Traitement de Signal

Série de fourier

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi f_0 t]$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0/2} s(t) \cos \pi n f_0 t \, dt \qquad n = 0, 1, 2$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0/2} s(t) \sin \pi n f_0 t \, dt \qquad n = 1, 2, 3$$

* $a_0/2$ est valeur moyenne ou la composante de signal.
* $n f_0$ $(n > 0)$ les harmonique.

$$s(t) = \sum \alpha_n e^{j 2\pi n f_0 t}$$

avec : $\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j 2\pi n f_0 t} dt$

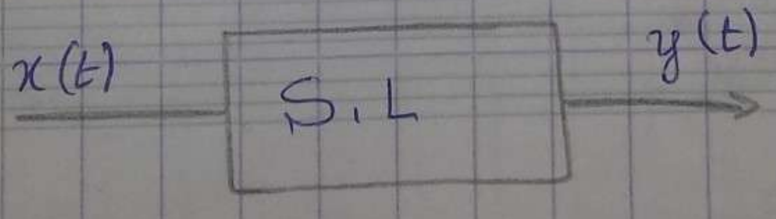
. Corélation :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t-\tau) \, dt$$

Tf

$$R_{xy}(f) = x(f) * y(f)$$

. Convolution



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h(t-\tau)\, dt$$

TF

$$y(f) = x(f) \cdot H(f)$$

$\Rightarrow$ Transformmée de fourier :

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

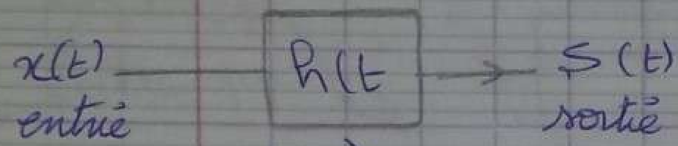
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

Théorème de Percevelle

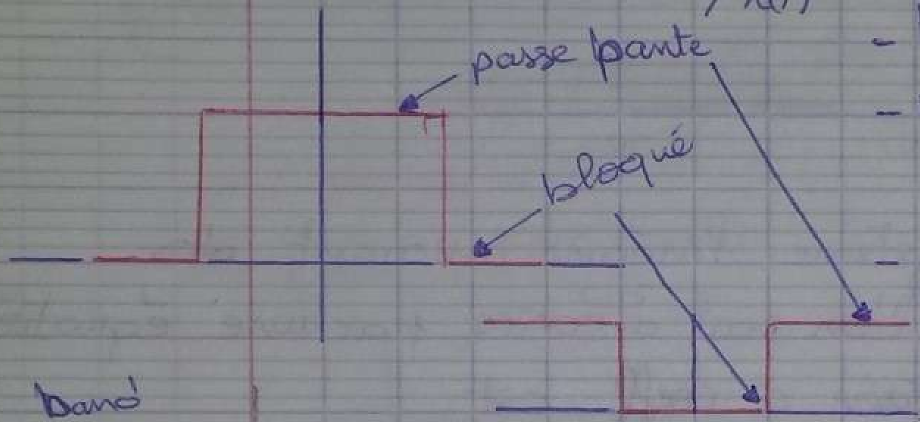
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)|^2\, df$$

Chapiter (2) Analyse les filtre analogiques

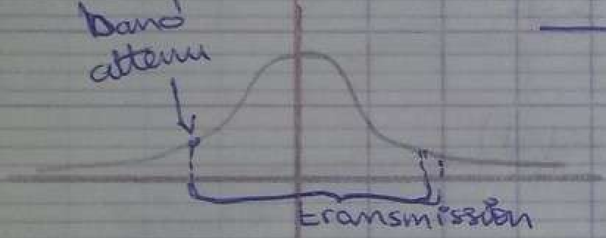
Introduction



$$H(p) = y(P) / x(P)$$



- $h(t)$ = implussement.
- $H(w)$ = réponse. fréquentielle dans laplace.
- $H(P)$ = fct transfert.
- $y(t)$ = produit de convolution
- w_c = fréquence de coupure



$$y(t) = e(t) * h(t)$$

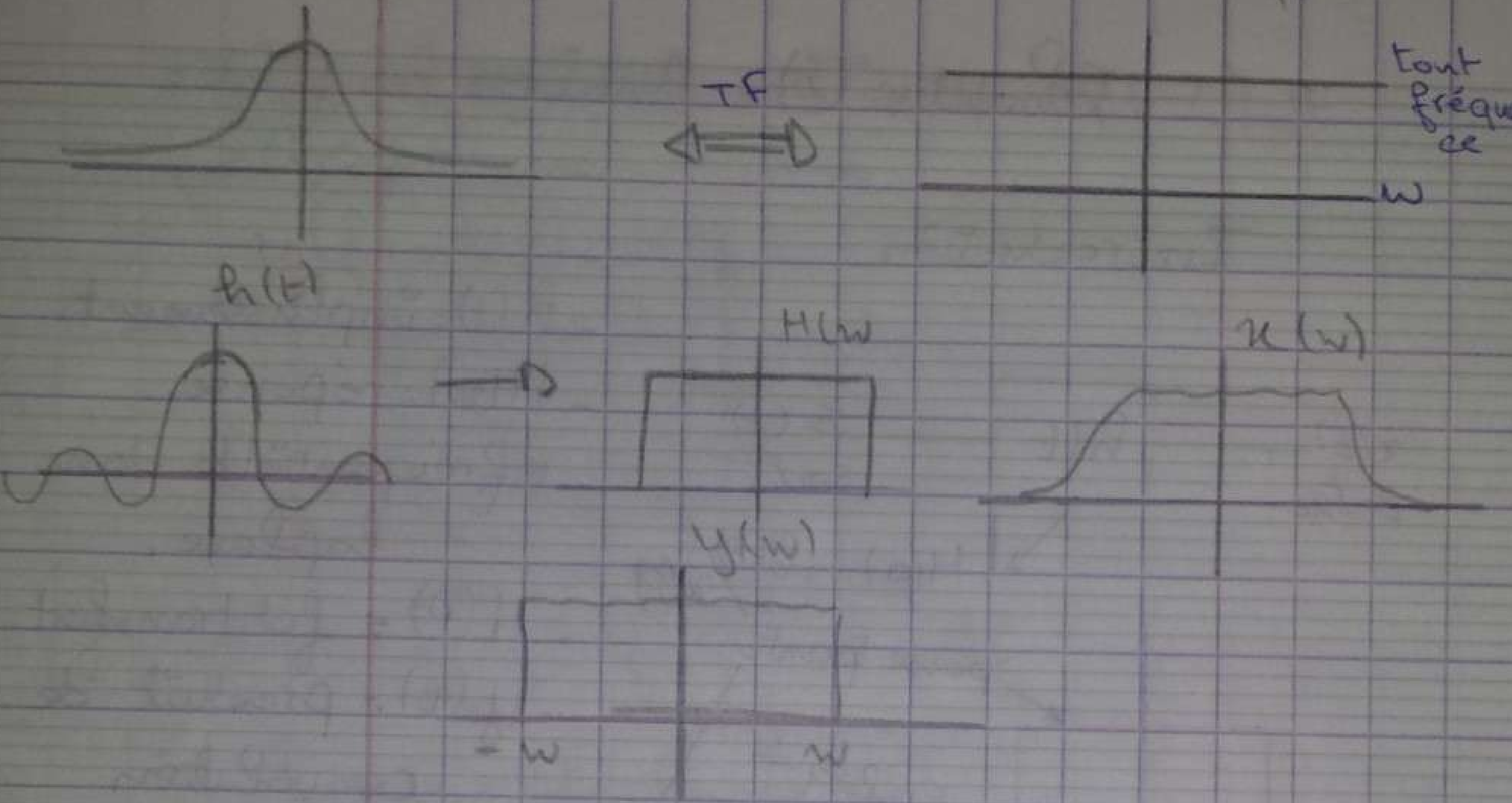
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$\xrightarrow{TF}$ $y(w) = x(w) \cdot H(w)$

Si: $x(t) = \delta(t) = 1$ dirac $\rightarrow y(w) = 1 \cdot H(w) = H(w)$

$\downarrow TF^{-1}$

$y(t) = h(t)$



filtre est un système linéaire invariant des le temps que l'on peut d'écrire par une équation defférentielle linéaire à coeff cst.

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

réponse impulsionnelle.

- Deux type de filtre : { filtre analogique / filtre numérique.

* 2 type de filtre analogique :

1) filtre passifs : le filtre construit que les élément pasif RLC

2) filtre actif : en plus du élément passifs, le circuit

Si $x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$

– Deux types de filtre :

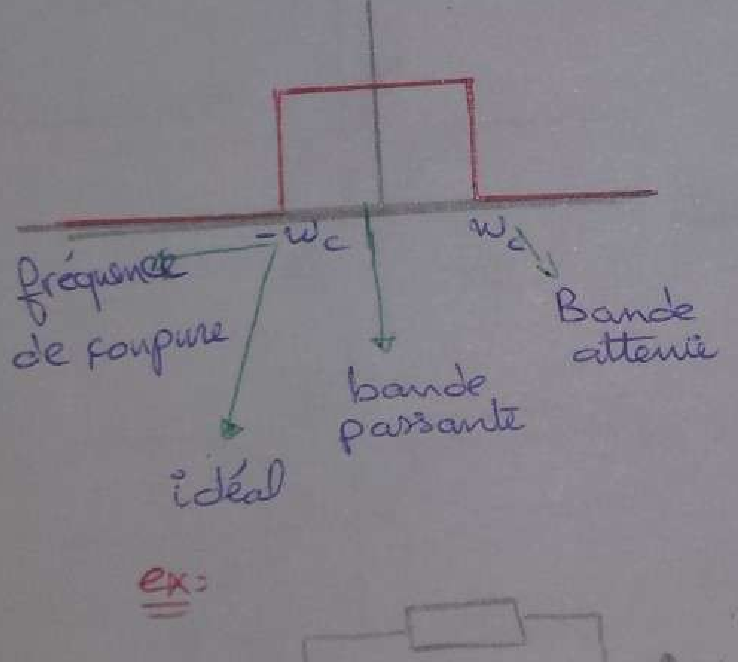
- filtre analogique.
- filtre numérique.

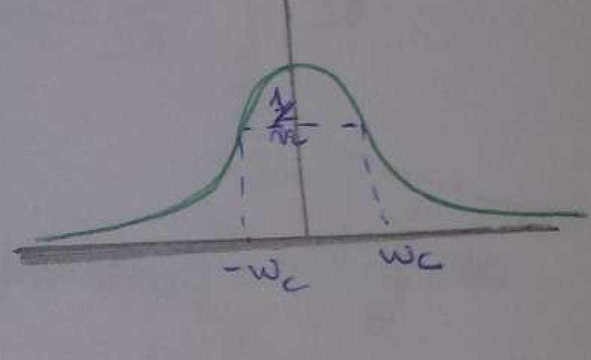
Deux types de filtre analogique :

filtre passif : le circuit contient les élement passifs (R.L.C)

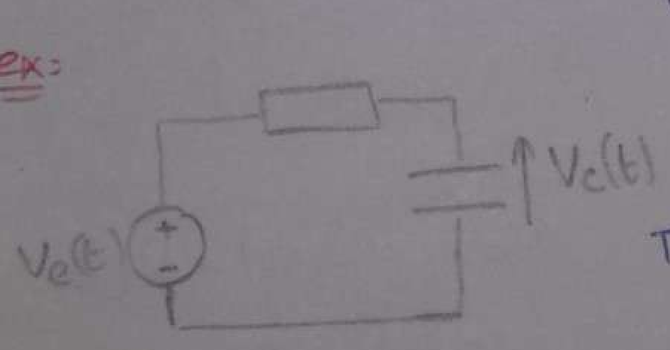
filtre actif : En plus des élement passifs le circuit comportes des transistors des amplis OP.

2) filtre passe-bas :





ex :



$$V_e(t) = R_C i_C(t) + V_C(t)$$
$$= RC\frac{dV_c}{dt} + V_c(t)$$

$$\downarrow \text{TF}$$

$$V_e(w) = R_C(jw)V_c(w) + V_c(w)$$

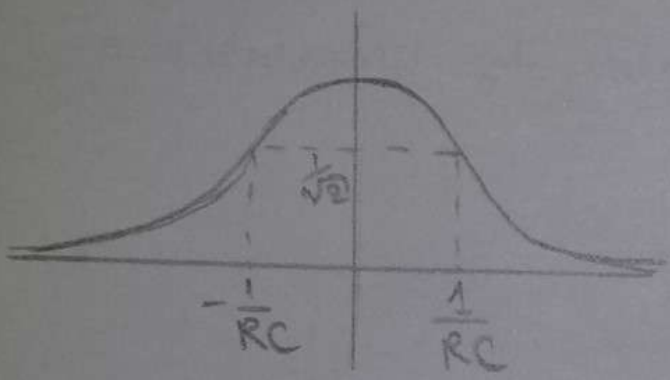
(5)

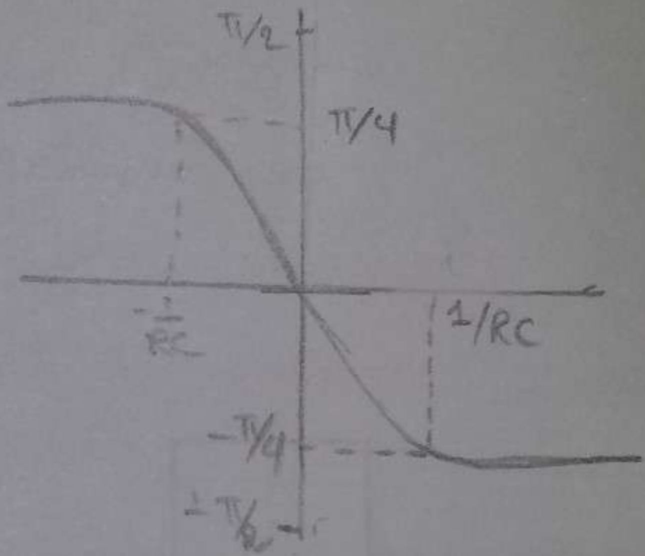
$$\Rightarrow \quad H(w) = \frac{V_c(w)}{V_e(w)} = \frac{1}{1+jRCw}$$

$$A(w) = |H(w)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RCw)^2}}$$

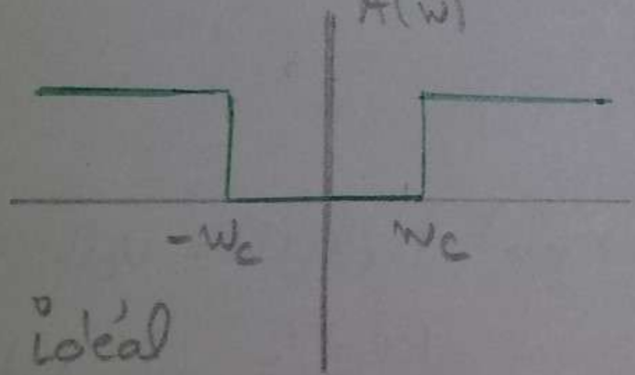
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (pour trouver w_c)

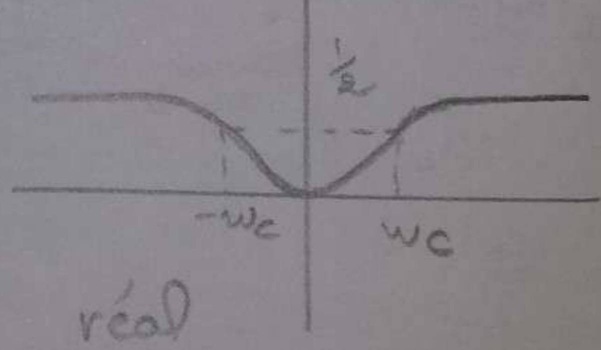
$$\Phi(w) = \arg(H(w)) = -\operatorname{arctg}(jRCw)$$



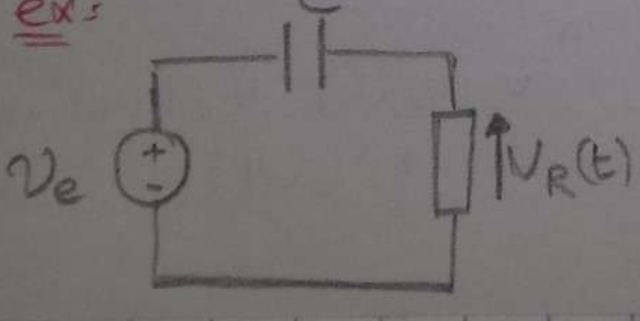


• filtres passe-haute :





ex :



$$v_e(t) = v_c(t) + R_c(t)$$

$$= \frac{1}{C}\int i_R(t) + v_R(t)$$

$$= \frac{1}{RC}\int V_R(t)\,dt + V_R(t)$$

$$RC\frac{dV_R(t)}{dt} + V_R(t) = RC\frac{dV_e(t)}{dt}$$

TF $\downarrow$

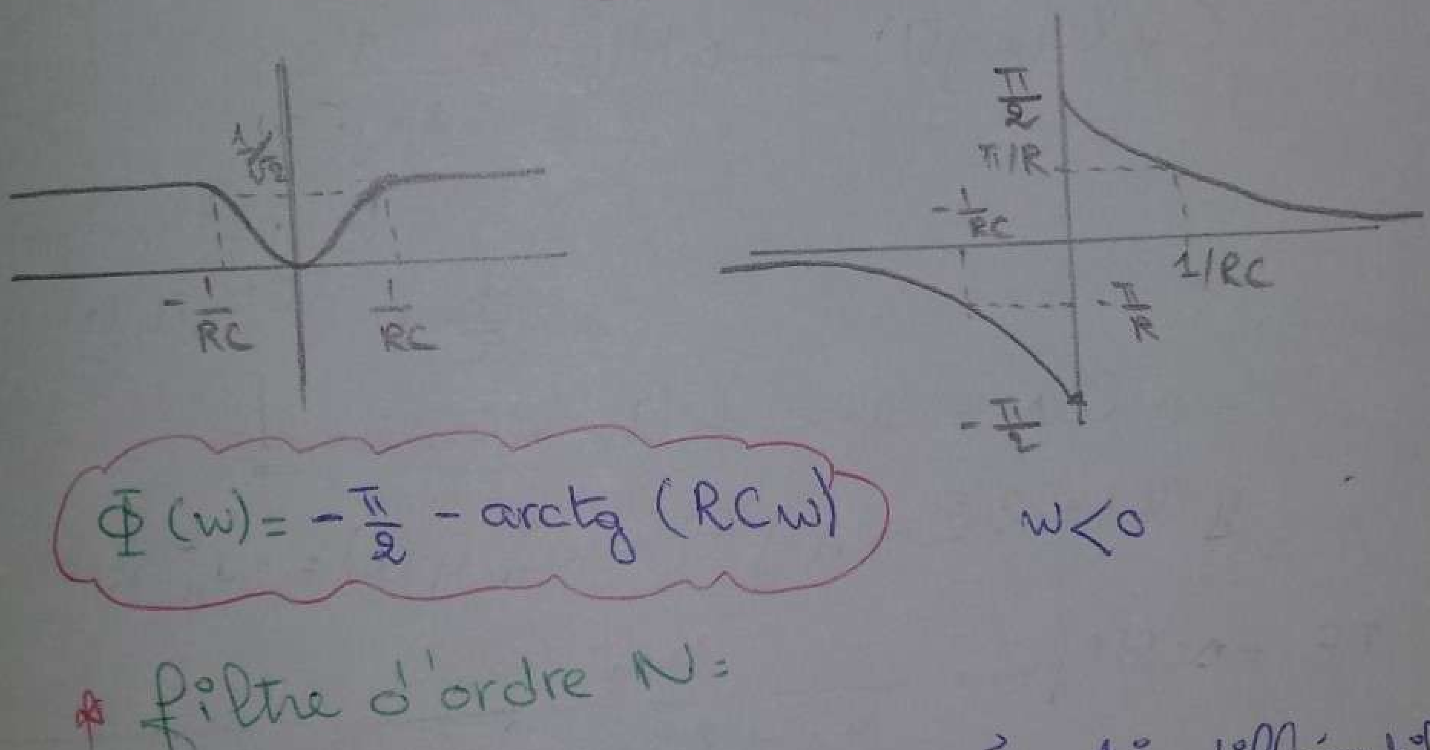
$$RC(j\omega)V_R(\omega) + V_R(\omega) = RC(j\omega)V_e(\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_R(\omega)}{V_e(\omega)} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

$$\Phi = \arctan(H(j\omega)) = \arctan(jRC\omega) - \arctan(1+jRC\omega)$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega) \qquad \omega > 0$$



$$\Phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega) \qquad \omega < 0$$

* filtre d'ordre N :

Il est caractérisée par une équation différentiel linéaire d'ordre N à coef cst.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{k}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{k}(t) \qquad M \leq N$$

TF

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k y(\omega) = \sum_{l=0}^{M} b_l (j\omega)^l \, x(\omega).$$

$$H(j\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j\omega)^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

$$N=1, \quad l=1, \quad H(j\omega) = \frac{b_0 - b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega}$$

$$= \frac{b_0 + j b_1 \omega}{a_0 + j a_1 \omega}$$

→ Cas d'un filtre d'ordre $\underline{1}$:

$$\tau y'(t) + y(t) \xrightarrow{TF} H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

$$\downarrow TF^{-1}$$

$$\frac{1}{\tau} e^{-j\tau t} \mathcal{U}(t)$$

→ Cas d'une filtre d'ordre $\underline{2}$:

$$y''(t) + 2\varepsilon \omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

$$TF \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\varepsilon(j\omega) + (j\omega)^2} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

avec : $C_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

$C_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

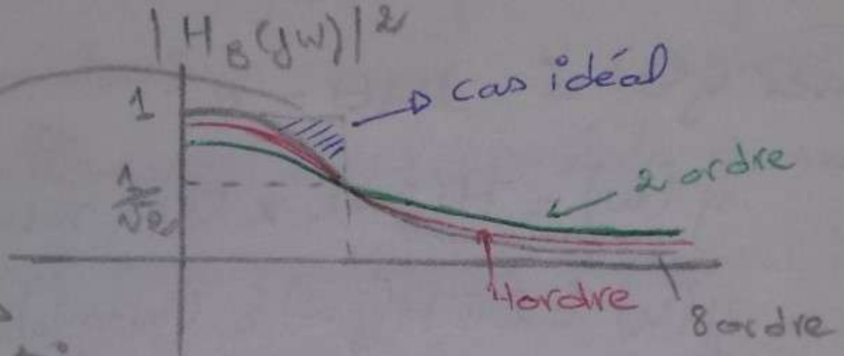
$$H(j\omega) = \frac{M}{(j\omega - C_1)} - \frac{M}{j\omega - C_2} \quad \text{avec: } M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

TF^{-1}

$$h(t) = M\left(e^{C_1 t} - e^{C_2 t}\right) \mathcal{U}(t)$$

* filtre passe-bas de Butterworth :

$$|H_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$



Pb mais sans avantage il n'y a pas d'ondulation

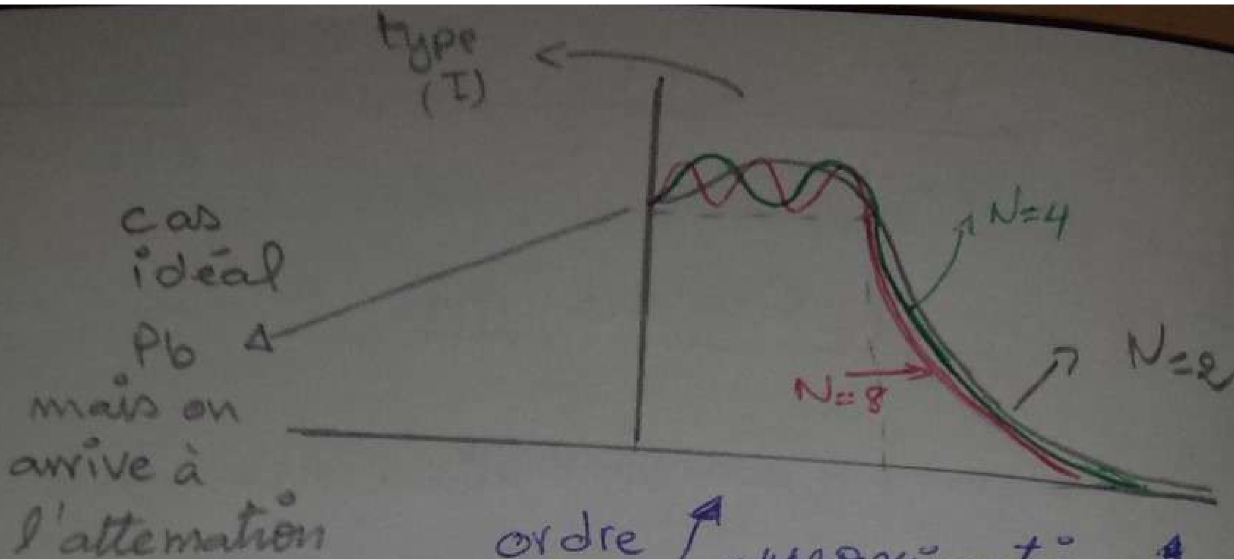
Oordre ↗ → approximation ↗ ⟹ complexité ↗

* filtre Passe bas de Chebyshev (Type (I))

$$|H_C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_c)}$$

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x)$$

$$\begin{cases} N = 0 \rightarrow V_0(x) = 1 \\ N = 1 \rightarrow V_1(x) = x \\ N = 2 \rightarrow V_2(x) = 2x^2 - 1 \end{cases}$$



ordre ↑ approximation ↑ compleinté ↑

ex :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Trouver $y(t)$ si $x(t) = e^{jw_0 t}$ ($H(jw)$ connue)

$$y(w) = H(jw) \cdot x(w) \quad (x(w) = 2\pi \delta(w - w_0))$$

$$y(w) = 2\pi H(jw) \delta(w - w_0)$$

$$= 2\pi \underbrace{H(jw_0)}_{= cst} (\delta(w - w_0))$$

TF^{-1}

$$y(t) = H(jw_0) e^{jw_0 t}$$

$$y(t) = |H(jw)| e^{\arg(|H(jw)|)} e^{jw_0 t}$$

(10)

Chapiter (3)

Echantillonnage des signaux

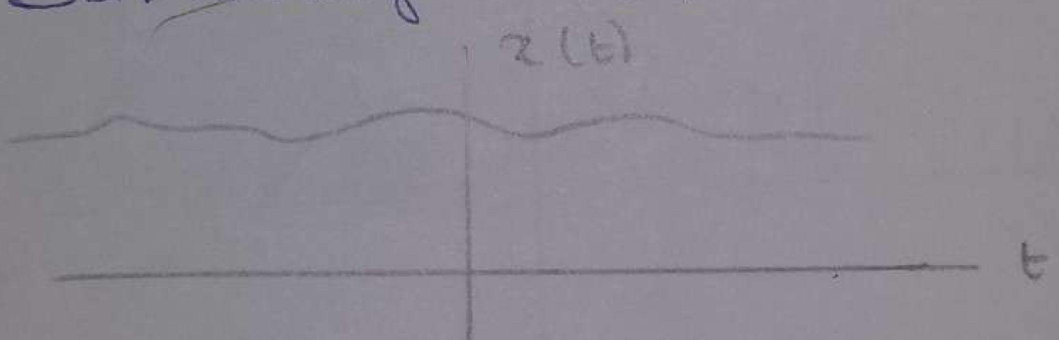
* Echantionnage:

l'echantionnage consiste à prelever les valeurs des amplitude d'un signal contines $s(t)$ à des instants précis et régulierr.

1) Echantionnage ideal

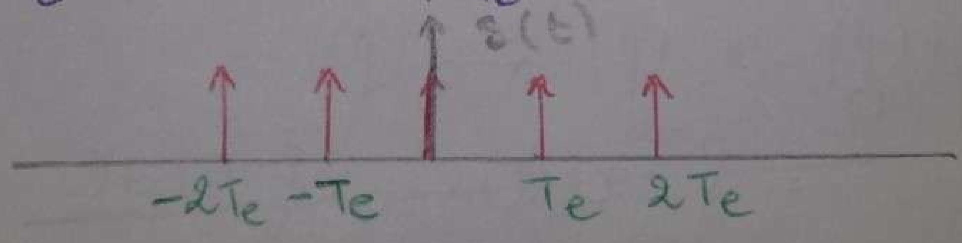
l'échantionnage ideal consiste à multiplier un signal $s(t)$ contimnes par des implusions de courtes durés (peigne de dirac) de Période Te.

Soit un signal $x(t)$:

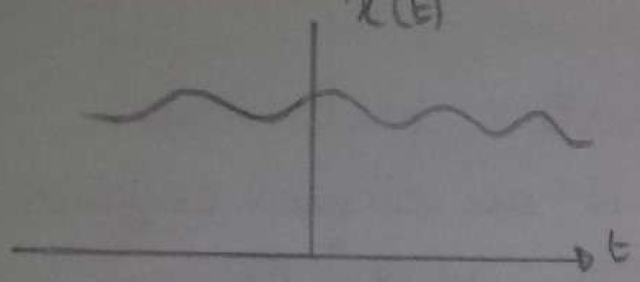


$$\text{et } \delta_{Te}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

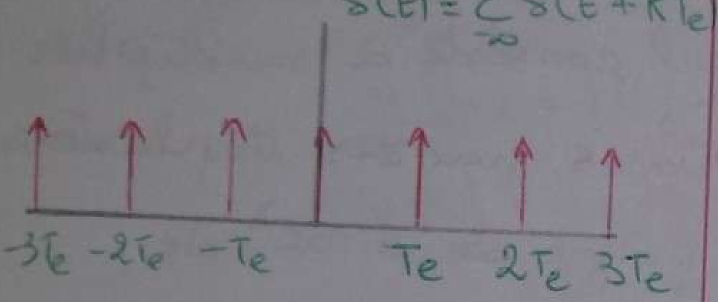
$$\text{et } x_d(t) = x(t) \cdot \delta_{Te}(t)$$



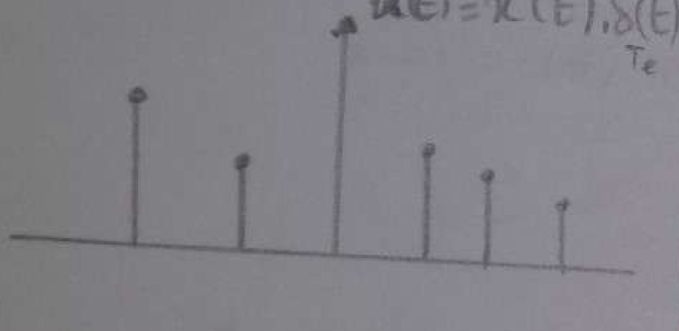
Comment réaliser l'échantillonnage à partir de la multiplications?

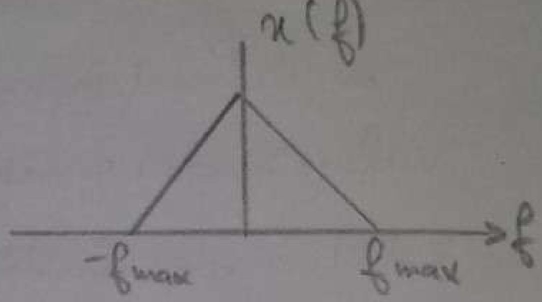


$$\delta(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t + kT_e)$$

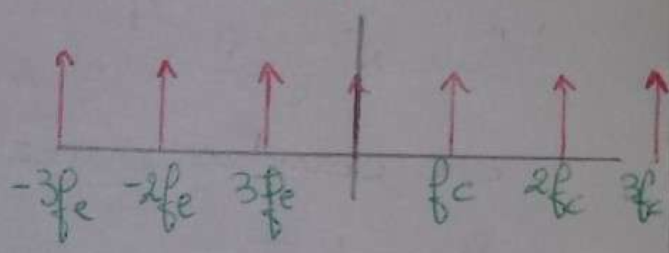


$$x_d(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)$$

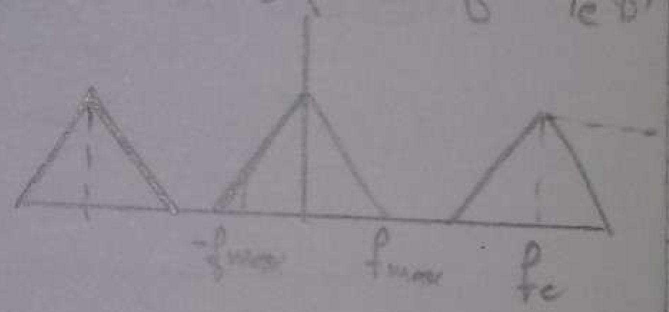




$$S_{T_e} = \frac{1}{}$$



$$x_d(f) = x(f) \cdot \delta_{T_e}(f)$$



$x_d = ?$

$$x_d(f) = x_c(f) * S_{T_e}(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(\tau) \cdot S_{T_e}(f - \tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(\tau) \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f \cdot n f_0 - \tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x_c(\tau)\, \delta(f - n f_0 - \tau)}\, d\tau$$

Le produit n'est défini que si :

$$f - n f_0 - \tau = 0 \iff \tau = f - n f_0$$

$$x_d(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(f - n f_0)\, \delta(f - n f_0 - \tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(f - n f_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0 - \tau)\, d\tau}_{1}$$

$$\forall (f - n f_0 - \tau)$$

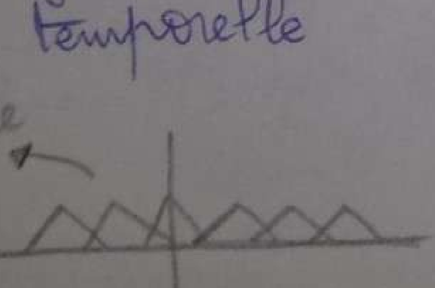
$$\Longrightarrow \boxed{x_d(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(f - n f_0)}$$

$f_e = ?$ comment choisit f_e ?

Règle de Chanon :

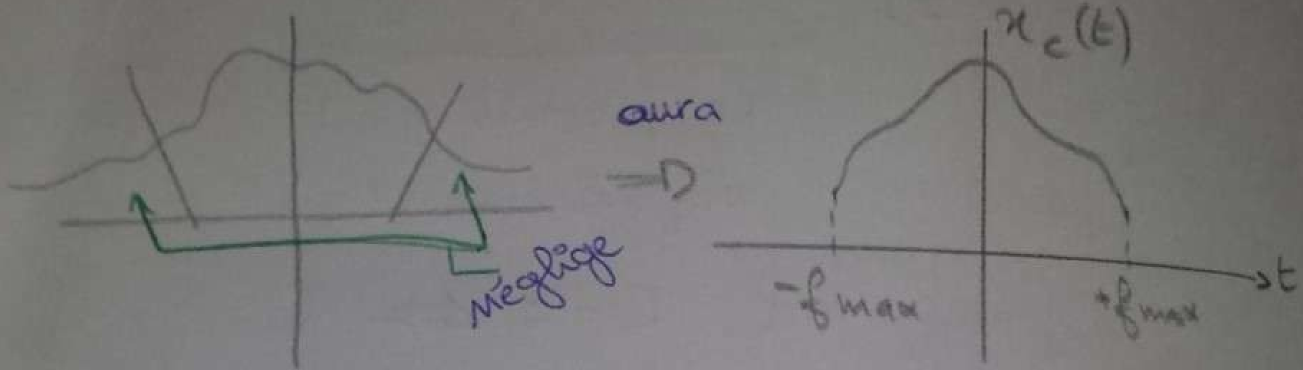
Pour éviter la perte du signal dans le domain temporelle	éviter la chauvauchement en domain fréquentielle

Le spectre se deforme



f_{max} = ? , comment déterminer ?

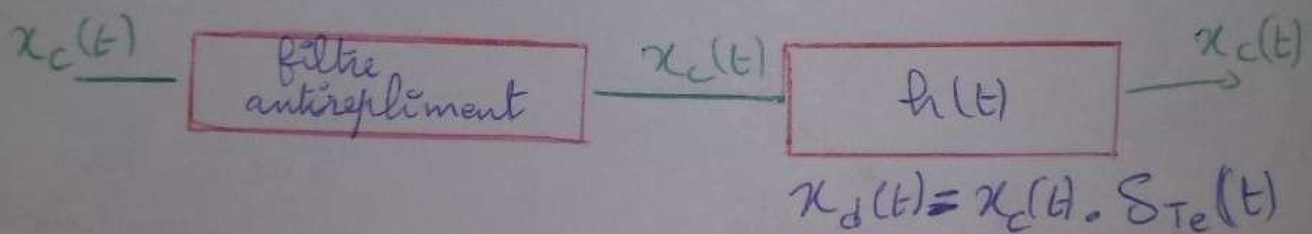
f_{max} = ? ⟹ filtres antirepliement



Ce si réalisable par un filtre passe-bas, ou sa BP est : $[0, f_{max}]$.

Le filtre de Betterworth est généralement le plus utilisé en pratique.

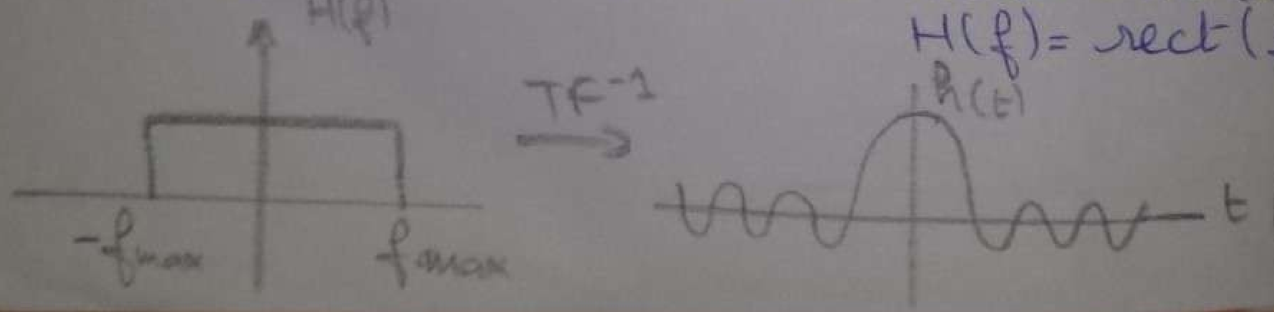
Un shéma pour résumé les procédure d'échantinnage :



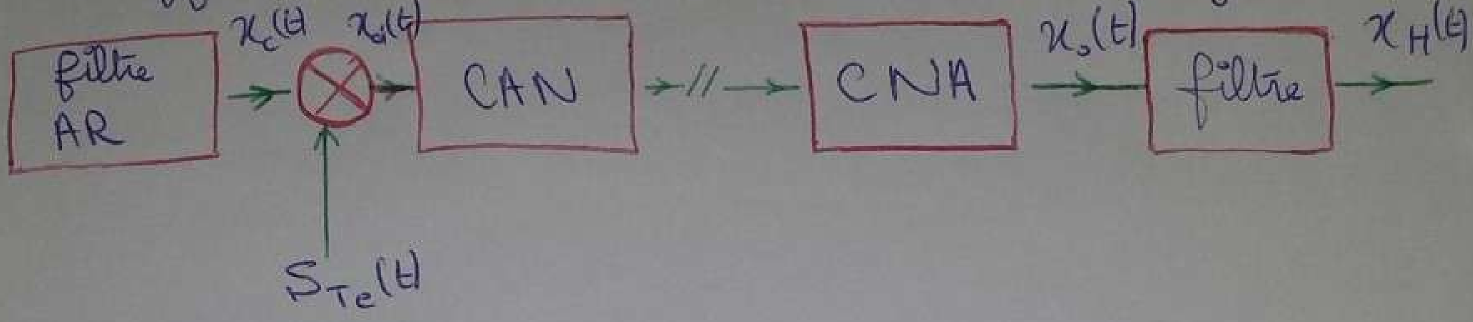
Recupération du signal :

système liniaire avec : $h(t) = \text{sinc}(t)$

$H(f) = \text{rect}(f)$.



Soit le shéma suivant qui shematise les differentes étapes de l'échantillonage:



Dans ce shéma-si nous remarquons qu'il y a des étapes qui sont déja interptées, mais il y ona d'autre que nous allons voir sidesson:

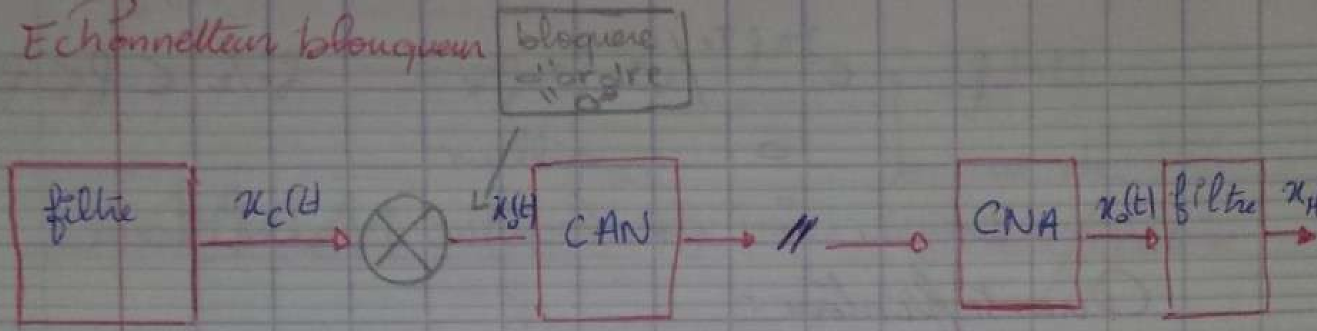
⇒ Bloqueure d'ordre "0"

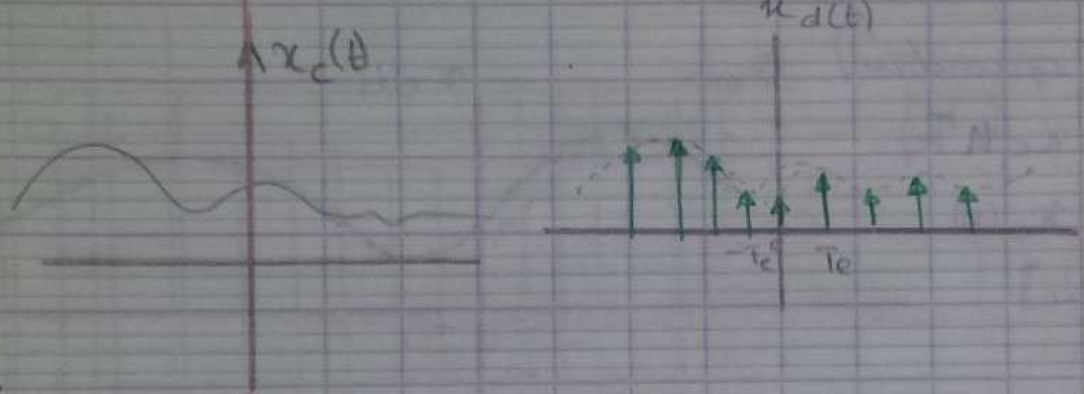
Pour faire passer notre signal dans le CAN ce dernier a besoin d'un temps pour traiter chaque échontillon pris cettes opérations, n'est faites que avec un bloqueur, d'ordre "0" dont nous allons expline son principe:

Principe

Chaque passage d'un échontillon vers un autre constantes ce qui va offrir un temp au CAN "Te".

Echantillonneur bloqueur





signal analogique

CAN

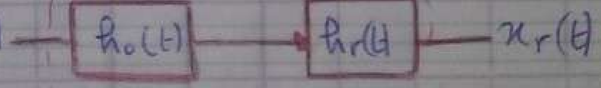
$$x_0(t) = x_d(t) * h_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_d(\tau) \cdot h_0(t-\tau)\, d\tau$$

$$h_0(t) \longrightarrow H_0(f) = \int_0^{T_e} e^{-j2\pi f t}\, dt = T_e e^{-j2\pi f T_e} \operatorname{sinc} \pi f T_e$$

$$X_f(t) = f_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nf_e)$$

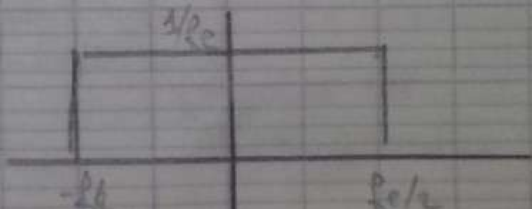
$$H(f) = H_0(f)\, H_r(f)$$

$$H_r(f) = H(f) / H_0(f) = f_e\, e^{j\pi f T_e} \frac{H(f)}{\operatorname{sinc} \pi f T_e}$$



on pose :

$$H(f) \begin{cases} 1/f_e & -f_e/2 < f < f_e/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



$$Hr(f) \begin{cases} e^{j\pi f T_e} / \text{sinc}\, \pi f T_e & -f_e/2 \le f \le f_e/2 \\ 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$

conversion analogique numérique :

Quantificateur :

q : pas de quantification (quantum)

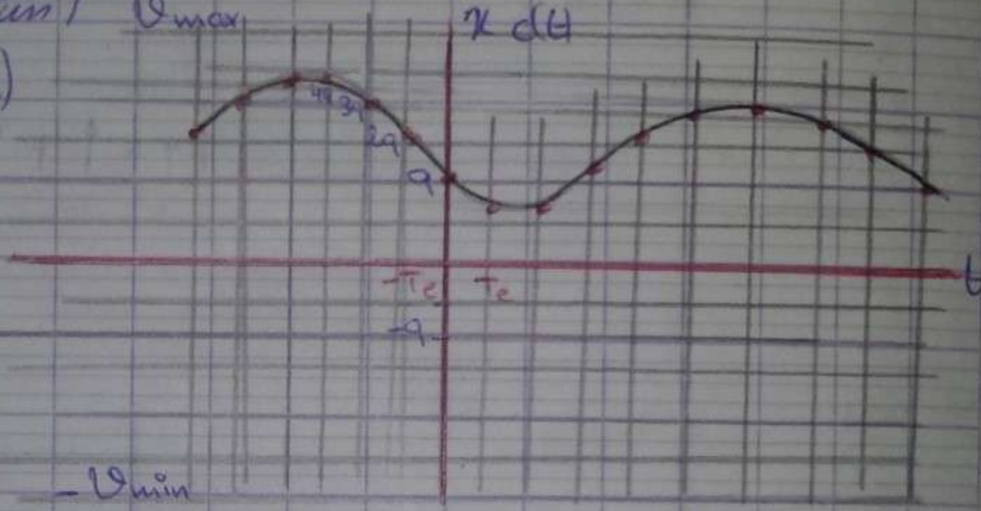
$x_c(t) \longrightarrow x_s(t) = x_c(n T_e) = x_c(n)$

$V = [V_1, V_2, V_3, V_4]$

2^2 bit

00
01
10
11

$\boxed{N = 2^n}$



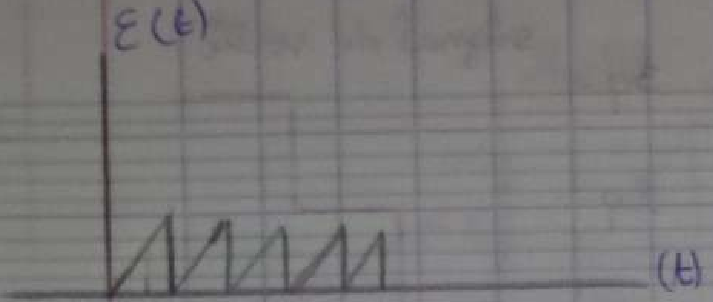
$(2, 2, 2, 3, 4)$

$\boxed{CAN} \longrightarrow (010, 010, 010, 011, 111)$

$x_o(t) \longrightarrow [-V_m, V_m] \Longrightarrow q = \dfrac{2 V_m}{2^n}$

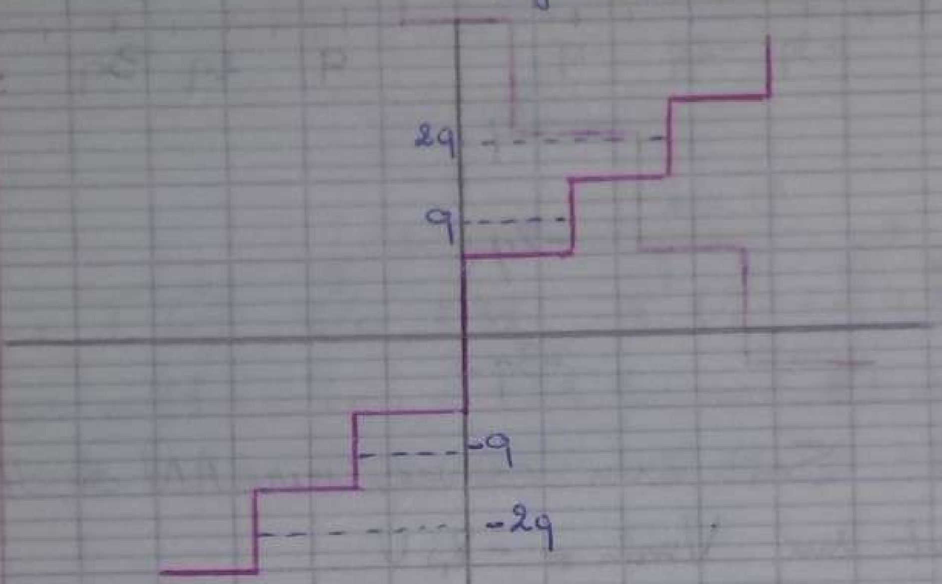
n : Nbrs de bits utilisés pour le codage

2-1-1) Quantification linéaire par défaut :



erreur de quantification

signal de sortie

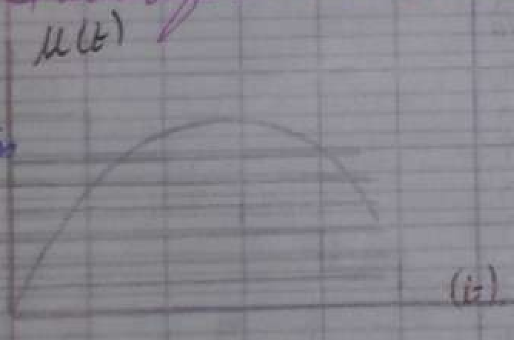


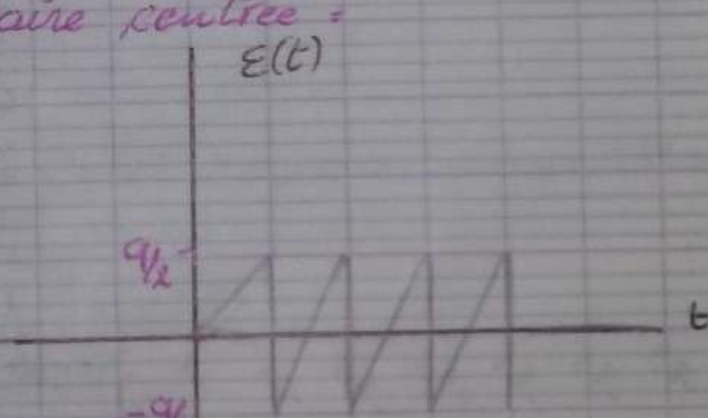
signal de sortie

caractéristique entrée-sortie d'un CAN

Quantification linéaire centrée :

quatification centrée



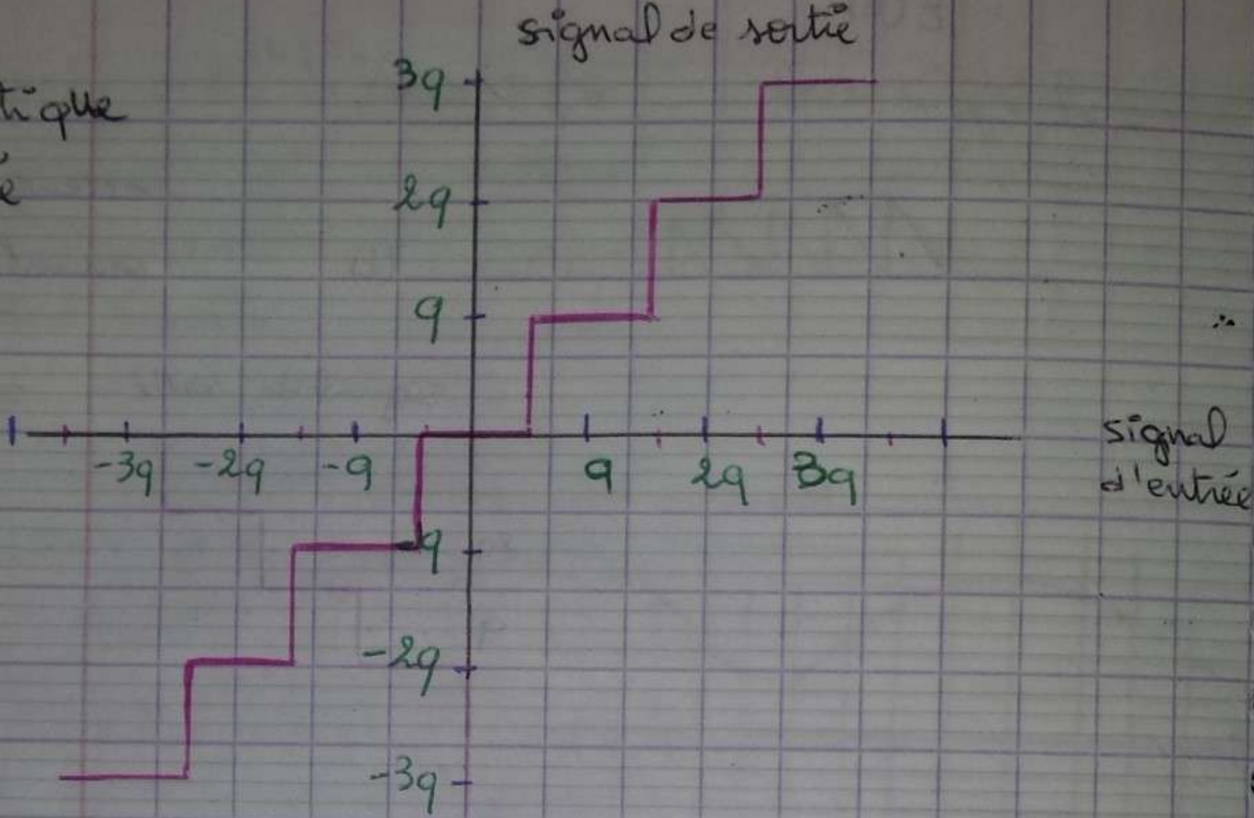


erreur de quantification

$u_e(t) = 0$ $\quad \varepsilon(t) = u_e(t) - u_s(t)$

$u_s(t) = 0$

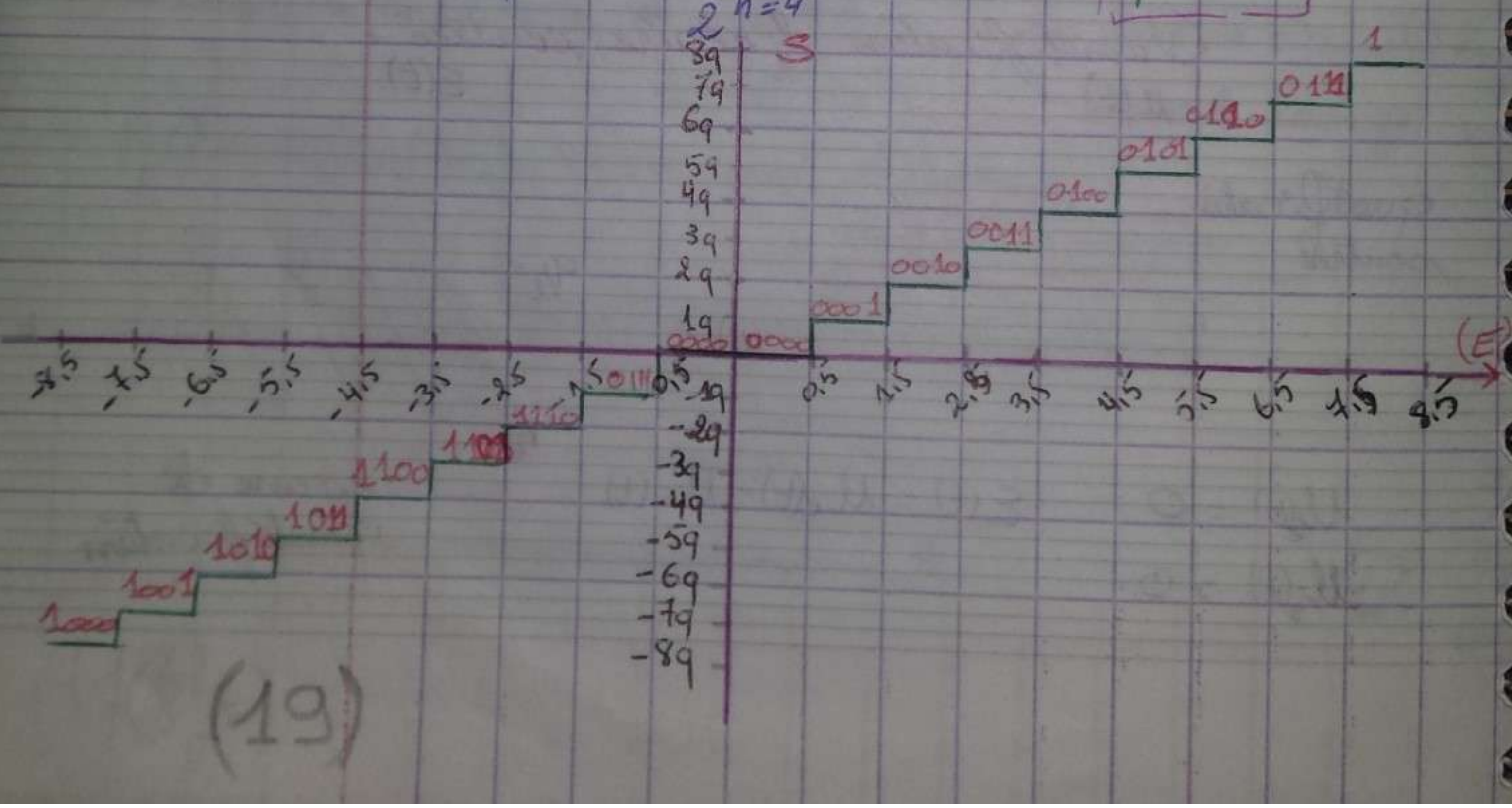
caratéristique d'entrée sortie

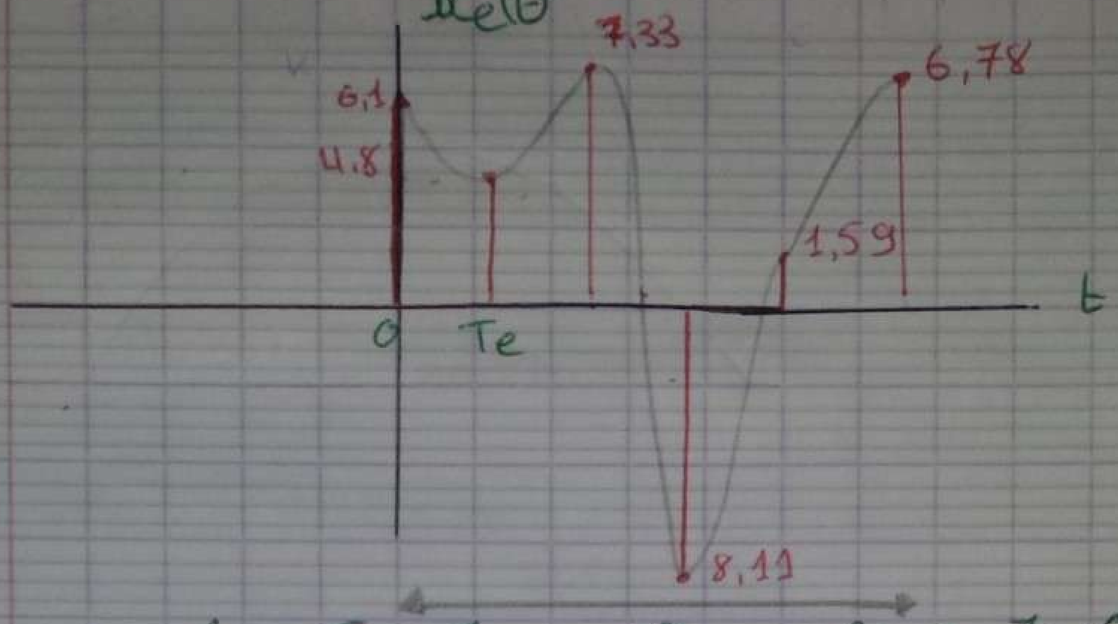


exemple Soit un convertiseur AN de 4bits travaillant sur $V_{min} = -8,5 V$

$V_{max} = 7,5 V$

① $q = ?$ $$q = \frac{7,5 - (-8,5)}{2^{n=4}} \Rightarrow \boxed{q = 1V}$$





6 5 7 -8 2 0 7 0

U_e = [6,1 , 4,80 , 7,33 , -8,11 , 1,59 0 6,78 0]

U_s = 0110 0101 0111 1000000 10 0000 1110 0000

ε = [0,1 -0,2 0,33 0,11 -0,41 0 -2,2 0]

Chaque approximation prend sont le code attribué dans la caractéristiques entrée - sortie

U_{eb} = [01100101011111 000001000001110000]

Erreur de qualification :

Dans ce cas :

ε = [0 ; 1 ; -0,2 ; 0,33 ; 0,11 ; -0,41 ; 0 , -4,1]

où :

$\boxed{\varepsilon = \text{valeur exactés} - \text{valeur approximée}}$

Chapitre (4)

Transformées de fourier discrète DF et rapide FFT

$$TF \Rightarrow \begin{cases} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(f) = Te \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{j2\pi f n Te} \\ x(n) = \int_{-f/2}^{f/2} X(f)\, e^{+j2\pi n f Te}\, df \end{cases}$$ La TF à Temp discret

$$X(f) = Te \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi f n Te}$$

$$x(n) = \int_{-fe/2}^{fe/2} X(f)\, e^{j2\pi f n Te}\, df$$

$$\rightarrow X(K \Delta f) = X\left(K \frac{fe}{N}\right) \equiv X(K)$$

$$\begin{cases} X(K) = Te \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N} K n} \\ x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} X(K)\, e^{j\frac{2\pi}{N} K n} \end{cases}$$

- La TF discrète (DFF) est définie :

$$\begin{cases} X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn} & K = 0, \dots, N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X(K)\, e^{j\frac{2\pi}{N}Kn} & n = 0, 1 \dots N-1 \end{cases}$$

DFT :

$$X(K) = \sum_{n=\infty}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{Kn} \quad , K=0 \dots N-1 \ , \ W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\Rightarrow X(K) = x(0)\, W_N^{Kn.0} + x(1)\, W_N^{(K.1)} + x(2)\, W_N^{K\times 2} + \dots + x(N-1)\, W_N^{K(N-1)}$$

$$\Rightarrow X(K) = x(0)\, W_N^{0.0} + x(1)\, W_N^{0.1} + x(2)\, W_N^{0.2} + \dots + x(N-1)\, W_N^{0(N-1)}$$

$$\Rightarrow X(1) = x(0)\, W_N^{0.1} + x(1)\, W_N^{(1.1)} + x(2)\, W_N^{1.2} + \dots + x(N-1)\, W_N^{1(N-1)}$$

$$\Rightarrow X(N-1) = x(0)\, W_N^{(N-1)\times 0} + x(1)\, W_N^{1(N-1)} + \dots + x(N-1)\, W_N^{(N-1)(N-1)}$$

DFT exige $\begin{cases} N(N-1) & \text{addition complexe} \\ N^2 & \text{multiplication complexe} \end{cases}$

(22)

problème complexité elevée

Solution $\longrightarrow$ FFT

. 2 addition complexe exige 2 addition réel

$$(a+jb)+(c+jd) = \underbrace{a+c}+j(\underbrace{b+d})$$

. 4 multiplecation réelles $\Rightarrow$ 2 addition réelles.

$$(a+jb)(c+jd) = \underbrace{ac-db}+j(\underbrace{bc+ad})$$

$\Rightarrow$ il y a 2 type d'algorithme (FFT)

- FFT: à entrelacement temporel
- FFT: à entrelacement fréquentiel

$\Rightarrow$ FFT à entrelacement fréquentiel (EF)

$$X(K) = \sum^{N-1} x(n)\, W_N^{Kn} \qquad K=0, \dots, N-1$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{Kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)\, W_N^{Kn}$$

Changement de variable
$$\begin{cases} m = n - \frac{N}{2} \longrightarrow n = m + \frac{N}{2} \\ n = \frac{N}{2} \qquad m = 0 \\ n = N-1 \qquad m = \frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)\, W_N^{Kn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(m+\frac{N}{2}\right) W_N^{K\left(m+\frac{N}{2}\right)}$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)\, W_N^{Kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{K\left(m+\frac{N}{2}\right)}$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) + W_N^{K\frac{N}{2}}\, x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) W_N^{Kn}$$

$$X(2K) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) W_{\frac{N}{2}}^{Kn} \qquad \boxed{e^{-j2\pi} = 1}$$

$K = 0 : \frac{N}{2} - 1$

$$X(2K+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) W_{N}^{Kn} \cdot W_{\frac{N}{2}}^{Kn}$$

$K = 0 : \frac{N}{2} - 1$

$$X(2K) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} y_e(n)\, W_{N/2}^{Kn} \quad , K = 0 : \frac{N}{2} - 1 \;\Big)\; \text{DFT de taille } N/2$$

$$X(2K+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} y_o(n)\, W_{N/2}^{Kn} \quad K = 0, \frac{N}{2} - 1 \;\Big)\; \text{DFT de taille } \frac{N}{2}$$

<u>avec</u> :

$$y_e(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$n = 0 : \frac{N}{2} - 1$

$$y_o(n) = \left(x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) W_N^{n}$$

$$\begin{bmatrix} y_e(n) \\ y_o(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+\frac{N}{2}) \end{bmatrix} \quad n = 0 : \frac{N}{2} - 1$$

$x(n)$  $y_e(n)$, $y_o(n)$

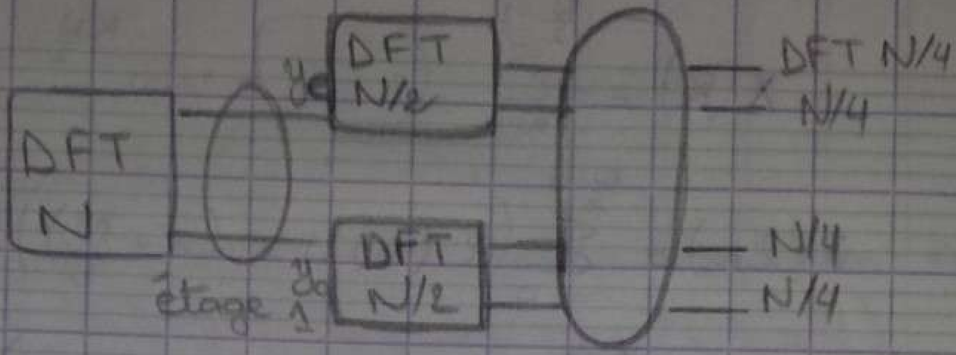
papillon butterflie.

$$W_N^{(2K+1)} = W_N^{KN} \cdot W_N^{NK}$$
$$= 1 e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}$$
$$= e^{-j\pi} = -1$$

$$W_N^{2KN/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}KN}$$

$$W_N^{2Kn} = e^{-\frac{j2\pi}{N}\cdot 2Kn}$$
$$= W_{N/2}^{Kn}$$

(2/4)



pour $n=0$ ⟶ $\begin{cases} 2 \text{ addition complexe} \\ 1 \text{ multiplication complexe.} \end{cases}$

étage(1) ⟶ $\begin{cases} 2 \times \frac{N}{2} = N \text{ add complexe} \\ 1 \times \frac{N}{2} = \frac{N}{2} \text{ mul complexe} \end{cases}$

$N = 2^r$, il y a r étage , $r = \log N$

. FFT exige : $\begin{cases} N \log N \text{ addition complexe.} \\ \frac{N}{2} \log N \text{ multiplucation complexe.} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{DFT} \longrightarrow 1024^2 \\ \text{FFT} \longrightarrow 10 \times 1024 \end{cases}$

$\cancel{V}^- =$

$\boxed{\text{Exo3}}$

$V^- = V^+$

$V^- = V_R + V_0 = V^+ = 0 \Rightarrow V_0 = -V_R = -RI$

. Loi des noeuds :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$V_1 = RI_1 + \cancel{V^-} = RI_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R}$

$$V_0 = -R\left(\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{2R} + \frac{V_3}{4R} + \frac{V_4}{8R}\right)$$

$$= -\left(V_1 + \frac{V_2}{2} + \frac{V_3}{4} + \frac{V_4}{8}\right)$$

$\boxed{V_i = b_i V_{ref}} \Rightarrow$

$$V_0 = -V_{ref}\left(b_3 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8}\right)$$

$$\Rightarrow V_0 = -\frac{V_{ref}}{2}\left(b_3 2^3 + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0\right)$$

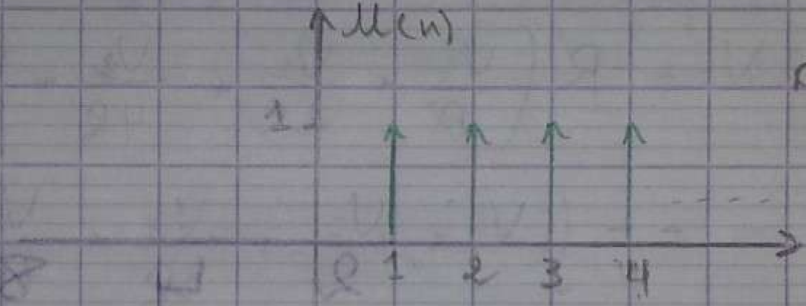
Chapiter (5)

filtrage numérique

⇒ Transformée en Z

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, Z^{-n}$$

$u(n) \Rightarrow$



causel

anti-causel

$$x(n) = a^n\, u(n)$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n\, u(n)\, Z^{-n}$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n\, Z^{-n}$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a Z^{-1})^n = \lim_{N \to +\infty} \frac{1-(aZ^{-1})^N}{1-aZ^{-1}}$$

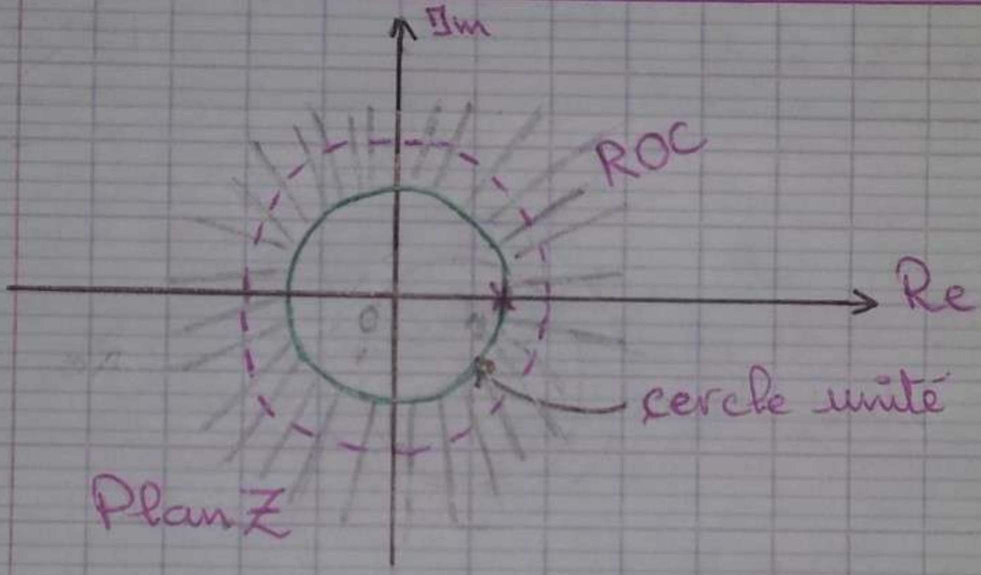
$$X(Z) = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}$$

$$|aZ^{-1}| < 1$$
$$|a|.|Z^{-1}| < 1$$
$$\frac{|a|}{|Z^{-1}|} < 1$$

$$\boxed{x(n) = a^n u(n) \xrightarrow{Z} X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}}$$

domaine de convergence

<u>ROC</u> : régime of convergence ; $|Z| > |a|$



$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-a^n u(-n-1)\right) Z^{-n}$$

$$X(Z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n Z^{-n}$$

$m = -n$, $n = -\infty \rightarrow m = +\infty$

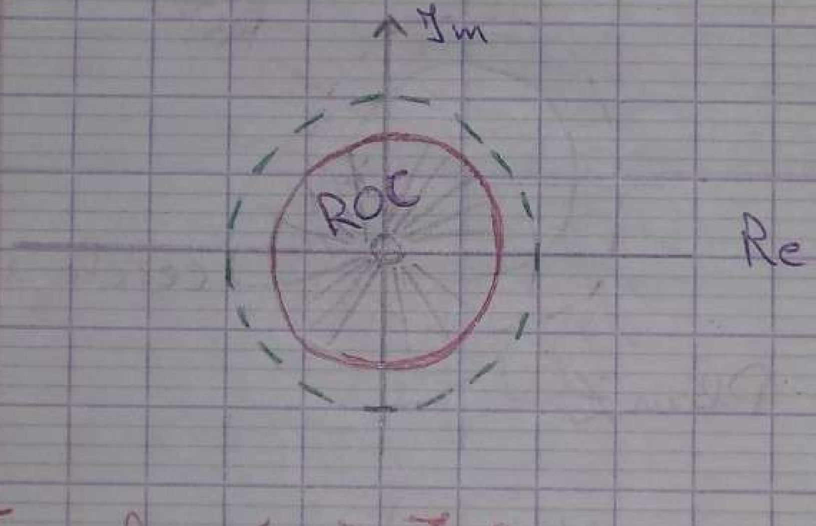
$$X(Z) = -\sum_{m=1}^{+\infty} a^{-m} Z^{m} = -\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{Z}{a}\right)^m$$

$$X(Z) = 1 - \sum_{m=0}^{-\infty} \left(\frac{Z}{a}\right)^m$$

$$X(Z) = \frac{1}{1-\frac{Z}{m}} \qquad \left|\frac{Z}{m}\right| < 1$$

$$X(Z) = \frac{Z}{Z-a} = \frac{1}{1-aZ^{-1}} \qquad |Z| < |a|$$

$$\boxed{x(n) = -a^n u(-n-1) \xrightarrow[Z]{} X(Z) = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a} \qquad |Z| < |a|}$$



⇒ Transformée à Z inverse

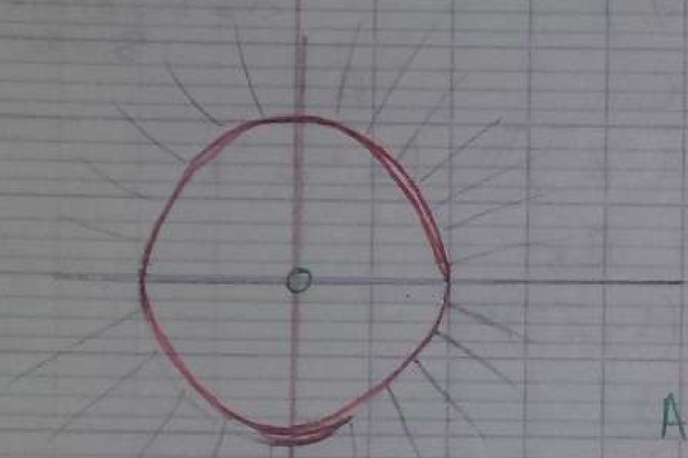
$$X(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_M Z^{-M}}{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots\ a_N Z^{-N}}$$

- Si $M < N$ et les pôles sont simples.

alors : $X(Z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k Z^{-1}}$

avec : $A_k = (1 - d_k Z^{-1}) X(Z) \Big|_{Z = d_k}$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - d_k Z^{-1}} \right\} = \begin{cases} d_k^n\, u(n) \text{ si Roc } |Z| > |d_k| \text{ causel} \\ -(d_k)^n\, u(-n-1) \text{ si Roc } |Z| < |d_k| \text{ anti causel.} \end{cases}$$



$$X(K) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4} Z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2} Z^{-1})}$$

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4} Z^{-1}) X(Z) \Big|_{Z = \frac{1}{4}} = -1$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2} Z^{-1}) X(Z) \Big|_{Z = \frac{1}{2}} = 2$$

$\Rightarrow X(Z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4} Z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2} Z^{-1})}$ $|Z| > \frac{1}{2} \Rightarrow x(n)$ est causel

$$x(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

- Si $M \geq N$ et (Z) à des pôles multiples
- Si $Z = d_i$ est un pôle d'ordre S alors.

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{M-N} B_n Z^{-n} + \sum_{k=-1, k \neq i}^{N} \frac{A_i}{1 - d_k Z^{-1}}$$

$$+ \sum_{m=1}^{S} \frac{C_m}{(1 - d_k Z^{-1})^n}$$

avec :

$$C_m = \frac{1}{(S-m)!(-d_i)^{S-m}} \left\{ \frac{d^{Sm}}{dw^{Sm}} \left[(n - d_i w)^S \times w^{-1} \right] \right\}_{w\,d_i}$$

exemple

$$X(Z) = \frac{1}{(1-Z^{-1})(1-Z^{-1})}$$

deux pôles $d = -1$ simple
$d = 1$ d'ordre $S = 2$

$$X(Z) = \frac{A_1}{(1+Z^{-1})} + \sum_{m=1}^{2} \frac{C_m}{(1-Z^{-1})^m} = \frac{A_1}{(1+Z^{-1})}$$

$$+ \frac{C_1}{(1-Z^{-1})} + \frac{C_2}{(1-Z^{-1})^2}$$

$$A_1 = (1+Z^{-1})(Z)\Big|_{Z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$C_1 = \frac{1}{(Z-1)(-1)^{2-1}} \left\{ \frac{d}{dw} \left[(1-w)^2 \times (w^{-1}) \right] \right\}_{w=-1}$$

$$= \frac{-d}{dw} \left(\frac{1}{1+w} \right) \Big|_{w=1} = 1/4$$

$$C_2 = \frac{1}{(2-2)(-1)^0} \left\{ \left[(1-w)^2 \times w^{-1} \right] \right\}_{w=1} = \frac{1}{1+w}\Big|_{w=1}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{X(Z) = \frac{1/4}{(1+Z^{-1})} + \frac{1/4}{(1-Z^{-1})} + \frac{1/2}{(1-Z^{-1})}}$$