

## CHAPITRE II: Les lignes planaires

### II.1. Introduction

Dans le domaine des télécommunications, on utilise des signaux à fréquence de plus en plus élevée et des impulsions de plus en plus courtes. Le procédé photolithographique mis au point à l'origine pour réaliser des interconnexions, a permis la conception du type de lignes connu sous le nom de ligne à ruban (ou microstrip), bien adapté à la conception des circuits intégrés microondes.

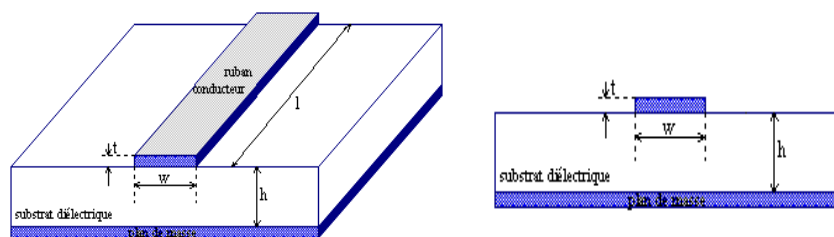
Il existe une grande variété de lignes à structure bidimensionnelle (lignes planaires), largement étudiées dans la littérature scientifique. Ces lignes sont utilisées pour la réalisation des circuits passifs et aussi des circuits actifs hyperfréquences.

Il existe deux façons de concevoir ces lignes planaires.

- L'analyse où l'on considère une ligne de dimensions déterminées et on détermine ses paramètres caractéristiques.
- La synthèse où l'on se fixe des paramètres de la ligne, telle que l'impédance caractéristique et l'on détermine ses dimensions.

### II.2. Structure d'une ligne microruban

La ligne microruban est composée d'un ruban métallique déposé sur une plaque diélectrique, entièrement métallisée dans l'autre face.



**Figure II.1.** Structure générale d'une ligne microruban

Le ruban conducteur est une couche de métallisation déposée sur le substrat diélectrique. Le ruban est caractérisé par une faible résistivité (pertes ohmiques

faibles), une épaisseur au moins de l'ordre de 3 fois la profondeur de pénétration  $\delta$  (exp :  $\delta = 2\mu\text{m}$  dans le cuivre à 1GHz) et une bonne adhérence sur le substrat (pas de poches d'air entre le ruban et le substrat).

Le substrat diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$ , tout en étant un support mécanique du ruban, constitue le milieu de propagation de l'onde. Sa permittivité  $\epsilon_r$  doit être uniforme sur tout le circuit et sa tangente de pertes ( $tg\delta$ ) doit être faible. Le tableau II.1. montre les propriétés de quelques matériaux utilisés comme substrat.

**Tableau II.1.** Propriétés de quelques matériaux utilisés comme substrat

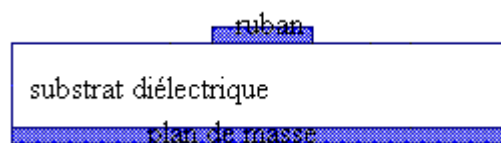
Matériau	Alumine $\text{Al}_2\text{O}_3$	Saphir	Teflon
$\epsilon_r$	9,8	9,4-11,6	2,1
$tg\delta$ à 10 GHz	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$

### II.3. Caractéristiques d'une ligne microruban

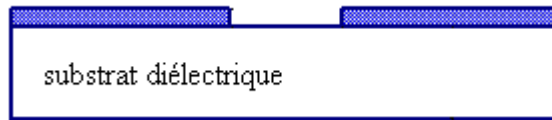
La ligne microruban est caractérisée par la permittivité relative  $\epsilon_r$  du substrat, l'épaisseur  $h$  du substrat, la largeur  $W$  du ruban, l'épaisseur  $t$  du ruban et la nature du ruban conducteur et du plan de masse

### II.4. Principaux types de lignes planaires

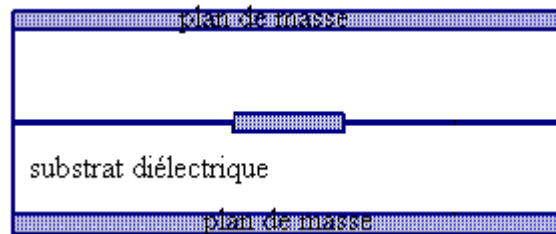
Il existe une grande variété de lignes planaires, parmi lesquelles on cite la ligne microruban simple (Microstrip line), la ligne à fente (slot line) et la ligne triplaque (Stripline). Les sections droites de ces lignes sont schématisées sur les figures II.2, II.3 et II.4.



**Figure II.2.** Section droite d'une ligne microruban simple



**Figure II.3.** Section droite d'une ligne microruban à fente



**Figure II.4.** Section droite d'une ligne microruban triplaque

## II.5. Avantages et inconvénients

### ➤ Avantages

- Transmission des signaux en courant alternatif qu'en courant continu
- Facilité d'implantation des composants actifs
- Réduction considérable de la longueur d'onde de la ligne
- Structure irrégulière peut résister modérément à des tensions et des niveaux de puissance élevés

### ➤ Inconvénients

- Les champs électromagnétiques dans le substrat et dans l'air peuvent s'étendre à l'infini sous forme d'ondes rayonnées et de surface, ces ondes produisent des couplages indésirables
- L'effet dispersif de la ligne
- Les discontinuités, introduites par les connections, produisent des réflexions difficiles à supprimer

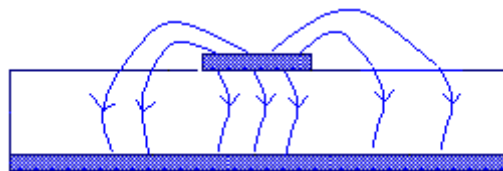
## II.6. Analyse de la ligne microruban

Le milieu de propagation étant inhomogène (diélectrique et air), la résolution de l'équation de propagation n'est pas simple. L'équation générale à résoudre, déduite des équations de Maxwell, s'écrit en régime statique:

$$\begin{cases} \text{div}(\epsilon_r \overrightarrow{\text{grad}}_t V) = 0 & (2.1) \\ \text{div}\left(\frac{1}{\mu_r} \overrightarrow{\text{grad}}_t A_z\right) = 0 & (2.2) \end{cases}$$

V est le potentiel scalaire et  $A_z$  est la composante longitudinale (dans la direction de propagation ici oz) du potentiel vecteur  $\overrightarrow{A}$ .

Cette formulation montre qu'il doit y avoir au moins deux conducteurs distincts portés à des potentiels différents. Dans ce cas, le mode fondamental de la ligne microruban est un mode hybride (HEM) à composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  négligeables devant le module des composantes transversales, dans la bande de fréquence allant du domaine statique ( $f=0$ ) jusqu'à la fréquence de coupure du premier mode TM. Ainsi, dans cette région, ce mode est assimilé à un mode TEM, appelé quasi-TEM.

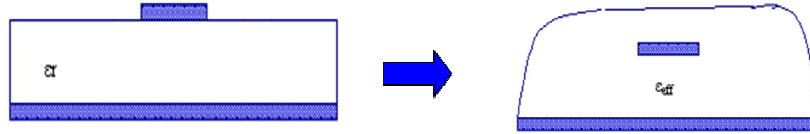


**Figure II.5.** Lignes des champs électriques dans une ligne microruban simple

### II.6.1. Paramètres caractéristiques de la ligne

#### II.6.1.1. Permittivité effective $\epsilon_{\text{eff}}$

Elle définit la permittivité relative d'une ligne homogène fictive équivalente à la ligne inhomogène réelle (figure 3), propageant l'onde quasi-TEM.



**Figure II.6.** Equivalence ligne microruban réelle - ligne microruban fictive

Les efforts des chercheurs ont porté sur la détermination la mieux approchée de  $\epsilon_{\text{reff}}$  en fonction de  $(\epsilon_r, h, W)$ . A titre d'exemple, Hammerstad donne une formule explicite de  $\epsilon_{\text{reff}}$ , comme suit :

- pour  $W/h \geq 1$  :

$$\epsilon_{\text{reff}} = \frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1) \left(1 + \frac{12h}{W}\right)^{-1/2} \quad (2.3)$$

- pour  $W/h \leq 1$  :

$$\epsilon_{\text{reff}} = \frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1) \left[ \left(1 + \frac{12h}{W}\right)^{-1/2} + 0.04 \left(1 - \frac{W}{h}\right)^2 \right] \quad (2.4)$$

### II.6.1.2. Impédance caractéristique d'une ligne microruban

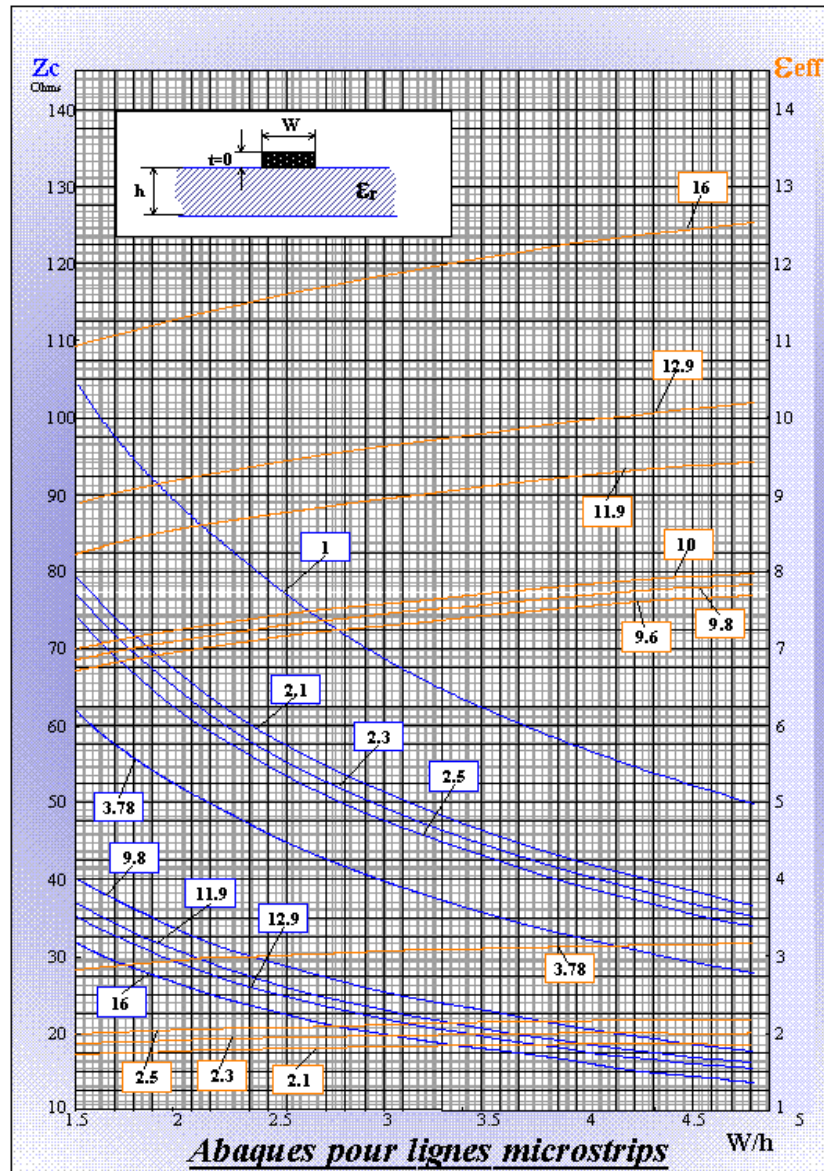
#### a/ Résultats de Wheeler pour $t=0$

- Pour les lignes telles que :  $W/h > 2$

$$Z_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[ \frac{W}{h} + 0,883 + \frac{\epsilon_r + 1}{\pi\epsilon_r} \left( \ln\left(\frac{W}{2h} + 0,94\right) + 1,451 \right) + 0,165 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r^2} \right] \quad (2.5)$$

- Pour les lignes telles que :  $W/h < 2$

$$Z_c = \frac{60\sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{\epsilon_r + 1}} \left[ \ln\left(\frac{8h}{W}\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{W}{2h}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\epsilon_r} \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) \right) \right] \quad (2.6)$$



**Figure II.7.** Abaque de calcul de  $Z_c$  en fonction de  $W/h$  pour diverses  $\epsilon_r$

**b/ Résultat de Hammerstad pour  $t = 0$**

- Pour  $W/h < 2$

$$Z_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \left[ \frac{W}{h} + 1,393 + 0,667 \ln \left( \frac{W}{h} + 1,444 \right) \right] \quad (2.7)$$

- Pour  $W/h > 2$

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \ln \left( \frac{8h}{W} + \frac{W}{h} \right) \quad (2.8)$$

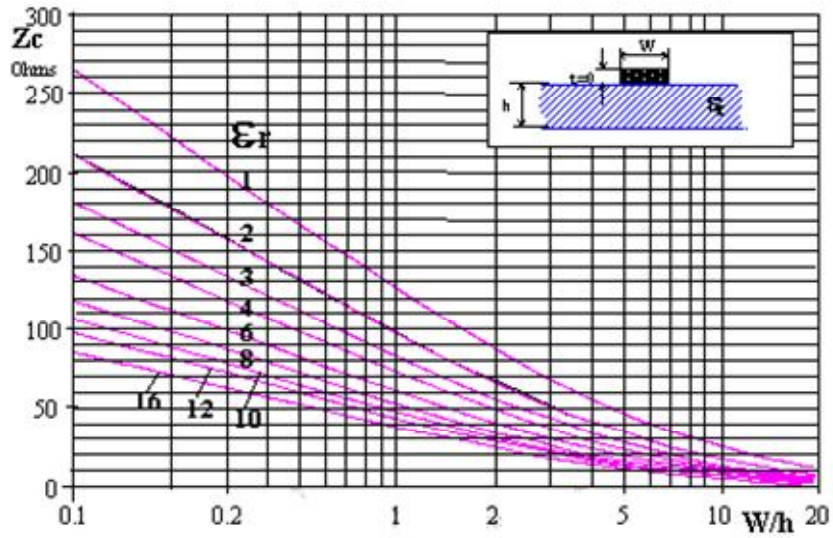


Figure II.8. Abaque pour le calcul du  $Z_c$  en fonction de  $W/h$  pour diverses  $\epsilon_r$

## II.6.2. Paramètres d'influence dans l'analyse de la ligne microruban

### II.6.2.1. Epaisseur du ruban

- Traduit par un effet de bord modifiant légèrement la répartition des champs
- Introduction d'une largeur équivalente  $W_{eq}$

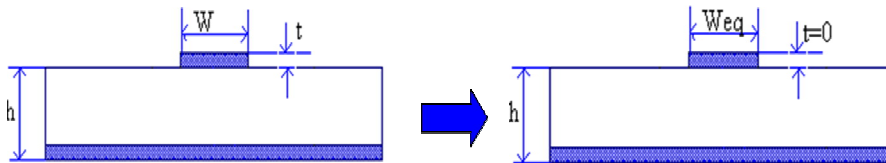


Figure II.9. Définition de la largeur équivalente du ruban

- La formule donnant cette largeur équivalente, s'écrit :

$$W_{eq} = W + \frac{t}{\pi} \left[ 1 + \text{Ln} \left( \frac{2x}{t} \right) \right] \quad (2.9)$$

Avec  $x = h$  si  $W > h/2\pi$  et  $x = 2\pi W$  si  $h/2\pi > W > 2t$

### II.6.2.2. Effet de dispersion

Avec des fréquences relativement basses ( $f < f_d$ ),  $Z_c$  et  $\epsilon_{\text{reff}}$  ne dépendent pas de la fréquence. Quand les fréquences deviennent importantes ( $f > f_d$ ), la ligne microruban est dite dispersive. L'influence de la dispersion se traduit par un effet de fréquence modifiant les paramètres  $Z_c$  et  $\epsilon_{\text{reff}}$

### II.6.2.3. Influence du boîtier métallique

La présence des parois métalliques conductrices diminue à la fois l'impédance caractéristique  $Z_c$  et la permittivité effective  $\epsilon_{\text{reff}}$  de la ligne microruban, ce qui est dû à la propagation constante du flux électrique dans l'air. Le blindage métallique permet d'éliminer le rayonnement des ondes de la ligne.

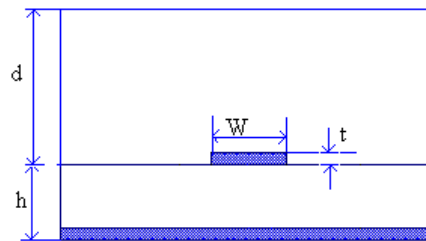


Figure II.10. Ligne microruban avec blindage

### II.6.2.4. Affaiblissement dans une ligne microruban

La présence d'une couche adhésive entre le substrat et le conducteur peut augmenter les pertes de même que la rugosité des surfaces. La formule approchée de Janssen permet de déterminer les pertes ohmiques dans le conducteur.

$$\alpha_c = \frac{8.686 R_m}{W Z_c} \quad (\text{dB/m}) \quad (2.10)$$

$$\text{avec } R_m = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad (\Omega) \quad (2.11)$$

En outre, des pertes diélectriques sont produites par l'énergie dissipée dans le substrat. Ces pertes sont proportionnelles à son facteur de pertes  $\text{tg}\delta$ , selon la relation suivante.

$$\alpha_d = 27,3 \cdot \frac{\epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)} \cdot \frac{(\epsilon_{\text{eff}} - 1)}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \cdot \frac{\text{tg}\delta}{\lambda_0} \quad (2.12)$$

Si la ligne microruban n'est pas blindée, il existe également des pertes par rayonnement. Ces pertes sont causées par les discontinuités présentes sur les lignes. Ces pertes sont proportionnelles à  $(hf)^2 / \sqrt{\epsilon_r}$  pour une ligne de  $50\Omega$  (Hammerstad). La fréquence limite au dessus de laquelle plus de 1% de la puissance est rayonnée à l'extrémité d'une ligne ouverte est donnée par :

$$f_M (\text{GHz}) = 2,14 \frac{(\epsilon_r)^{1/4}}{h(\text{mm})} \quad (2.13)$$

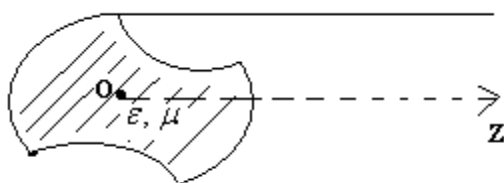
Par exemple pour un substrat de  $h=1\text{mm}$ , on trouve  $f_M = 4\text{GHz}$  si  $\epsilon_r = 10$

# CHAPITRE III. LES GUIDES D'ONDES METALLIQUES

## III.1. INTRODUCTION

Les guides d'ondes étudiés sont des conducteurs creux ou remplis de diélectriques, à l'intérieur desquels se propagent des ondes électromagnétiques, par réflexion sur les parois métalliques internes. Ils sont utilisés lorsque les puissances à transmettre sont élevées.

Nous supposons, comme pour les lignes de transmission, que la structure est uniforme dans la direction  $oz$  de propagation (Figure III.1); c'est-à-dire que ne s'y produit aucun changement de dimensions ou de milieu. La section transversale est quelconque, mais nous étudions surtout les sections rectangulaires et circulaires. Nous admettrons aussi que le milieu de propagation est homogène isotrope et que  $\epsilon, \mu, \sigma$  ne dépendent, ni de la position considérée dans le guide, ni de l'amplitude des signaux.



**Figure III.1.** Structure générale d'un guide d'ondes métallique

Nous supposons enfin, que le conducteur utilisé est parfait et qu'il entoure des milieux sans charges et sans courants.

## III.2. Remarques générales sur le problème de propagation

### III.2.1. Equation de propagation

Les équations de propagations des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{H}$  s'obtiennent des équations de MAXWELL.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\mu \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega\varepsilon \vec{E} \\ \text{div } \vec{D} = \rho = 0 \Rightarrow \varepsilon \text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 ; \varepsilon \neq 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) &= -j\omega\mu \text{rot } \vec{H} \text{ or } \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ \Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} &= -j\omega\mu(j\omega\varepsilon) \vec{E} \end{aligned}$$

$$\text{De même } \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \varepsilon\mu \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \varepsilon\mu \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Que l'on peut écrire pour la forme :

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \Rightarrow k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \\ \mu = \mu_0 \mu_r \end{cases}$$

$k$  est la constante de propagation dans le milieu ou nombre d'onde.

La résolution de ces deux équations nécessite un choix approprié du système d'axes dans lequel sont décrits les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ .

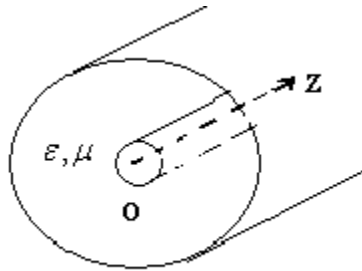
Le système précédent possède plusieurs solutions:

Dans l'espace libre: la solution de ce système est une onde plane. C'est le cas de la propagation libre.

Dans un milieu limité par des conducteurs se propagent des ondes guidées sous différentes formes appelées modes de propagation.

- S'il y'a plusieurs conducteurs (exp: lignes de transmission), on a des ondes guidées dites Transverse Electro-Magnétique (T.E.M),

caractérisées par  $E_z = H_z = 0$ , si oz est la direction de propagation (Figure III.2).



**Figure III.2.** Structure d'une ligne bifilaire coaxiale

-dans le cas d'un seul conducteur, l'onde T.E.M ne peut exister et l'on a des modes Transverse Electriques (T.E), des modes Transverse Magnétique (T.M) et des modes Hybrides (l.TE+h.TM), qui sont guidés.

- Les modes TE (ou H) sont caractérisés par  $E_z = 0; H_z \neq 0$
- Les modes TM (ou E) sont caractérisés par  $E_z \neq 0; H_z = 0$
- Les modes hybrides (HE ou EH) sont caractérisés par  $E_z \neq 0; H_z \neq 0$

Remarque : une onde se propageant dans le sens des  $z$  croissants ( $z > 0$ ) est décrite par :  $\vec{\psi} = \vec{\psi}_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma_g z}$  ; avec  $\gamma_g = \alpha_g + j\beta_g$

$\alpha_g$  traduit le coefficient d'atténuation dans le guide et  $\beta_g$  représente la constante de propagation longitudinale dans le guide.

On considère dans la suite que les milieux de propagation sont sans pertes

( $\alpha_g = 0$ ), d'où le champ s'écrit sous la forme:  $\vec{\psi} = \vec{\psi}_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta_g z}$

L'objectif de notre étude est d'exprimer les composantes  $(E_x, E_y, H_x, H_y)$  à partir de  $H_z$  et ses dérivées pour les modes TE, et à partir de  $E_z$  et ses dérivées pour les modes TM.

### III.2.2. Propagation sans pertes des modes TE (ou H)

Dans ce cas  $E_z = 0$ , car la propagation est considérée ici selon oz.

$$\vec{E} = \vec{E} e^{j\omega t} e^{-j\beta_g z} \rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -j\beta_g \vec{E} \rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\beta_g^2 \vec{E}$$

**Puisque** le milieu de propagation est sans charges, alors on peut écrire :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{Et } \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \text{ car } E_z = 0$$

$$* \text{ rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j\beta_g E_y = -j\omega\mu H_x \\ -j\beta_g E_x = -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_y = -\frac{\omega\mu}{\beta_g} H_x & (3.4) \\ E_x = \frac{\omega\mu}{\beta_g} H_y & (3.5) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z & (3.6) \end{cases}$$

Les équations (3.5) et (3.6) montrent que  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{H}$  dans le plan (xoy) ou plan transversal.

$$* \text{ rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x & (3.7) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y & (3.8) \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 & (3.9) \end{cases}$$

$$\text{Or } \frac{\partial}{\partial z} = -j\beta_g$$

D'où les équations (5) et (3) donnent :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\frac{\beta_g}{\omega\mu} \cdot \beta_g \cdot E_x = j\omega\varepsilon E_x \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_x - j\frac{\beta_g^2}{\omega\mu} E_x$$

$$\text{Soit : } E_x = \frac{-j\omega\mu}{(k^2 - \beta_g^2)} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\text{Avec } k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

On pose  $k_t^2 = k^2 - \beta_g^2 \Rightarrow k_t = \sqrt{k^2 - \beta_g^2}$  = constante de propagation transversale.

$$(2) \text{ et } (6) \Rightarrow E_y = \frac{j\omega\mu}{(k^2 - \beta_g^2)} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$E_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ E_y = \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$E_y \text{ dans (2)} \Rightarrow H_x = \frac{-j\beta_g}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$E_x \text{ dans (3)} \Rightarrow H_y = \frac{-j\beta_g}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

Et  $H_z$  étant solution de :  $\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 H_z + k_t^2 H_z = 0$

Soit  $\vec{H}_t$  le champ magnétique tangentiel au plan (xoy), perpendiculaire à la direction de propagation oz.

$$\vec{H}_t = H_x \vec{U}_x + H_y \vec{U}_y ; \begin{cases} \vec{U}_x : \text{vecteur unitaire de la direction } x \\ \vec{U}_y : \text{vecteur unitaire de la direction } y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_t = -j \frac{\beta_g}{k_t^2} \text{grad}_t \vec{H}_z = -j \frac{\beta_g}{k_t^2} \nabla_t H_z$$

Soit  $\vec{E}_t$  le champ électrique transverse (c-à-d tangentiel au plan xoy).

$$\vec{E}_t = E_x \vec{U}_x + E_y \vec{U}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t = -j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \vec{U}_x + j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \vec{U}_y$$

$$= j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \begin{vmatrix} \vec{U}_x & \vec{U}_y & \vec{U}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{\partial H_z}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t = j \frac{\omega \mu}{k_t^2} (\vec{U}_z \times \nabla_t H_z)$$

$\vec{U}_z$  est le vecteur unitaire de la direction de propagation  $oz$ .

$$\boxed{\vec{E}_t = \frac{-\omega \mu}{\beta_g} (\vec{U}_z \times \vec{H}_t)}$$

### III.2.3. Propagation sans pertes des modes TM (ou E)

Les modes TM sont caractérisés par une composante longitudinale du champ magnétique nulle, soit  $H_z = 0$ .

Le problème consiste donc à déterminer les composantes  $(H_x, H_y, E_x, E_y)$  en fonction de  $E_z$  et ses dérivées.

On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_t &= -j \frac{\beta_g}{k_t^2} \nabla_t E_z \\ \vec{H}_t &= -j \frac{\omega \mu \epsilon}{k_t^2} (\vec{U}_z \times \nabla_t E_z) \end{aligned}}$$

D'où l'on déduit :  $\vec{H}_t = \frac{\omega\epsilon}{\beta_g} (\vec{U}_z \times \vec{E}_t)$

### III.2.4. Quelques définitions

#### III.2.4.1. Fréquence de coupure

La fréquence (ou longueur d'onde  $\lambda = \frac{v}{f}$ ) de coupure est la fréquence  $f_c$  qui correspondant à un exposant de propagation nul ( $\beta_g = 0$ ).

$$k_t^2 = k^2 - \beta_g^2 \Rightarrow \beta_g^2 = k^2 - k_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow k_c = k_t = \frac{2\pi}{\lambda_c}$$

D'où la constante de propagation  $k_c$  à la coupure est égale à la constante de propagation transversale.

#### III.2.4.2. Champ dans le guide à la fréquence de coupure

Lorsque  $\beta_g$  est nul, on constate que l'un des deux champs transverses est nul. Pour un mode TE, il s'agit du champ magnétique transverse, tandis que c'est le champ électrique transverse pour le mode TM à la fréquence de coupure. Il en résulte, que dans les deux cas, la puissance moyenne transmise dans le guide est nulle.

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_{\text{section du guide}} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{U}_z dS = \frac{1}{2} \iint_{\text{section du guide}} (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot \vec{U}_z dS$$

Le guide ne permet donc de transmettre le signal à cette fréquence.

### III.2.4.2.1. Mode en dessous de la coupure (mode évanescent)

Quand, pour un mode donné,  $f < f_c \Rightarrow k < k_c$ ; alors  $\beta_g = \sqrt{\underbrace{k^2 - k_c^2}_{<0}}$

est complexe ( $\beta_g$  imaginaire pur) et l'exposant de propagation  $(-j\beta_g z)$  est réel.

Dans ce cas  $e^{-j\beta_g z} \Leftrightarrow e^{l z}$  et on a un affaiblissement du mode sans propagation. On dit qu'un mode en dessous de la coupure est évanescent.

### III.2.4.2.2. Mode au dessus de la coupure

Quand pour un mode donné,  $f > f_c \Rightarrow k > k_c$ ; alors  $\beta_g = \sqrt{\underbrace{k^2 - k_c^2}_{>0}}$ ,

et l'exposant de propagation est complexe  $(-j\beta_g z)$ . Le signal peut alors se propager sans affaiblissement dans le guide.

### III.2.4.2.3. Longueur d'onde dans le guide

Une onde qui se propage dans un guide présente une périodicité dans la direction longitudinale (ici l'axe oz), dont la période est la longueur d'onde du guide  $\lambda_g$ , définie par:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} \\ \lambda_c : \text{longueur d'onde de coupure} \end{cases}$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , est la longueur d'onde dans le milieu  $\epsilon, \mu$ .

On remarque de l'expression précédente que la longueur d'onde du guide  $\lambda_g$  est toujours plus grande que la longueur d'onde  $\lambda$  dans le milieu  $(\epsilon, \mu)$ .

#### III.2.4.2.4. Vitesse de phase et vitesse de groupe

La vitesse de phase est :  $v_f = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_c^2}}$

Or  $k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu  $\epsilon, \mu$ .

$$\Rightarrow v_f = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_c^2}} \quad ; \text{ Soit } v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_c \cdot c}{\omega}\right)^2}} \text{ en m/s}$$

La vitesse de groupe  $v_g$  est donnée par la relation:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_g} = \left(\frac{\partial \beta_g}{\partial \omega}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_c^2}}{\left(\frac{\omega}{c^2}\right)}$$

$$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{k_c \cdot c}{\omega}\right)^2} \text{ en m/s}$$

- On remarque que  $v_f \cdot v_g = c^2$

Si le guide est vide, alors :

$$(\varepsilon = \varepsilon_0; \mu = \mu_0) \Rightarrow v_f \cdot v_g = c^2 = (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

- On remarque, que les deux vitesses  $v_f$  et  $v_g$  sont des fonctions de la fréquence (ou pulsation  $\omega$ ), le guide d'onde est donc **dispersif**; c'est à dire que des signaux de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes.

### III.2.4.2.5. Impédance d'onde

Pour un mode au dessus de la coupure, l'impédance d'onde est réelle et correspond à un transfert de puissance active. Elle est donnée par la relation suivante.

$$Z = \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{H}_t|}$$

Pour un mode TE:  $Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta_g} = \frac{\omega\mu}{2\pi} \lambda_g$  et  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow Z_{TE} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} \text{ en } \Omega$$

Pour un mode TM :

$$Z_{TM} = \frac{\beta_g}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_g} \text{ en } \Omega$$

### III.2.4.3. Bandes de fréquence, mode dominant, mode supérieures

La figure III.3 expose le diagramme de dispersion des guides d'ondes métalliques. Soient  $f_{c_1}$  et  $f_{c_2}$  les fréquences de coupure respectives du premier mode (mode dominant) et du 2<sup>ème</sup> mode du guide. On distingue du point de vue des utilisations des guides d'ondes, quatre bandes de fréquences.

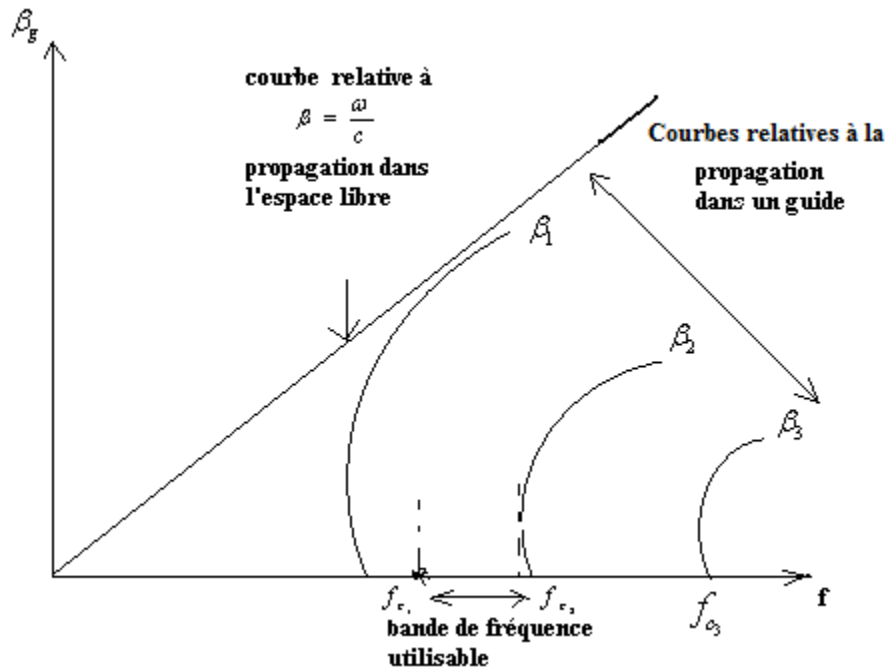
✓ Pour  $f < f_{c_1}$  ; aucun mode ne peut se propager et les champs décroissent avec la distance  $oz$  (direction de propagation). Un tel guide, dans cette bande, peut être employé comme **atténuateur**.

✓ Pour  $f_{c_1} < f < f_{c_2} \Rightarrow$  un seul mode (mode dominant), peut se propager. Il existe en pratique, deux sous bandes:

\* Pour  $f_{c_1} < f < 1.25f_{c_1} \Rightarrow$  un seul mode le mode dominant, peut se propager. Il présente toutefois une grande dispersion, de sorte que cette bande de fréquences n'est en général pas employée pour transmettre l'information.

\* Pour  $1.25f_{c_1} < f < f_{c_2} \Rightarrow$  un seul mode le mode dominant, peut se propager. La dispersion est généralement acceptable dans cette bande.

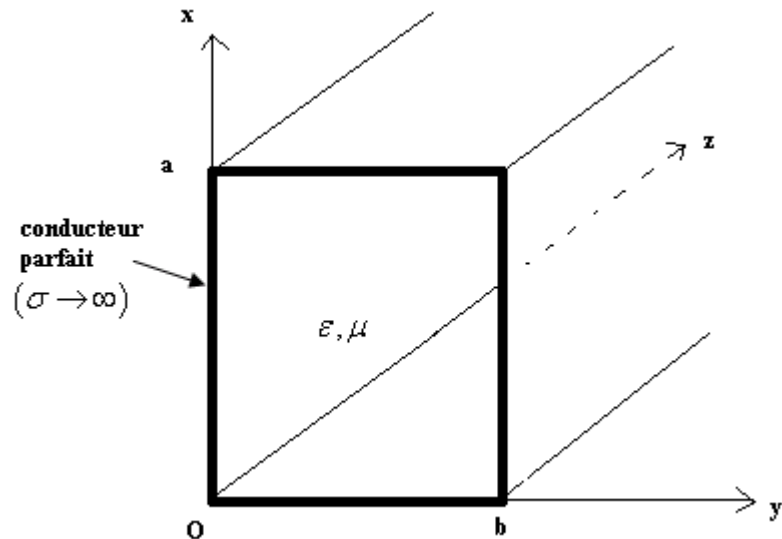
✓ Pour  $f > f_{c_2}$ , plusieurs modes, le mode dominant et un ou plusieurs modes supérieurs, peuvent se propager dans cette bande. C'est le fonctionnement multimodal du guide d'onde. Les vitesses de propagation et les affaiblissements sont toutefois différents pour les différents modes, ce qui entraîne une distorsion du signal.



**Figure III.3.** Diagramme de dispersion du guide d'onde métallique

### III.3. Guide d'onde Rectangulaire

Pour étudier les modes de ce guide, on utilise le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On considère la propagation des ondes dans ce guide selon l'axe  $oz$ .



**Figure III.4.** Structure du guide d'onde rectangulaire métallique

### III.3.1. Propagation des modes TE

Mode TE  $\Rightarrow E_z = 0$ .

Et  $H_z$  vérifie:

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0$$

$$\text{or } \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta_g^2$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \right) + (k^2 - \beta_g^2) H_z = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 H_z + k_t^2 H_z = 0$$

Pour résoudre cette équation du second ordre, on utilise la méthode de séparation de variable. Elle consiste à écrire  $H_z(x, y, z)$  sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}
H_z(x, y, z) &= F(x)G(y) \cdot e^{-j\beta_g z} \\
\Rightarrow G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + FG k_t^2 &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_t^2 &= 0 \Rightarrow \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k_t^2 \\
\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = cste = -k_x^2 \\ \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = cste = -k_y^2 \end{cases} \\
\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 &= k_t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -k_x^2 &\Rightarrow F = A \sin k_x \cdot x + B \cos k_x \cdot x \\
\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k_y^2 &\Rightarrow G = C \sin k_y \cdot y + D \cos k_y \cdot y
\end{aligned}$$

Avec A, B, C et D des constantes, d'où :

$$H_z = (A \sin k_x \cdot x + B \cos k_x \cdot x) \cdot (C \sin k_y \cdot y + D \cos k_y \cdot y) e^{-j\beta_g z} \quad (**)$$

### III.3.1.1. Conditions aux limites sur le conducteur parfait

Sur un conducteur parfait, le champ électrique tangentiel  $\vec{E}_t$  est nul et le champ magnétique normal  $\vec{H}_n$  est nul aussi. On dit que l'on a un court-circuit électrique (C.C.E).

$$\text{Sur un C.C.E} \quad \begin{cases} \vec{n} \times \vec{E} = \vec{E}_t = \vec{0} \Rightarrow E_n \neq 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{H} = H_n = 0 \Rightarrow \vec{H}_t \neq \vec{0} \end{cases} \quad \text{et } \vec{n} \perp \text{C.C.E}$$

Le court-circuit magnétique (C.C.M) est le dual du C.C.E.

$$\text{Sur un C.C.M} \quad \begin{cases} \vec{n} \times \vec{H} = \vec{H}_t = \vec{0} \Rightarrow H_n \neq 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{E} = E_n = 0 \Rightarrow \vec{E}_t \neq \vec{0} \end{cases} \quad \text{et } \vec{n} \perp \text{C.C.M}$$

On cherche des modes TE donc  $E_z = 0$  et  $H_z$  est donnée par la relation précédente (\*\*).

Sachant que  $H_z$  est tangentielle au conducteur parfait, on calcule  $E_x$  et  $E_y$  pour appliquer les conditions aux limites sur le conducteur (C.C.E).

$$E_y \sim \frac{\partial H_z}{\partial x} \sim \frac{\partial F}{\partial x} = k_x A \cos k_x \cdot x - B k_x \sin k_x \cdot x$$

$$\text{en } x = 0 ; E_y = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \cdot k_x = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \text{et } k_x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{en } x = a ; E_y = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -B k_x \sin k_x \cdot a = 0 \\ \text{et } B \neq 0 \text{ car } H_z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_x \cdot a = m \pi$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{m \pi}{a} ; m \text{ entier}$$

$$E_x \sim \frac{\partial H_z}{\partial y} \sim \frac{\partial G}{\partial y} = ck_y \cos k_y \cdot y - Dk_y \sin k_y \cdot y$$

$$\text{en } y = 0 ; E_x = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow c \cdot k_y = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{en } y = b ; E_x = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} \Rightarrow \begin{cases} -Dk_y \cdot \sin k_y \cdot b = 0 \\ \text{et } D \neq 0 \text{ car } H_z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_y \cdot b = n\pi$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} ; n \text{ entier}$$

### III.3.1.2. Expression des composantes du champ E.M des modes $\mathbf{TE}_{mn}$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$$

avec  $H_0 = B \cdot D = \text{cste}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -j \frac{\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = +j \frac{\omega\mu}{k_t^2} H_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z} \\ E_y = j \frac{\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j \frac{\omega\mu}{k_t^2} H_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Et :

$$\Rightarrow \begin{cases} H_x = -j \frac{\beta_g}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = +j \frac{\beta_g}{k_t^2} H_0 \left( \frac{m\pi}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_g z} \\ H_y = -j \frac{\beta_g}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = j \frac{\beta_g}{k_t^2} H_0 \left( \frac{n\pi}{b} \right) \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_g z} \\ H_z = H_0 \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_g z} \end{cases}$$

L'introduction des conditions aux limites amène à un couple d'entiers (m,n). On parle ainsi de modes  $TE_{mn}$  susceptibles de se propager dans le guide d'onde.

Il faut aussi que  $m \neq 0$  et ou  $n \neq 0$  car si  $m = n = 0 \Rightarrow H_z = cste$  et toutes les autres composantes du champ électromagnétique seront nulles.

### III.3.1.3. Fréquence de coupure des modes $TE_{mn}$

On a trouvé auparavant:

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$\text{Or on sait qu'à la coupure } k_c = k_t = \pi \sqrt{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2}$$

$k_c$  est toujours positive et caractérise la fréquence de coupure (analogue à celle d'un filtre).

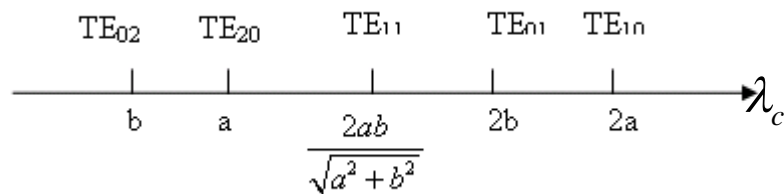
$$\text{Or } k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \Rightarrow \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2}}$$

$\lambda_c$  est la longueur d'onde de coupure des modes  $TE_{mn}$  du guide d'onde rectangulaire.

### III.3.1.4. Classement des modes $TE_{mn}$ du guide rectangulaire

Pour classer ces modes, on calcule leurs fréquences de coupures  $f_c$  (ou longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$ ) pour différents couples (m, n). Les premiers modes du guide d'onde métallique rectangulaire de dimension transversale (a,b), sont classés sur la figure III.5. Le premier mode est le mode  $TE_{10}$  si  $a > b$  ( $TE_{01}$  si  $b > a$ ), qui a la plus grande longueur d'onde de coupure, donc la plus petite fréquence de coupure.

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$



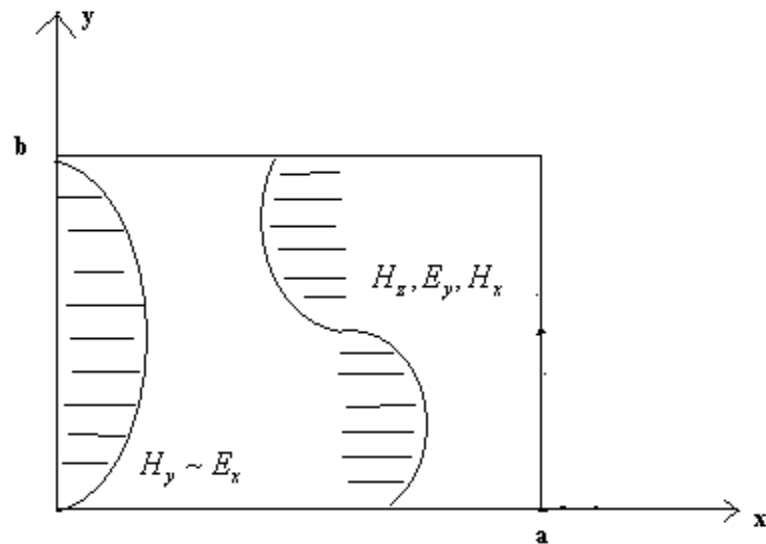
**Figure III.5.** Classement des modes  $TE_{mn}$  du guide d'onde rectangulaire

### III.3.1.5. Répartition du champ E.M du mode $TE_{01}$ dans le guide

A partir des expressions du champ électromagnétique pour un mode donné, on peut faire une première représentation théorique de la répartition de ce champ (figure III.6).

Mode  $TE_{01} \Rightarrow m = 0$  et  $n = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x \sim H_y \sim \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \\ E_y \sim H_x \sim \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right) \\ H_z \sim \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right) \\ H_z = 0 \end{cases}$$



**Figure III.6.** Représentation théorique du champ du mode  $TE_{01}$

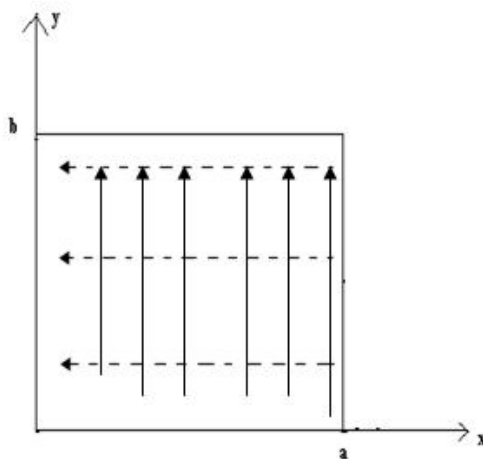
$m = 0 \Rightarrow$  Pas de variation du champ électromagnétique selon  $x$ .

$n = 1 \Rightarrow$  **Une seule** variation (ou une demi-onde) selon l'axe  $y$ , donc  $m$  et  $n$  représentent respectivement le nombre demi-onde selon les axes  $x$  et  $y$ .

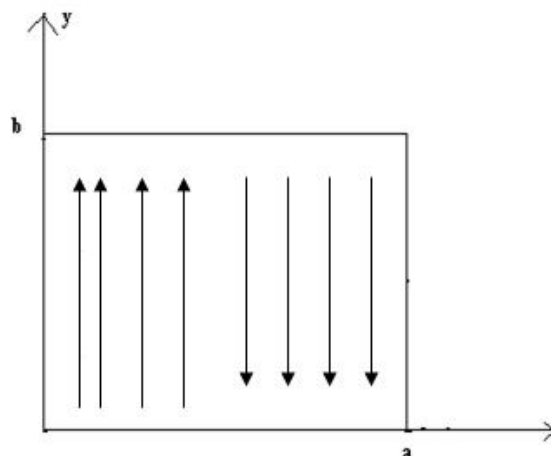
La représentation pratique du champ électromagnétique s'obtient à partir des équations suivantes plus complexes donnant les lignes de champ électrique et magnétique.

$$\begin{cases} \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \\ \frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} \end{cases}$$

Les figures III.7, III.8, III.9, III.10 et III.11 exposent les cartographies des ligne de champ E sur la section transversale du guide d'ondes de dimension (a,b).

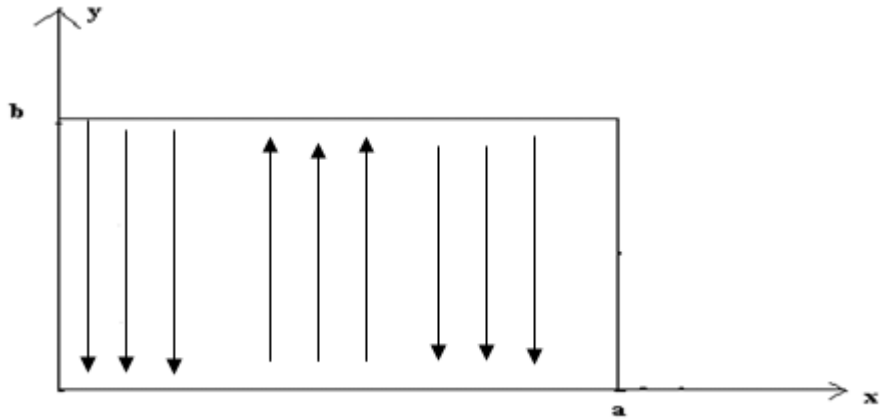


**Figure III.7.** Lignes des champs E (→) et H (-----→) du mode TE<sub>10</sub>

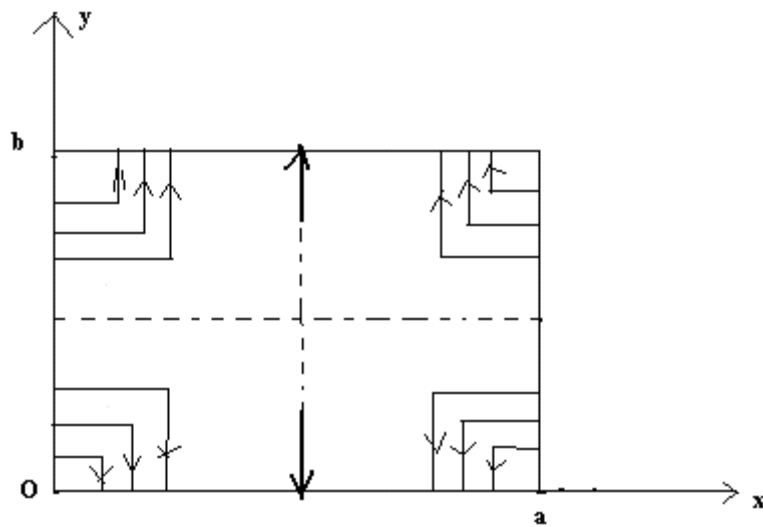


**Figure III.8.** Lignes de champ E du mode TE<sub>20</sub>

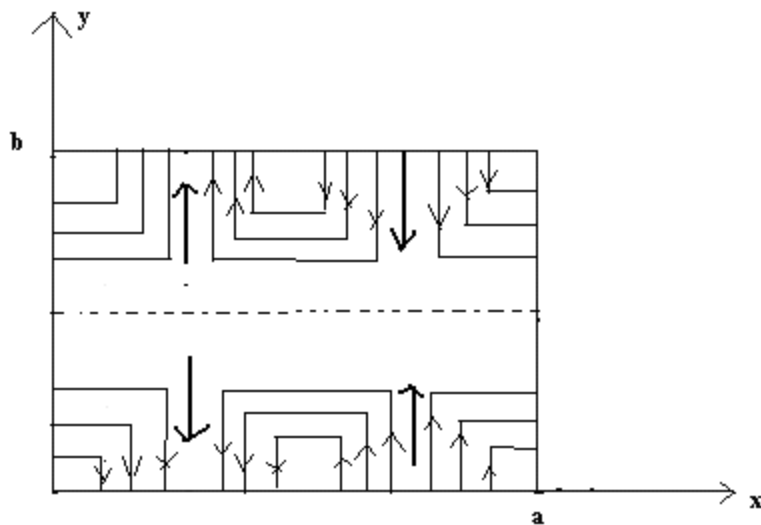
Les lignes de champ du mode TE<sub>01</sub>, s'obtiennent par inversion des axes ( $x \rightarrow y$ ) et ( $y \rightarrow x$ ).



**Figure III.9.** Lignes de champ ( $\rightarrow \vec{E}$ ) du mode  $TE_{30}$



**Figure III.10.** Lignes de champ ( $\rightarrow \vec{E}$ ) du mode  $TE_{11}$

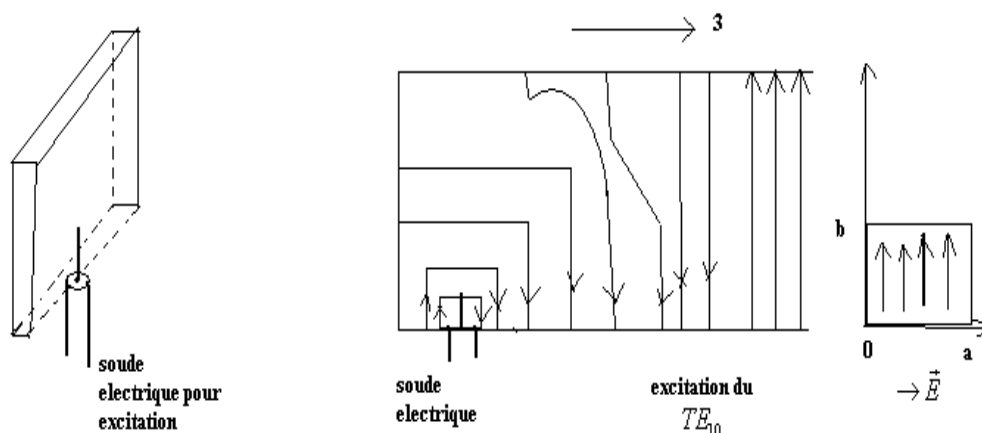


**Figure III.11.** Lignes de champ ( $\rightarrow \vec{E}$ ) du mode  $TE_{21}$

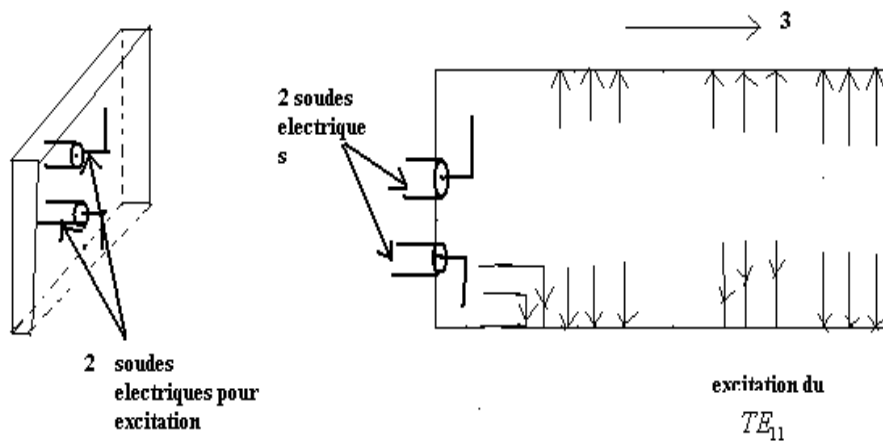
Les lignes de champ  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont perpendiculaires en tout point du guide suivant l'axe  $z$ . Le champ électromagnétique se propage en  $e^{-j\beta_g z}$  avec une longueur d'onde dans le guide  $\lambda_g$ .

### III.3.1.6. Excitation des guides en modes $TE_{mn}$

L'excitation du guide à partir d'une onde plane n'est pas pratique. On excite le guide en créant un champ électrique (petite antenne ou dipôle électrique) ou un champ magnétique (petite boucle ou boucle magnétique) là où le champ du mode considéré est intense. Les figures III.12 et III.13 montrent l'excitation respective par des dipôles électriques des modes  $TE_{10}$  et  $TE_{11}$  du guide d'ondes métallique rectangulaire.



**Figure III.12.** Excitation du mode  $TE_{10}$  du guide d'ondes rectangulaire



**Figure III.13.** Excitation du mode  $TE_{11}$  du guide d'ondes rectangulaire

### III.3.1.7. Courants sur les parois du guide

Le champ magnétique induit des courants sur les parois internes du guide, dont la densité superficielle vérifie la relation:

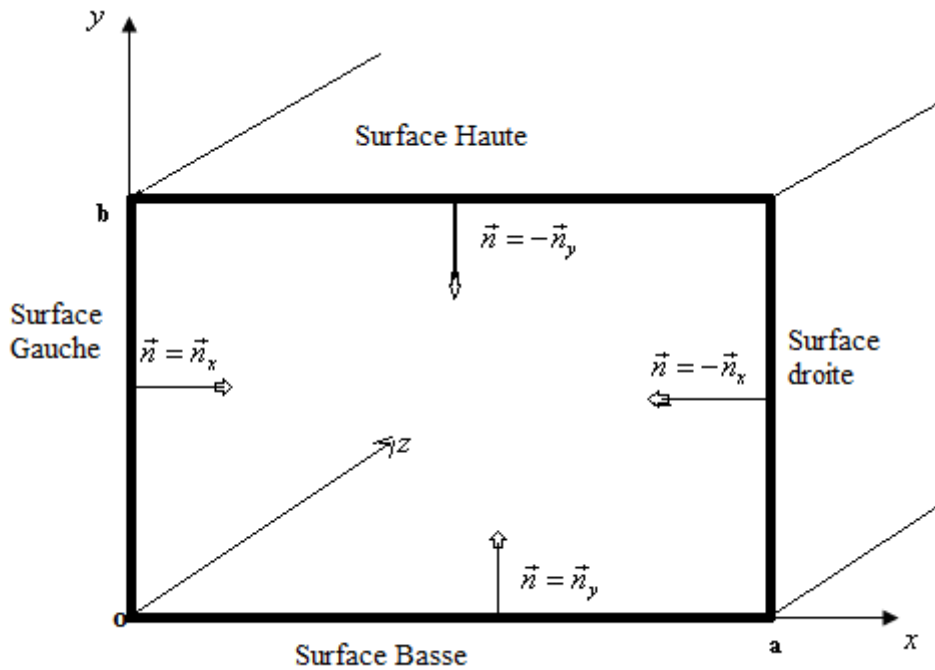
$\vec{H}_t = \vec{J}_s \times \vec{n}$  ou  $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_t$ ;  $\vec{n}$  étant la normale à la surface métallique considérée.

Nous avons quatre surfaces métalliques (Figure III.14) sur lesquelles il faut calculer les courants:

- Deux surfaces planes définies par les plans  $(x, 0, z)$  et  $(x, b, z)$ .
- Deux surfaces latérales définies par les plans  $(0, y, z)$  et  $(a, y, z)$ .

Le courant total sur les conducteurs est la somme des courants sur chaque paroi.

$$I = \iint_{S_{basse}} \vec{J}_{s_1} \cdot \vec{n} ds + \iint_{S_{haute}} \vec{J}_{s_2} \cdot \vec{n} ds + \iint_{s\ gauche} \vec{J}_{s_3} \cdot \vec{n} ds + \iint_{S\ droite} \vec{J}_{s_4} \cdot \vec{n} ds$$



**Figure III.14.** Localisation des surfaces métalliques du guide

### III.3.1.8. Puissance moyenne

Pour un mode  $TE_{mn}$ , se propageant dans un guide d'onde métallique rectangulaire, la puissance moyenne transportée dans la direction  $oz$  est:

$$P_{mn} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \oiint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z \, ds \right) \quad , \text{ où } S \text{ est la section transversale du}$$

guide et  $ds = dx \, dy$

Cette puissance moyenne s'écrit encore sous la forme suivante.

$$P_{mn} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^a \int_0^b (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^a \int_0^b (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \right)$$

Ce qui s'écrit encore : 
$$P_{mn} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^a \int_0^b (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \right)$$

or 
$$Z_{TE_{mn}} = \frac{|E_x|}{|H_y|} = \frac{|E_y|}{|H_x|} = \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{H}_t|} \Rightarrow P_{mn} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_{TE_{mn}}) \int_0^a \int_0^b |\vec{H}_t|^2 dx dy$$

$$\Rightarrow P_{mn} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_{TE_{mn}}) \int_0^a \int_0^b (H_x \cdot H_x^* + H_y \cdot H_y^*) dx dy$$

Si on remplace  $H_x$  et  $H_y$  par leurs expressions (pour le mode  $TE_{mn}$ ) et on utilise les résultats des intégrales suivantes, on obtient finalement l'expression générale de la puissance moyenne transportée par un mode  $TE_{mn}$ .

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dx dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dx dy$$

$$= \begin{cases} \frac{ab}{4} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \frac{ab}{2} & \text{si } m \text{ ou } n = 0 \end{cases}$$

Si  $m$  ou  $n=0$  (exemple du mode  $TE_{10}$ ,  $m=1$  ;  $n=0$ ), on trouve :

$$P_{TE_{mn}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} ab H_0^2 \right) \frac{\beta_g^2}{k_c^4} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \operatorname{Re} (Z_{TE_{mn}})$$

$$= \frac{ab H_0^2}{4} \frac{\beta_g^2}{k_c^4} \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \operatorname{Re} (Z_{TE_{mn}})$$

$$\text{or } k_c = \pi \sqrt{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2}$$

$$\Rightarrow P_{TE_{mn}} = \frac{ab H_0^2}{4} \left( \frac{\beta_g^2}{k_c^2} \right) \operatorname{Re} (Z_{TE_{mn}}) \quad \text{or } Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta_g}$$

$$\Rightarrow P_{TE_{mn}} = \frac{\omega \mu H_0^2 a b \beta_g}{4k_c^2}$$

### III.3.2. Propagation des modes TM dans le guide d'onde rectangulaire

Le même principe de calcul est exploité pour l'étude des modes TM caractérisés ici par la composante longitudinale  $H_z$  nulle. Dans ce cas, il faut calculer  $(E_x, E_y, H_x, H_y)$  en fonction de  $E_z$ .

On obtient aussi des modes  $TM_{mn}$  dont le champ électromagnétique est décrit par les expressions suivantes.

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$E_x = -j \frac{\beta_g}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j \frac{\beta_g}{k_c^2} E_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$E_y = -j \frac{\beta_g}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -j \frac{\beta_g}{k_c^2} E_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$H_x = j \frac{\omega \varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = +j \frac{\omega \varepsilon}{k_c^2} E_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$H_y = -j \frac{\omega \varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j \frac{\omega \varepsilon}{k_c^2} E_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$H_z = 0$$

Pour les modes  $TM_{mn}$ , il faut que  $m \neq 0$  et  $n \neq 0$ , car si  $m$  ou  $n$  est nulle alors  $E_z$  est nulle et tout le champ électromagnétique sera nul.

- la longueur d'onde de coupure est :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

- si  $\lambda > \lambda_c \Rightarrow f < f_c \Rightarrow$  pas de propagation  $\Rightarrow$  évanescence.
- si  $f_c < f < 1.25 f_c \Rightarrow$  propagation avec distorsion.
- si  $1.25 f_{c_1} < f < f_{c_2} \Rightarrow$  propagation sans distorsion du mode fondamental (ou dominant).

Le mode dominant des modes  $TM_{mn}$  est le  $TM_{11}$ , caractérisé par une longueur d'onde de coupe, donnée par:

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- **Représentation du champ électromagnétique du mode  $TM_{11}$**

Les expressions du champ électromagnétiques montrent les variations suivantes des champs électrique et magnétique.

$$E_y \sim H_x \sim \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

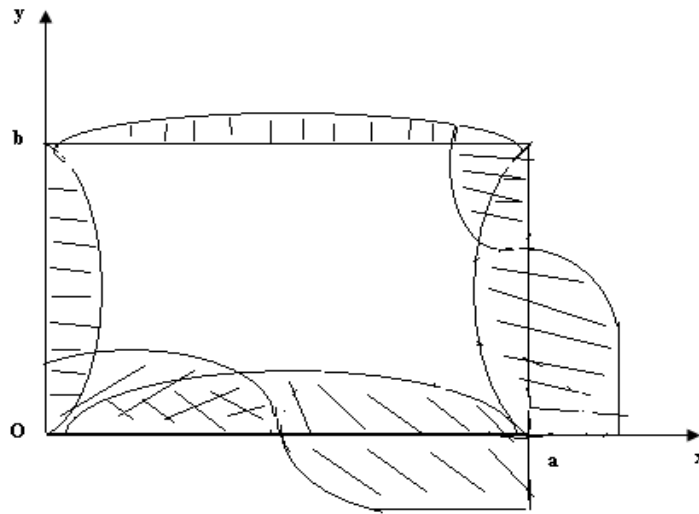
$$E_x \sim H_y \sim \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

$$H_z = 0$$

$$E_z \sim \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

Ces variations donnent la cartographie du mode  $TM_{11}$ , représentée sur la figure III.15.

Cette représentation est théorique car tous les champs doivent être à l'intérieur du guide.



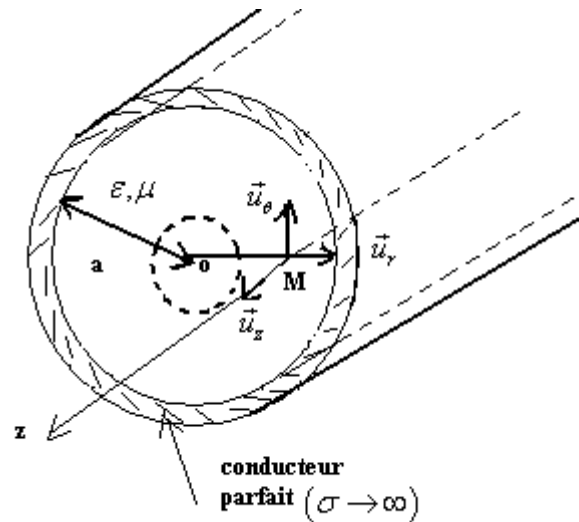
**Figure III.15.** Cartographie du mode  $TM_{11}$

Pour le mode  $TM_{11}$ , on a  $m=1$  et  $n=1$ , c'est-à-dire un extremum du champ selon  $ox$  et un extremum selon  $oy$ . Cette remarque peut être généralisée au mode  $TM_{mn}$ , où les entiers  $m$  et  $n$  vont désigner respectivement le nombre de demi-ondes suivant  $ox$  et  $oy$ .

### **III.4. Guide d'onde cylindrique sans pertes**

#### **III.4.1. Définition et géométrie**

On considère un guide d'onde dont la section droite est un cercle de rayon  $a$ , invariante dans la direction de propagation, considérée  $oz$  tout au long de notre étude (figure III.16).



**Figure III.16.** Structure du guide d'ondes métallique cylindrique

Par suite de la symétrie circulaire, le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est le mieux approprié pour étudier cette structure.

### III.4.2. Détermination des composantes du champ électromagnétique

Le guide circulaire peut propager des modes TE et TM, caractérisés par des composantes longitudinales spécifiques:

$$TE \Rightarrow E_z = 0 \text{ et } H_z \neq 0$$

$$TM \Rightarrow E_z \neq 0 \text{ et } H_z = 0$$

On va donc déterminer les composantes transversales (dans le plan  $(r, \theta)$ ), définies par  $(E_r, E_\theta, H_r, H_\theta)$  en fonction des composantes longitudinales  $(E_z, H_z)$

En partant des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , on obtient :

$$E_r = -\frac{j}{k_c^2} \left[ j\beta_g \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right]$$

$$E_\theta = -\frac{j}{k_c^2} \left[ \frac{\beta_g}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right]$$

$$H_r = -\frac{j}{k_c^2} \left[ -\frac{\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + \beta_g \frac{\partial H_z}{\partial r} \right]$$

$$H_\theta = -\frac{j}{k_c^2} \left[ \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta_g}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right]$$

$k_c^2 = k^2 - \beta_g^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \beta_g^2 = k_t^2$ , où  $k_c$  est la constante de propagation transversale de coupure,  $\beta_g$  est la constante de propagation longitudinale et  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  représente la constante de propagation dans le milieu  $\varepsilon, \mu$ .

Les composantes  $E_z$  et  $H_z$  sont déterminées à partir des équations d'onde ou équations de Helmholtz vectorielles suivantes.

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

Ces équations restent valables pour chacune des composantes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , en particulier les composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ .

L'équation d'onde généralisée, s'écrit alors:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 \psi + (k^2 - \beta_g^2) \psi = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 \psi + k_c^2 \psi = 0$$

Avec  $k_c^2 = k^2 - \beta_g^2$ ;  $\nabla_t^2$  est le Laplacien transversal.

On va ensuite résoudre cette équation en coordonnées cylindriques pour déduire la solution de la fonction  $\psi$ .

### III.4.3. Résolution de l'équation d'onde en coordonnées cylindriques

$$\nabla_i^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

d'où

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_c^2 \psi = 0$$

On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation. Cela, consiste à écrire cette fonction de la manière suivante.

$$\psi(r, \theta, z, t) = \psi = R(r) \cdot T(\theta) \cdot e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t}$$

Où  $e^{-j\beta_g z}$  représente une propagation suivant  $z > 0$ ,  $R(r)$  et  $T(\theta)$  sont des fonctions indépendantes. L'introduction de ce développement dans l'équation d'onde précédente donne :

$$T \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} T \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} R \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k_c^2 R \cdot T = 0$$

On multiplie ensuite cette quantité par  $\frac{r^2}{RT}$  ; ce qui donne :

$$\underbrace{\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 k_c^2}_{= G(r) \text{ dépendant de } r} + \underbrace{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}}_{= F(\theta) \text{ dépendant de } \theta} = 0$$

Soit  $G(r) + F(\theta) = 0$  ; d'où  $G(r)$  et  $F(\theta)$  sont égaux à une même constante mais de signe opposé.

Ainsi on pose :  $F(\theta) = -m^2$  et  $G(r) = +m^2$  ; avec  $m$  un entier.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = -m^2 ; m \text{ entier} \\ \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 k_c^2 = +m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + m^2 T = 0 \Rightarrow T(\theta) \text{ est une fonction périodique} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left( k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \text{ est une équation de BESSEL} \\ \text{qui admet pour solution des fonctions de BESSEL} \end{cases}$$

D'où

$$T(\theta) = \begin{cases} \cos(m\theta + \varphi_0) \\ \text{ou} & \text{si } m \neq 0 \\ \sin(m\theta + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\text{Si } m=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = \text{cste} \Rightarrow T(\theta) = C\theta + D(\text{linéaire}) ;$$

Avec C et D sont des constantes.

Or si  $\theta$  augmente  $\Rightarrow T(\theta)$  augmente linéairement  $\Rightarrow$  ce qui est une solution impossible car la périodicité azimutale du champ électromagnétique n'est plus respectée. Donc il faut que **C=0**.

D'où  $T(\theta) = D$  si  $m=0$  et D est une constante

La fonction R(r) est une fonction de Bessel, donnée par les expressions suivantes.

$$R(r) = \begin{cases} A J_m(k_c \cdot r) + A' N_m(k_c \cdot r) & \text{si } k_c \text{ est réel} \\ B K_m(|k_c| r) + B' I_m(|k_c| r) & \text{si } k_c \text{ est imaginaire} \end{cases}$$

A, A', B et B' sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites du problème.  $J_m$  et  $N_m$  sont des fonctions de Bessel d'ordre  $m$ .  $K_m$  et  $I_m$  sont des fonctions de Bessel modifiées d'ordre  $m$ .

On pose  $A'=B'=0$  car ce ne sont pas des solutions physiques pour notre problème d'étude. On ne tiendra compte que de la fonction de Bessel  $J_m$  (figure III.17) dans la suite, puisqu'on considère une propagation de l'onde suivant  $r$  aussi. D'où finalement :

$$\psi(r, \theta, z, t) = \psi = \Psi_0 J_m(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\theta \\ \text{ou} \\ \sin m\theta \end{array} \right.$$

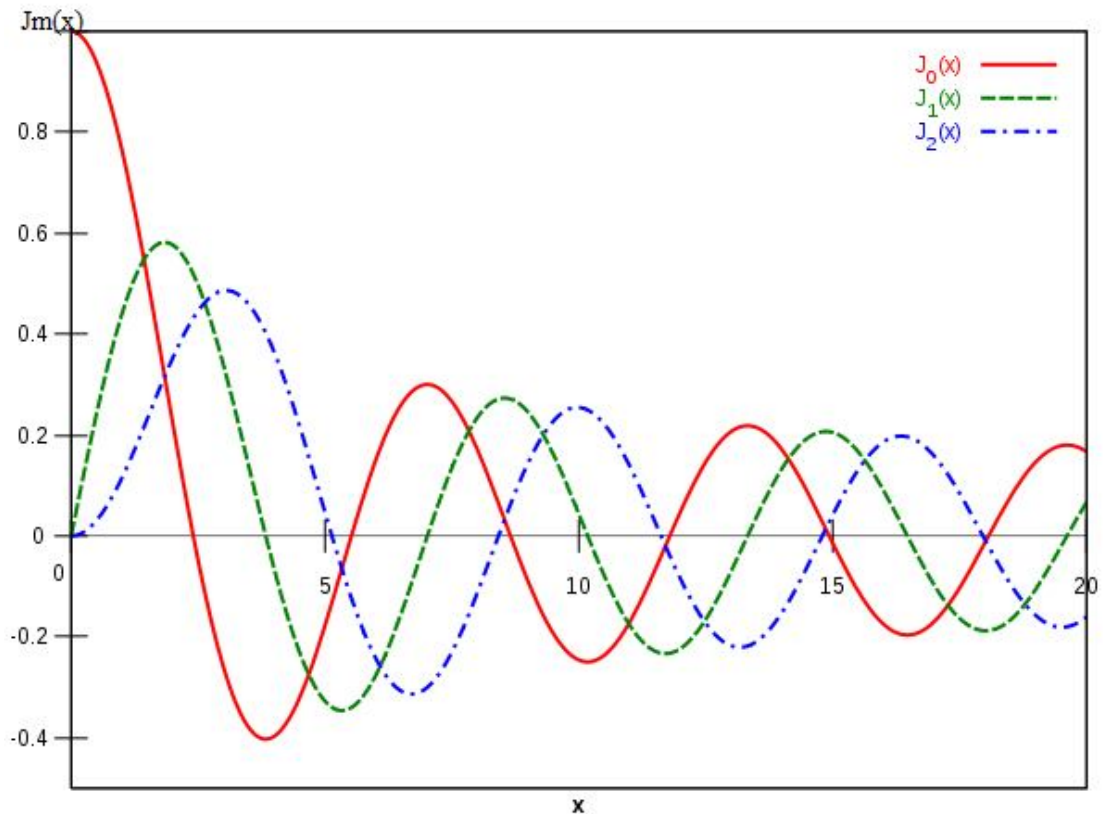


Figure III.17. Variation de la fonction de Bessel  $J_m(x)$

### III.4.4. Modes TE<sub>mn</sub> du guide cylindrique

Les modes TE<sub>mn</sub> sont caractérisés par  $E_z = 0$  et une composante  $H_z$  de la

$$\text{forme : } H_z = H_0 J_m(k_c \cdot r) \cos m\theta e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t}$$

Les expressions des différentes composantes du champ électromagnétique, sont ensuite déduites des **équations fondamentales de propagation**.

On trouve, lorsque  $m=0$ , les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_r = 0 \\ E_\theta = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} H_0 J_0'(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} \\ H_z = H_0 J_0(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} \\ H_r = \frac{-j\beta_g}{k_c^2} H_0 J_0'(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} \\ H_\theta = 0 \end{array} \right.$$

Où  $J_0'(k_c \cdot r)$  est la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Ce champ électromagnétique doit vérifier les conditions aux limites, sur les faces internes, localisées à  $r = a$ , des parois métalliques du guide cylindrique.

$$E_\theta(r = a) = E_z(r = a) = H_r(r = a) = 0$$

$$\text{Soit : } E_\theta(r = a) = 0 \Rightarrow J_0'(k_c \cdot a) = 0 \Rightarrow k_c \cdot a = x'_{on} = n^{\text{ème}} \text{ zéro}$$

de la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre zéro.

$$\text{D'où : } k_c = \frac{x'_{on}}{a}$$

Dans le cas général d'un mode  $TE_{mn}$ , on trouve  $k_c = \frac{x'_{mn}}{a}$  où  $x'_{mn}$  est le  $n^{\text{ème}}$  zéro de la première dérivée de la fonction du Bessel d'ordre  $m$ .

Sachant que  $n$  indique le numéro des zéros (racines) de la fonction  $J'_m$ , donc  $n$  doit être non nul.

m \ n	1	2	3
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970
3	4.201	8.015	11.346

**Tableau III.1.**  $x'_{mn} = n^{\text{ème}}$  zéro de la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre  $m$ .

A la coupure, on a :  $\beta_g = 0 \Rightarrow \beta_g = \sqrt{k^2 - k_c^2} = 0$

$$\Rightarrow k = k_{c_{TE_{mn}}} = \frac{x'_{mn}}{a} = \frac{2\pi}{\lambda_{c_{TE_{mn}}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{c_{TE_{mn}}} = \frac{2\pi a}{x'_{mn}}$$

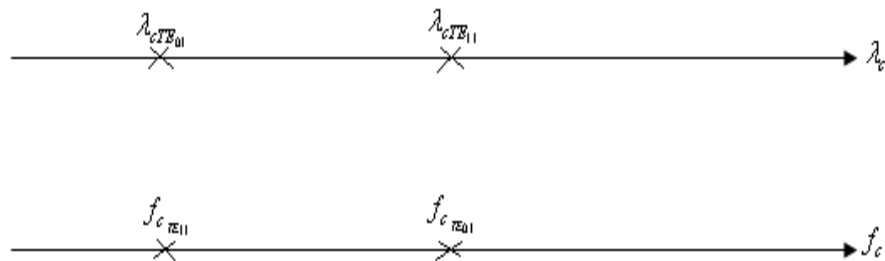
**Exemple:**

$$*\text{mode } TE_{01} \Rightarrow m=0 ; n=1 \Rightarrow \lambda_{c_{TE_{01}}} = \frac{2\pi a}{x'_{01}} = \frac{2\pi a}{3.832}$$

$$*\text{mode TE}_{11} \Rightarrow m=n=1 \Rightarrow \lambda_{c_{TE_{11}}} = \frac{2\pi a}{x_{11}} = \frac{2\pi a}{1.841}$$

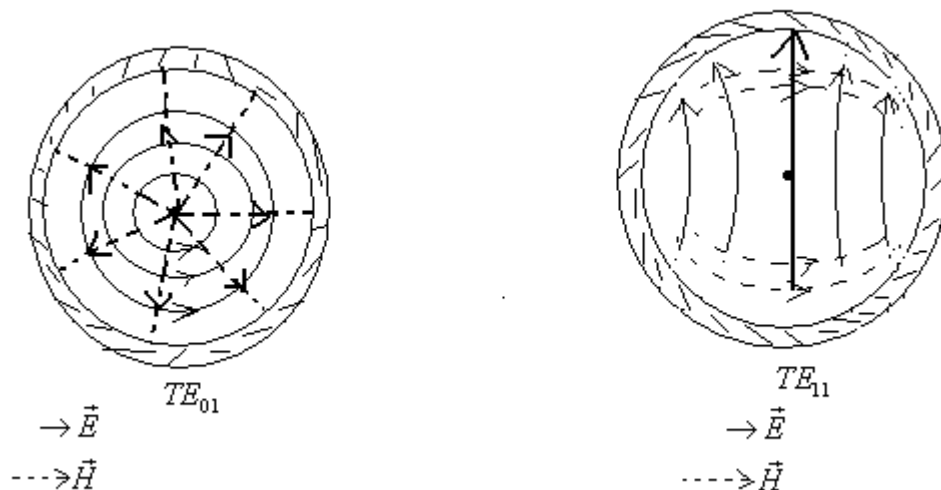
D'où :  $\lambda_{c_{TE_{11}}} > \lambda_{c_{TE_{01}}}$

Le classement des premiers modes  $\text{TE}_{mn}$  est montré sur la figure III.18.



**Figure III.18.** Classement des premiers modes  $\text{TE}_{mn}$  du guide cylindrique

La représentation des lignes de champs sur le plan  $(r, \theta)$  de plusieurs modes est schématisée sur la figure III.19.



**Figure III.19.** Cartographie des premiers modes  $\text{TE}_{mn}$  du guide cylindrique

Cette représentation des lignes de champ, montre, comme pour les guides rectangulaires, que les indices  $m$  et  $n$  désignent ici respectivement le nombre de demi-ondes suivant  $\theta$  et  $r$ .

### III.4.5. Modes $TM_{mn}$ du guide cylindrique

Les modes  $TM_{mn}$  sont caractérisés par la composante  $H_z=0$  et la composante  $E_z$  du champ électrique, traduite par l'expression suivante :

$$E_z = E_0 J_m(k_c \cdot r) \cos m\theta e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t}$$

Comme pour les modes  $TE_{mn}$ , on déduit les expressions du champ électromagnétique restant. Lorsque  $m=0$ , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{-j\beta_g}{k_c^2} E_0 J_0'(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} \\ E_\theta = 0 \\ E_z = E_0 J_0(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} \\ H_r = 0 \\ H_\theta = \frac{-j\varepsilon\omega}{k_c^2} E_0 J_0'(k_c \cdot r) e^{-j\beta_g z} \\ H_z = 0 \end{array} \right.$$

Les champs des modes TM doivent vérifier également les conditions aux limites sur les faces internes (en  $r=a$ ) des parois métalliques du guide cylindrique.

$$E_\theta(r=a) = E_z(r=a) = H_r(r=a) = 0$$

Soit

$$E_z(r=a) = 0 \Rightarrow J_0(k_c \cdot a) = 0 \Rightarrow k_c \cdot a = x_{0n}$$

D'où l'on déduit :  $k_c = \frac{x_{on}}{a}$

Soit dans le cas général des modes  $TM_{mn}$  ;  $k_c = \frac{x_{mn}}{a}$  ; où  $x_{mn}$  est le  $n^{\text{ème}}$  zéro de la fonction de Bessel d'ordre  $m$ . l'entier  $n$  est par conséquent différent de zéro ( $n \neq 0$ )

Le tableau III.2 donne les premières valeurs de la  $n^{\text{ème}}$  racine ( $x_{mn}$ ) de la fonction de Bessel d'ordre  $m$ .

n \ m	1	2	3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.136	8.417	11.620
3	6.380	9.761	13.015

**Tableau III.2.**  $n^{\text{ème}}$  racine ( $x_{mn}$ ) de la fonction de Bessel d'ordre  $m$

A la coupure d'un mode, on écrit :  $\beta_g = 0 \Rightarrow \beta_g = \sqrt{k^2 - k_c^2} = 0 \Rightarrow k = k_c = \frac{x_{mn}}{a}$

Or  $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \Rightarrow \lambda_{cTM_{mn}} = \frac{2\pi a}{x_{mn}}$

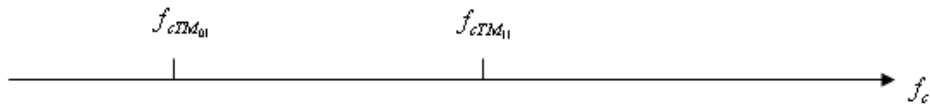
$\lambda_{cTM_{mn}}$  est la longueur d'onde de coupure des modes  $TM_{mn}$  du guide d'onde cylindrique.

**Exemples:**

\* mode  $TM_{01} \Rightarrow m=0$  et  $n=1 \Rightarrow \lambda_{cTM_{01}} = \frac{2\pi a}{x_{01}} = \frac{2\pi a}{2.405}$

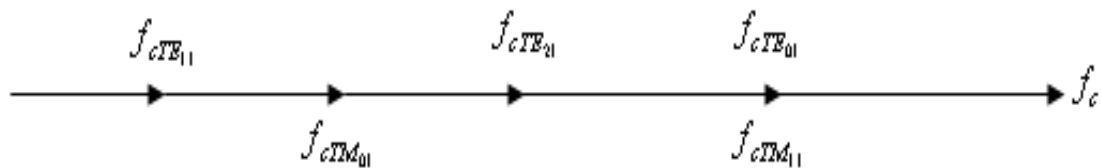
\* mode  $TM_{11} \Rightarrow m=n=1 \Rightarrow \lambda_{c_{TM_{11}}} = \frac{2\pi a}{x_{11}} = \frac{2\pi a}{3.832}$

Le classement des premiers modes  $TM_{mn}$  est établi sur la figure III.20.



**Figure III.20.** Classement des premiers modes  $TM_{mn}$   
du guide cylindrique

Le mode  $TM_{01}$  est le premier mode des modes  $TM_{mn}$  du guide d'onde cylindrique de rayon **a**. Par contre, il se trouve après le mode  $TE_{11}$  du même guide (Figure III.21).



**Figure III.21.** Classement des premiers modes  $TE_{mn}$  et  $TM_{mn}$   
du guide cylindrique

Le mode fondamental (ou dominant) du guide d'ondes cylindrique de rayon **a** est le mode  $TE_{11}$  ayant pour longueur d'onde de coupure :

$$\lambda_{c_{TE_{11}}} = \frac{2\pi a}{x_{11}}$$

La bande utilisable du guide cylindrique est située entre les fréquences de coupure des modes  $TE_{11}$  et  $TM_{01}$ .

La longueur d'onde du guide  $\lambda_g$ , du mode dominant  $TE_{11}$  est obtenue à l'aide de l'expression suivante :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_{TE_{11}}}}\right)^2}} ; \text{ Soit } \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(0.293 \frac{\lambda}{a}\right)^2}}$$

$$\text{et } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{f\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c_0}{f\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

Avec  $c_0=3.10^8$  m/s =vitesse de la lumière dans le vide (air).

### III.5. Atténuation dans les guides d'ondes avec pertes

Nous présentons dans ce paragraphe, une méthode de détermination du facteur d'affaiblissement d'un guide ou d'une ligne de transmission.

Considérons un guide (ou un tronçon de ligne) de longueur infiniment petite dz. Appelons  $P_0$ , la puissance active entrante et  $(P_0+dP)$ , la puissance active sortante (avec  $dP<0$ ) car dP représente la puissance perdue (pertes) le long du guide (ou tronçon de ligne). Nous savons que la puissance P, transportée dans le guide, est proportionnelle au carré du champ magnétique  $\left(P \sim \vec{H}_t \vec{H}_t^* = |\vec{H}_t|^2\right)$ , comme toute puissance transportée par une onde.

Les pertes dP, proportionnelles au carré des courants, sont donc aussi proportionnelles au carré du champ magnétique  $(\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_t)$ .

Finalement, on peut écrire que le rapport  $\frac{dP}{P}$  est égal à une constante à une position z donnée, et posons  $\frac{dP}{P} = -2\alpha dz$ . On en déduit que

$P = P_0 e^{-2\alpha z}$  et comme  $(P \sim |\vec{H}_t|^2)$  ; il en résulte que  $|\vec{H}_t| = H_0 e^{-\alpha z}$  ;  $\alpha$  étant le facteur d'affaiblissement.

Considérons maintenant un tronçon de ligne (ou guide d'onde) de longueur 1m. Désignons par  $P_0$  la puissance à l'entrée et  $P$  la puissance à la sortie, avec  $dP = (P - P_0)$  représentant les pertes. En utilisant la loi précédente, on peut écrire la relation  $P = P_0 e^{-2\alpha(1)}$  et si le dispositif est à faibles pertes ( $\alpha$  faible), ceci peut se traduire sous la forme :  $P \approx P_0(1 - 2\alpha)$ .

D'où l'on déduit finalement :  $\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{(P_0 - P)}{P_0} = \frac{1}{2} \frac{dP}{P_0}$

En conclusion, pour calculer le facteur d'affaiblissement  $\alpha$ , on détermine pour une puissance d'entrée  $P_0$ , les pertes  $dP$  sur une longueur 1 du guide (ou ligne). La dernière relation donnant  $\alpha$  permettra le calcul de cet affaiblissement, généralement exprimé en dB/m.

$$2\alpha \text{ (dB/m)} = 20 \log \left( \frac{dP}{P_0} \right) \text{ d'où } \alpha \text{ (dB/m)} = 10 \log \left( \frac{dP}{P_0} \right)$$