde, terminée par des charges particulières:

- L'impédance d'entrée Z_0 d'une ligne $\lambda/4$ ouverte ($Z_r \rightarrow \infty$), est nulle ($Z_0 = 0$).
- L'impédance d'entrée Z_0 d'une ligne $\lambda/4$ court-circuitée ($Z_r = 0$), est infinie ($Z_0 \rightarrow \infty$).

Remarque: On a vu précédemment que pour une ligne $\lambda/4$, on a $\beta l = \frac{\pi}{2}$, ou encore

$$l\omega\sqrt{LC} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l^2\omega^2 LC = \frac{\pi^2}{4}.$$

Si nous appelons $L_{ef} = \left(\frac{2}{\pi}\right)lL$, traduisant l'inductance effective de la ligne, $C_{ef} = \left(\frac{2}{\pi}\right)lC$, traduisant la capacité effective de la ligne, alors on aura :

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)lL \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)lC \cdot \omega^2 = 1 \Rightarrow L_{ef} C_{ef} \omega^2 = 1 \quad (1.26)$$

Cette condition est analogue à celle des circuits résonnants fermés, d'où le nom de ligne quart d'onde résonnante.

I.2.4.3. Ligne demi onde

Cette ligne est de longueur $\lambda/2$ ou un multiple exact de $\lambda/2$. Dans ce cas, on a $tg\beta l = tg\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) = 0$, et l'équation (1.24) donne la valeur de l'impédance d'entrée Z_0 , soit :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_r}{Z_c} \Rightarrow Z_0 = Z_r$$

Dans ce cas, la source à l'entrée débite donc sur Z_r . On peut ainsi relier une source et une charge éloignées l'une de l'autre.

I.2.4.4. Ligne huitième d'onde ($l = \lambda/8$)

Dans ce cas $tg\beta l = tg\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et l'équation (1.24) donne :

$$Z_0 = Z_c \frac{(Z_r + jZ_c)}{(Z_c + jZ_r)} \quad (1.27)$$

Si la charge est ohmique pure ($Z_r = R_r$), on aura alors :

$$Z_0 = Z_c \frac{(R_r + jZ_c)}{(Z_c + jR_r)} \Rightarrow |Z_0| = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On peut ainsi transformer une résistance quelconque R_r en une impédance dont le module est égal à Z_c .

I.2.5. Constantes d'une ligne

Il y a quatre constantes d'une ligne formée de deux fils parallèles ou d'un câble coaxial:

- L'inductance L due aux deux fils ?
- La capacité C.
- La Résistance ohmique R.
- La conductance G, dépendant de la construction de la ligne, des matériaux qui la constituent et de son isolant.

I.2.5.1. Cas d'une ligne bifilaire

Considérons une ligne de transmission (figure I.4), caractérisée par deux fils parallèles semblables, de diamètre d, de distance d'axe en axe vaut D et séparés par de l'air.

a/ Calcul de l'inductance L

L'inductance L est le flux produit par unité de courant. Soit $L = \frac{\phi}{I}$.

Plaçons-nous à la distance x de l'axe d'un fil (figure I.4), au point P, d'après la loi de circulation du magnétisme, l'induction B s'écrit : $B = \frac{\mu I}{2\pi x} = \mu H$;

$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$ et H en A/m.

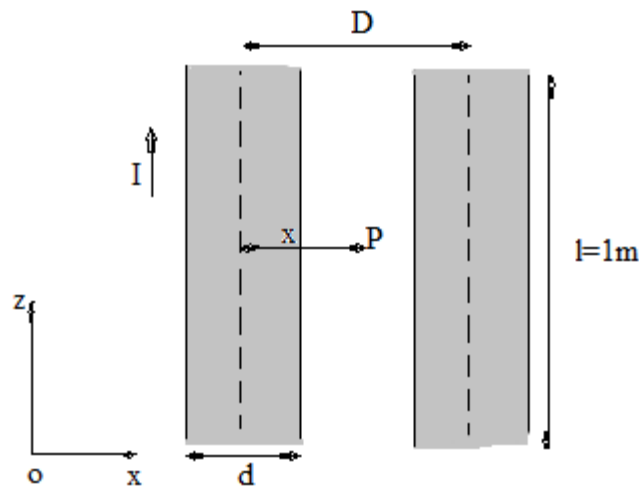


Figure I.4. Ligne bifilaire

Considérons des fils de longueur 1m selon la direction oz. Comme le deuxième fil est à la distance D du premier, il suffit d'intégrer le flux de $r=d/2$ à D, sachant que le flux au-delà de D n'intervient plus.

$$\text{Or } \phi = \iint_s \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iint_s \mu \vec{H} \cdot \vec{n} ds = \iint_s \mu \mathbf{H}_\theta dx dz = \int_0^1 dz \int_r^D \mu \mathbf{H}_\theta dx$$

$$\text{D'où } L_1 = \frac{\phi}{I} = \int_r^D \frac{\mu \mathbf{H}_\theta}{I} dx = \int_r^D \frac{\mu I}{2\pi x I} dx = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ln \frac{D}{r}$$

Et pour les deux fils, on aura le double de cette inductance, ce qui donne :

$$L = 2L_1 = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{Ln} \frac{D}{r} \text{ en H/m} \quad (1.28)$$

$$\text{ou bien } L = 0,92 \log \frac{D}{r}; \text{ en } \mu\text{H} / \text{m} \quad (1.29)$$

b/ Calcul de la capacité C

Par définition la capacité C s'écrit $C=q/V$, où q est la charge par unité de longueur d'un seul fil et V est la différence de potentiel appliquée entre les deux fils.

Si on désigne par E l'intensité du champ électrostatique en un point P quelconque (figure I.4), situé à la distance x de l'axe d'un fil (et extérieur au fil), on peut écrire :

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon x}; \text{ en } V / \text{m} \quad (1.30)$$

Puisque le champ E dérive du gradient d'un potentiel, $\vec{E} = -\text{grad}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx}$;

$$\text{D'où : } V = -\int_r^x E dx = -\int_r^x \frac{q}{2\pi\epsilon x} dx = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{x}{r} \quad (1.31)$$

La différence de potentiel entre les deux fils (puisque l'un des fils contient la charge +q et l'autre la charge -q) sera obtenu en intégrant de r à D (figure I.4), soit :

$$V = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{D}{r} - \left(-\frac{q}{2\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{D}{r} \right) \Rightarrow V = \frac{q}{\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{D}{r} \quad (1.32)$$

$$\text{Ce qui donne une capacité C de : } C = \frac{q}{V} = \frac{q\pi\epsilon}{q \text{Ln} \frac{D}{r}} = \frac{\pi\epsilon}{\text{Ln} \frac{D}{r}} \text{ en (F/m)} \quad (1.33)$$

$$\text{Avec } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \text{ et } \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

Si l'on considère de l'air entre les deux fils, alors $\epsilon_r = 1$;

$$\text{d'où } C = \frac{10^{-9}}{36 \text{Ln} \frac{D}{r}} \text{ en (F/m)} \quad (1.34)$$

$$\text{Ce qui s'écrit encore : } C = \frac{12}{\log \frac{D}{r}} \text{ en (pF/m)} \quad (1.35)$$

c/ Calcul de l'impédance caractéristique Z_c

En remplaçant l'inductance L et la capacité C par leurs expressions respectives dans le cas d'une ligne bifilaire, on trouve :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \text{Ln}(\frac{D}{r}) \cdot 10^{-7}}{\frac{10^{-9}}{36 \text{Ln}(\frac{D}{r})}}} = 276 \log\left(\frac{D}{r}\right) \text{ en } (\Omega) \quad (1.36)$$

Remarque: Si on calcule la vitesse de propagation v_ϕ de l'onde se propageant entre les deux fils, on trouve bien la vitesse la lumière dans l'air.

$$\text{Soit } v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-7} \cdot \ln\left(\frac{D}{r}\right) \cdot \frac{10^{-9}}{36 \ln\left(\frac{D}{r}\right)}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ en (m/s)} \quad (1.37)$$

d/ Résistance ohmique

Pour deux fils en cuivre, la résistance ohmique R pour 1m de longueur de ligne, soit 2m de longueur de fil, est donnée par :

$$R = \frac{84 \cdot 10^{-7} \sqrt{f}}{r} \text{ en } (\Omega/\text{m}) \quad (1.38)$$

Où r est le rayon d'un fil en centimètre et f la fréquence de travail en Hertz. On remarque de cette expression que La résistance R est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence.

I.2.5.2. Cas d'un câble coaxial

La section transversale d'un câble coaxiale est schématisée sur la figure (I.5), montrant deux conducteurs cylindriques concentriques, l'un interne (CI) de rayon a et l'autre externe (CE) de rayon b, séparés par un isolant diélectrique de permittivité relative ϵ_r .

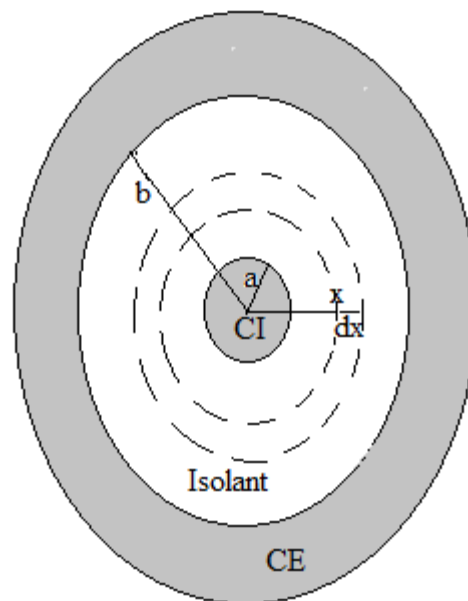


Figure I.5. Section transversale d'un câble coaxial

a/ Inductance L d'un câble coaxial

Le flux magnétique élémentaire capté par un tube annulaire de longueur 1m et d'épaisseur dx, situé à la distance x du centre du câble, s'écrit: $d\phi = \frac{\mu}{2\pi x} dx dz$, l'axe oz étant selon la longueur du câble. Le flux total s'obtient de la relation (1.39).

$$\phi = \frac{\mu}{2\pi x} dx dz = \int_0^b \int_0^1 \frac{\mu I}{2\pi x} dx dz = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ en Weber/m} \quad (1.39)$$

On notera que le flux est nul à l'extérieur du tube de rayon b. D'où l'on déduit finalement l'inductance L :

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) = 2.1 \cdot 10^{-7} \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ en (H/m)} \quad (1.40)$$

Ou encore $L = 0,46 \log\left(\frac{b}{a}\right) \text{ en } (\mu\text{H/m}) \quad (1.41)$

b/ Capacité C d'un câble coaxial

Pour calculer la capacité C, remarquons que le champ électrique E dans l'isolant est de :

$E = \frac{q}{2\pi\epsilon x}$; en V/m où q est la charge par unité de longueur du câble. On trouve alors la différence de potentiel entre les deux conducteurs en intégrant de a à b.

Soit $V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \text{Ln} \frac{b}{a}$; ce qui donne pour la capacité C:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \text{ en (F/m)} \quad (1.42)$$

Si l'isolant diélectrique est l'air, caractérisé par $\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^{+9}} \text{ (F/m)}$, alors l'expression de la capacité devient:

$$C = \frac{24,1}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \text{ en (pF/m)} \quad (1.43)$$

c/ Impédance caractéristique Z_c d'un câble coaxial

Si l'isolant diélectrique du câble coaxial est l'air, alors :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = 138 \log\left(\frac{b}{a}\right) \text{ en } (\Omega) \quad (1.44)$$

d/ Résistance ohmique d'un câble coaxial

Si les conducteurs du câble sont en cuivre, les dimensions a et b sont en centimètre et la fréquence f en Hertz, sa résistance ohmique s'écrit:

$$R = 4,2 \cdot 10^{-6} \sqrt{f} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ en } (\Omega/\text{m}) \quad (1.45)$$

I.2.6. Ligne en court-circuit et ligne ouverte

I.2.6.1. Ligne en court-circuit

a/Calcul de l'impédance d'entrée et Répartition du courant et de la tension

Etudions le comportement d'une ligne de longueur l, orientée selon oz et court-circuitée à son extrémité (z= 0).

Posons $V_r = 0$ (court-circuit) dans l'équation $V = V_r \cdot \cos\beta z + jZ_c I_r \cdot \sin\beta z$.

Pour $z=l$, correspondant à l'entrée de la ligne, on a $V=V_0=jZ_c I_r \sin \beta l$. D'où le courant I_r , parcourant la charge Z_r , vaut: $I_r = \frac{V_0}{jZ_c \sin \beta l}$. La tension V a une distance z de la charge

$$s'écrit alors: V = jZ_c I_r \sin \beta z = V_0 \frac{\sin \beta z}{\sin \beta l} \quad (1.46)$$

Sachant également que $I = I_r \cos \beta z + j(V_r/Z_c) \sin \beta z$ et $V_r = 0$ (ligne court-circuitée) et

$$I_r = \frac{V_0}{jZ_c \sin \beta l}; \text{ ce qui donne: } I = \frac{V_0 \cos \beta z}{jZ_c \sin \beta l} \quad (1.47)$$

L'impédance $Z(z)$ en un point z quelconque de la ligne s'écrit :

$$Z(z) = \frac{V}{I} = \frac{V_0 \sin \beta z \cos \beta l}{I_0 \sin \beta l \cos \beta z} = \frac{V_0}{I_0} \text{ctg } \beta l \text{tg } \beta z; \text{ or } Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = jZ_c \text{tg } \beta l,$$

$$d'où: Z(z) = jZ_c \text{tg } \beta z \quad (1.48)$$

Comparons maintenant les relations donnant V et I en un point z quelconque de la ligne. Ces courants et tension s'écrivent :

$$\begin{cases} V = V_0 \frac{\sin \beta z}{\sin \beta l} = \frac{V_0}{\sin \beta l} \frac{(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z})}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ I = I_0 \frac{\cos \beta z}{\cos \beta l} = \frac{I_0}{\cos \beta l} \frac{(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z})}{2} \end{cases} \quad (1.49)$$

On voit que V et I sont en quadrature dans l'espace (en z) ; leurs phases restent constantes pour une distance ($\lambda/2$) puis brusquement il y a une inversion de phase. V et I sont constitués de deux ondes, l'une progressive (en $e^{-j\beta z}$) et l'autre rétrograde en ($e^{j\beta z}$) ; on a donc formation d'ondes stationnaires.

De plus V et I varient sinusoïdalement et les variations de leurs amplitudes s'obtiennent des relations du système (1.49).

La tension V varie de $\frac{V_0}{\sin \beta l}$ à $-\frac{V_0}{\sin \beta l}$ et I varie $\frac{I_0}{\cos \beta l}$ à $-\frac{I_0}{\cos \beta l}$.

Au niveau de la charge (en $z=0$), on a $V=0$ et $I = \frac{I_0}{\cos \beta l}$, correspondant à un nœud de tension et un ventre de courant.

b/Variation de l'impédance d'entrée d'une ligne court-circuitée

On va étudier la relation $Z(z) = jZ_c \text{tg } \beta z$

1^{er} cas: Si l'on veut que $Z_0 = 0$, pour $z=l$, on aura $\text{tg } \beta l = 0 \Rightarrow \beta l = n\pi \Rightarrow l = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\pi\lambda}{2\pi} = n \cdot \frac{\lambda}{2}$;

avec $n=1, 2, \dots$

Pour $n=1$, $l = \lambda/2$ (cas d'une ligne demi-onde) et pour $n=2$, $l = \lambda$.

En pratique, on fait glisser une tige de cuivre mobile (formant un pont sur les deux fils de la ligne) jusqu'à ce qu'un ampèremètre indique un courant maximum (I_{\max}) à l'entrée de la ligne, puisque $Z_0 = 0$ pour $l = n\lambda/2$.

2^{ème} cas: Si l'on veut $Z_0 \rightarrow \infty$, on aura :

$$\operatorname{tg} \beta l \rightarrow \infty \Rightarrow \beta l = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow l = \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Si $n = 0 \Rightarrow l = \frac{\lambda}{4}$ (ligne quart d'onde) et $I_0 = 0$.

En résumé, une ligne terminée par un court-circuit mobile constitue un dispositif simple permettant de réaliser facilement une impédance d'entrée variant de zéro à l'infini.

Le Tableau I.1 expose la nature physique de l'impédance d'entrée d'une ligne court-circuitée à son extrémité en fonction de sa longueur.

Longueur l d'une ligne court-circuitée	Circuit équivalent à Z_0	Z_0 à la résonance	I_0 à la résonance
$0 \leq l < \frac{\lambda}{4}$	une inductance	Z_0	I_0
$l = \frac{\lambda}{4}$	un circuit bouchon	∞	0
$\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$	une capacité	Z_0	I_0
$l = \frac{\lambda}{2}$	un circuit résonnant série	0	I_{\max}

c/ Valeurs instantanées de V et de I

On dispose d'une ligne court-circuitée, donc la tension au niveau de la charge est $V_r = 0$.

En partant de la charge, les équations des télégraphistes donnent les expressions relatives à la tension V et au courant I.

$$\text{Soit } \begin{cases} V = jZ_c I_r \sin \beta z \\ I = I_r \cos \beta z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = jZ_c I_r \sin \beta z = \frac{Z_c I_r}{2} [e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}] \\ I = I_r \cos \beta z = \frac{I_r}{2} [e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}] \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} V = \frac{Z_c I_r}{2} e^{j\beta z} - \frac{Z_c I_r}{2} e^{-j\beta z} \\ I = \frac{I_r}{2} e^{j\beta z} + \frac{I_r}{2} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

Ces deux dernières expressions montrent que l'état de la ligne est constitué de deux ondes : l'une progressive (en $-z$) se propageant de la charge vers la source et l'autre rétrograde (en $+z$) se propageant de la source vers la charge. On a donc superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, d'où la formation d'ondes stationnaires avec des valeurs instantanées de V et de I, comme suit :

$$\begin{cases} V_{\text{inst}} = Z_c I_r \sin \beta z \cos \omega t \\ I = I_r \cos \beta z \sin \omega t \end{cases}$$

V_{inst} et I_{inst} sont en quadrature dans le temps et dans l'espace. Alors là où V_{inst} est maximum, I_{inst} est nul et inversement. La distance d'un nœud à un ventre est de $\lambda/4$.