Université de Sétif1. Faculté de technologie . Département d'électronique.

3 année licence LMD .Traitement du signal

Série de TD N°1

Exercice 1 :
Calculer la convolution des signaux continus $f(t)$ et $g(t)$, pour les deux cas donnés par les figures 1 et 2 suivantes.

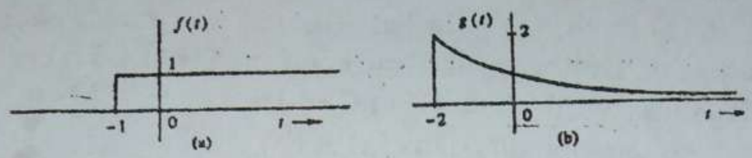


Figure 1.

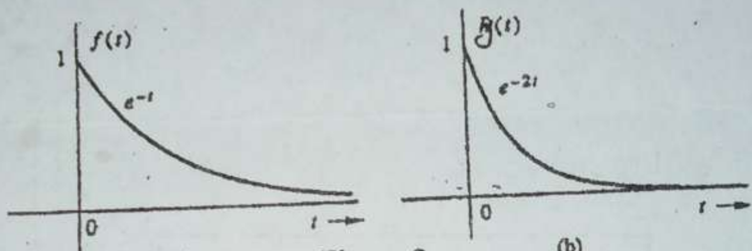


Figure 2.

Exercice 2 :
Calculer la convolution des séquences discrètes $f(k)$ et $g(k)$, pour les deux cas donnés par les figures 1 et 2 suivantes.

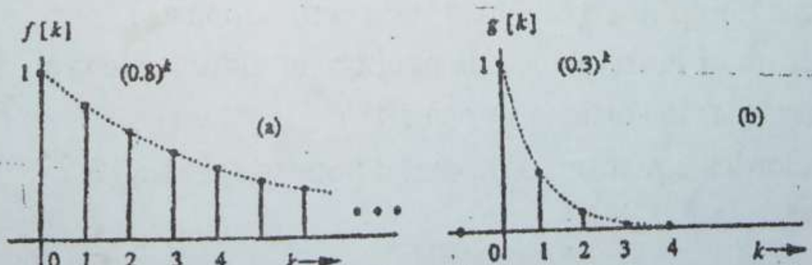


Figure 1.

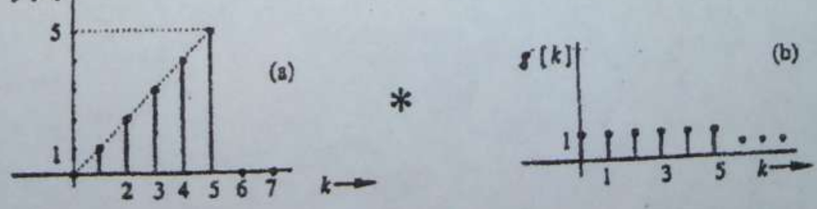
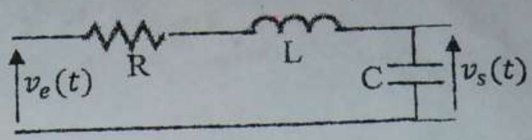


Figure 2.

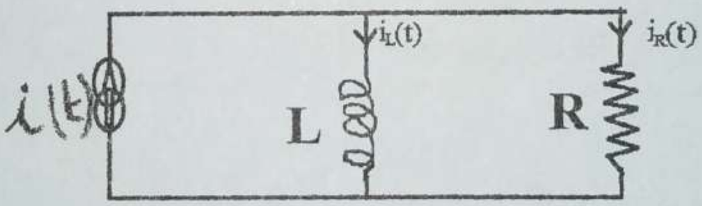
Série 2

Exercice 1: (5 pts) Soit le filtre analogique suivant :



1) Trouver l'équation différentielle qui reliée l'entrée $v_e(t)$ avec la sortie $v_s(t)$.
2) Trouver la réponse fréquentielle du circuit.
3) Etablir la relation entre R, L et C pour laquelle le circuit devient un filtre passe-bas de Butterworth. Dans ce cas, déterminer la fréquence de coupure.
4) Calculer $v_s(t)$ si $v_e(t) = \sin(t)$ pour les deux cas suivants :
   a) Le filtre n'est pas de Butterworth, $R = 1\Omega$, $L = 1H$ et $C = 1F$.
   b) Le filtre est de Butterworth, $L = 1H$ et $C = 1F$.
   c) Interpréter les résultats obtenus dans (a) et (b).

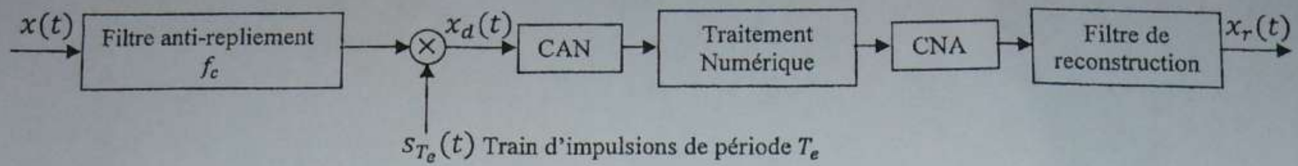
Exercice2 : Soit le filtre suivant :



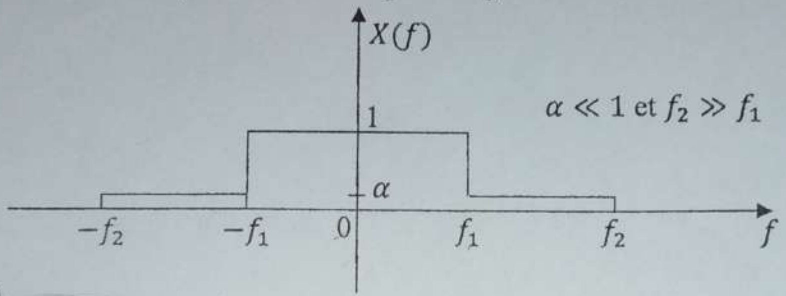
a) Trouver l'équation différentielle qui relie l'entrée i(t) et la sortie i_L (t) ?
b) Déterminer la réponse fréquentielle du filtre ?
c) Tracer l'amplitude et la phase de cette réponse ?
d) Déterminer la fréquence de coupure et indiquer le type du filtre ?
e) Déterminer la sortie si i(t)=cos(t) ? $R = 1\Omega$, $L = 1H$
f) Répéter les équations a, b, c et d pour la sortie i_R(t) ?

SERIE DE TD N° 3

Exercice 1 : Soit le schéma suivant :



$x(t)$ est un signal continu dont le spectre est donné par la figure suivante :



1) Calculer $x(t)$.

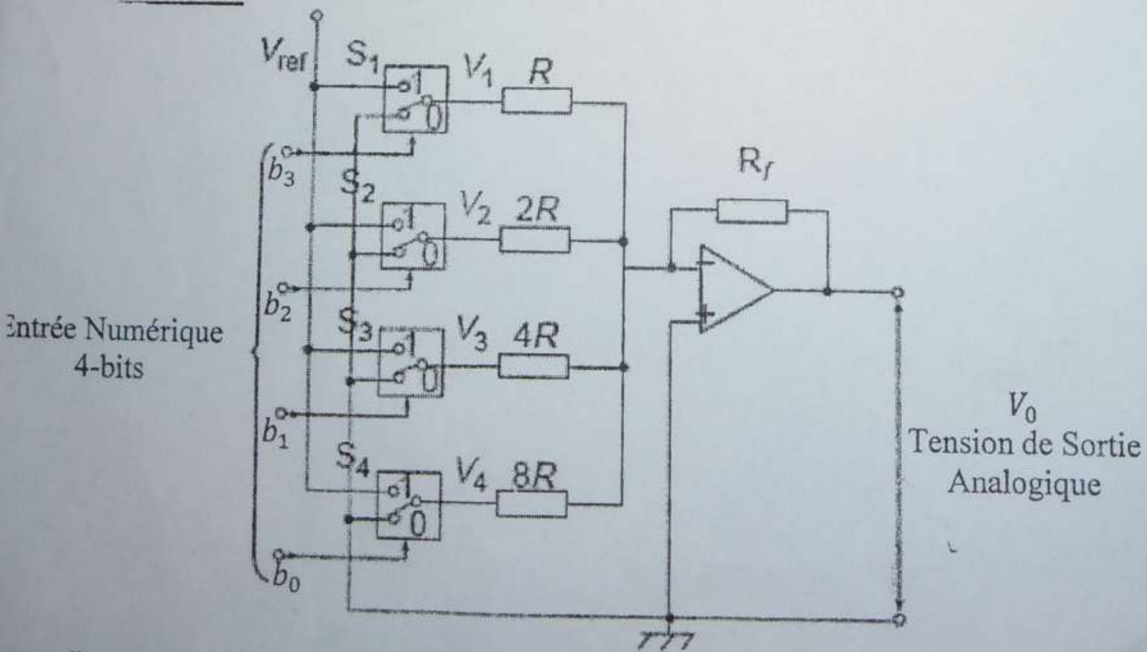
Soient les trois cas suivants :

a) $f_c = f_2$ et $f_e = 3f_2$
b) $f_c = f_2$ et $f_e = (3f_2 - f_1)/2$
c) $f_c = f_1$ et $f_e = 3f_1$

Pour chaque cas,

2) Tracer le spectre du signal discret (échantillonné) $x_d(t)$.
3) Indiquer l'intervalle pour les valeurs possibles de la fréquence de coupure du filtre de reconstruction pour une meilleure interpolation du signal d'entrée. Proposer une valeur appropriée et trouver l'expression du signal $x_r(t)$.
4) Discuter et interpréter les résultats des trois cas.

Exercice 2 :



4-bits $b_3b_2b_1b_0$	Sortie V_0
0000	
0001	
0010	
0011	
0100	
0101	
0110	
0111	
1000	
1001	
1010	
1011	
1100	
1101	
1110	
1111	

Le montage ci-dessus représente un convertisseur Numérique-Analogique de 4-bits.

1- Exprimer la tension de sortie V_0 en fonction de V_1, V_2, V_3, V_4, R et R_f.

2- Compléter le tableau ci-dessus pour $R_f = R = 1K\Omega$ et $V_{ref} = -8$V.

SERIE DE TD N° 4

Exercice 1 :

Soient les séquences suivantes de longueur N (N pair).

a) $x(n) = \delta(n)$

b) $x(n) = \delta(n - n_0), \quad 0 \leq n_0 \leq N - 1$

c) $x(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$

d) $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & \frac{N}{2} \leq n \leq N - 1 \end{cases}$

1) Tracer ces séquences.

2) Calculer la DFT de chaque séquence.

Exercice 2 :

Théorème de Parseval.

Démontrer que :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

avec $X(k)$ est la DFT de la séquence $x(k)$ de taille N.

Exercice 3 :

Développer l'algorithme FFT à entrelacement temporel pour $N = 2^r$ et calculer sa complexité de calcul.

SERIE DE TD N° 5

Exercice 1 : Calculer la transformée en Z du signal suivant en indiquant sur le plan Z le domaine de convergence, les pôles et les zéros.

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)].$$

Exercice 2 : Calculer la réponse indicielle du système dont la réponse impulsionnelle est donnée par

$$h(n) = \begin{cases} 3^n, & \text{si } n < 0 \\ \left(\frac{2}{5}\right)^n, & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3: Soit

$$X(z) = \frac{-2.6z^{-1}}{1 - 3.4z^{-1} + 1.2z^{-2}}$$

Calculer la transformée en Z inverse $x(n)$ de $X(z)$ pour les trois cas suivants :

a) $x(n)$ est une séquence causale
b) $x(n)$ est une séquence anti-causale
c) $x(n)$ a un terme causal et un autre anti-causal

Exercice 4 : Soit un système décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$y(n) = 0.7y(n-1) - 0.12y(n-2) + x(n-1) + x(n-2)$$

avec $y(n)$ et $x(n)$ représentent la sortie et l'entrée du système, respectivement.

a) Calculer la sortie du système si $x(n) = n\,u(n)$.
b) Montrer que le système est stable ?

Département d'Electronique, Faculté de Technologie, Université Ferhat Abbas Sétif-1.
Module : Traitement de Signal. -------------- Niveau : 3ème Année Licence LMD, Electronique.

SERIE DE TD N° 6

Exercice 1 : Soit le filtre suivant

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

a) Indiquer le type de ce filtre RIF ou RII, expliquer
b) Démontrer que la sortie du système $y(n)$ peut être exprimée comme

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k), \qquad n \geq 0$$

c) Déterminer si le système est stable ou non.
d) Dans le cas où le filtre est causal, trouver sa réponse impusionnelle.

Exercice 2: Soit le filtre suivant

$$y(n) = x(n) - x(n-4)$$

a) Indiquer le type de ce filtre RIF ou RII, expliquer
b) Calculer et tracer l'amplitude et la phase de la réponse fréquentielle de ce filtre.
c) Calculer la réponse du filtre si son entrée est

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < \infty$$

d) Expliquer les résultats obtenus dans la partie (c) en fonction de la réponse donnée pour (b).

Exercice 3: Soit le filtre suivant

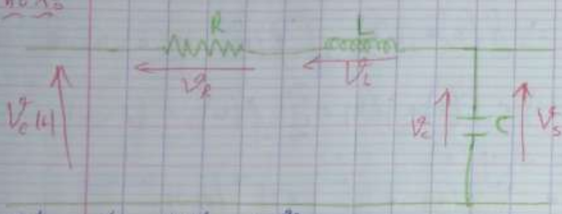
$$y(n) = 0.9y(n-1) + bx(n)$$

a) Indiquer le type de ce filtre RIF ou RII, expliquer
b) Déterminer b pour que $|H(0)| = 1$.
c) Déterminer la fréquence pour laquelle $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$.
d) Indiquer le type de ce filtre (passe-bas, passe-bande ou passe-haut).
e) Répéter (b) et (c) pour le filtre

$$y(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

Serie N° 02 :

Exo n° 1 :



1- l'équation différentielle :

$$U_R = R\,i(t) = RC\frac{dU_c}{dt}$$

$$U_L = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$U_c = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \Rightarrow i(t) = C\frac{dU_c}{dt}$$

d'après la loi des mailles :

$$V_e(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_c(t)$$

$$\Rightarrow V_e(t) = RC\frac{dU_c}{dt} + LC\frac{d^2U_c(t)}{d^2t} + V_c(t)$$

- La réponse fréquentielle :

$$TF : V_e(w) = JwRC\,V_c(w) - LCw^2\,V_c(w) + V_c(w)$$

$$H(Jw) = \frac{V_c(w)}{V_e(w)}$$

$$\frac{d}{dt} \xrightarrow{TF} Jw$$

$$\frac{d^2}{dt} \xrightarrow{TF} (Jw)^2$$

$$\Rightarrow H(Jw) = \frac{1}{1 - LCw^2 + JRCw}$$

Butter Worth :

$$|H_B(Jw)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^{2}}$$

$$|H_B(Jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^{2 \times N}}}$$

3- la relation entre R, L, C :

$$|H(Jw)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - LCw^2)^2 + (RCw)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + L^2C^2w^4 - 2LCw^2 + R^2C^2w^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2LCw^2 + R^2C^2w^2 + L^2C^2w^{2\times 2}}}$$

$$1 - 2LCw^2 + R^2C^2w^2 = 1$$

$$2L = R^2C \Rightarrow R^2 = \frac{2L}{C} \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{\frac{2L}{C}}}$$

$$L^2C^2w^{2\times 2} = (LC)^2 w^{2\times 2} = (LCw^2)^2$$

$$= \left((\sqrt{LC})^2 w^2\right)^2 = (\sqrt{LC}\,w)^{2\times 2}$$

$$\Rightarrow w_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$\cos(\omega t + \alpha)$

$$V_s(W) = H(JW) \cdot V_e(W)$$

4- Calculer $V_s^e(t)$:

On a $V_e(t) = \sin(t) \Rightarrow V_s(t) = ?$

$$V_e(t) = 1 \sin(W_0 t + \alpha) \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ W_0 = 1 \text{ rad/s} \\ \alpha = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

a- $V_s(W_0) = H(JW_0) \cdot V_e(W_0)$ n'est pas Butterworth

$$H(JW_0) = \frac{1}{1 - L_C + JRC} = \frac{1}{J} = -J \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ \phi = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

$$V_s^e(t) = 1 \times 1 \sin\left(W_0 t + 0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$= \sin t \cos\frac{\pi}{2} - \cos t \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= -\cos t \sin\frac{\pi}{2}$$

b- Le filtre est Butterworth :

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}} = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi = \frac{-\pi}{2} \end{cases} \quad H(JW_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}\,J}$$

$$V_s(t) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(W_0 t + 0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$$

$$\Rightarrow W_0 = 1 = W_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1$$

exo n°2 :

1 - l'équation différentielle :

D'après la loi des mailles :

$$i(t) = i_L(t) + i_R(t)$$

$$U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \quad U_R(t) = R\, i_R(t), \quad i_R(t) = \frac{U(t)}{R}$$

$$i_R(t) = \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}$$

2- La réponse fréquentielle :

T.F : $I(W) + \frac{L}{R} JW I_L(W)$

$$I(W) = I_L(W)\left(1 + \frac{L}{R} JW\right)$$

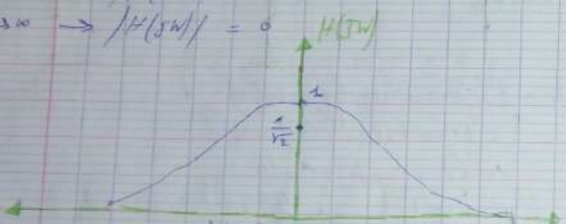
$$\frac{I_L(W)}{I(W)} = \frac{1}{1 + \frac{JLW}{R}} \Rightarrow H(JW) = \frac{1}{1 + \frac{JLW}{R}}$$

3- tracer l'amplitude et la phase de cette réponse :

$$|H(JW)| = \left| \frac{1}{1 + \frac{JWL}{R}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{LW}{R}\right)^2}}$$

$W \to 0 \to |H(JW)| = 1$

$W \to \infty \to |H(JW)| = 0$



$\arg(H(JW)) = \arg\left(\frac{1}{1 + \frac{JLW}{R}}\right)$ On a $\boxed{z = a + jb}$ $\boxed{\arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)}$

$= \arg 1 - \arg\left(1 + \frac{JLW}{R}\right)$

$\arg(H(JW)) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{LW}{R}\right)$

$W = 0 \to \arg|H(JW)| = -\operatorname{arctg}(0)$

$W \to \infty \to \arg|H(JW)| = -\operatorname{arctg}\left(tg\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\arg(H(JW)) = -\frac{\pi}{2}$

$\arg tg(0) = \operatorname{arctg}(tg\,\alpha = 0)$

$\arg tg\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0\right) \Rightarrow \alpha = 0$ $\boxed{\text{règle}}$

$\operatorname{arctg} x = \alpha$

$x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4- la fréquence de coupure et le type de filtre :

$|H(JW)| = 1$ et pour tout les fréquences entre 0 et W_c : $|H(JW)| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour tout les fréquences $> W_c$ ou $|H(JW)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

le filtre c'est passe bas

5- Déterminer la sortie Si $i(t) = \cos(t)$.

$i(t) = I_{max} \cos(W_0 t + \varphi) = I_{max} \cos W_0 t$

$i(t) = \cos(t)$. $W = W_0 = 1$ et $I_{max} = 1$

$i(t) = 1 \cos(t + \varphi)$

$i_2(t) = \cos(t)$ $W_0 \lll W_c$

$i_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ si $W_0 = W_c$

$i(t) = \cos(t) = 1 \cos(W_0 t + 0) \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ W_0 = 1\,rad/s \\ \varphi = 0\,rad \end{cases}$

$W_0 = 1$, $W_c = 1$

$I_L(W_0) = H(JW_0) \cdot I(W_0)$

$$\begin{cases} A_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varphi_s = -\frac{\pi}{4} \cdot 0 = \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} i_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} i_2(t)$$

$$\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Serie De TD N°03

Exo n°1 :

$x(t) \rightarrow$ filtre anti repliement $\rightarrow \otimes \xrightarrow{x_e(t)}$ CAN $\rightarrow$ traitement de données

$\rightarrow$ CNA $\rightarrow$ filtre de reconstruction $\rightarrow x_r(t)$

1 - Calculer $x(t)$:

Cas 1 :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$$= \int_{-f_2}^{-f_1} \alpha e^{j2\pi f t} df + \int_{-f_1}^{f_1} e^{j2\pi f t} df + \int_{f_1}^{f_2} \alpha e^{j2\pi f t} df$$

$$x(t) = \frac{\alpha}{j2\pi t} e^{j2\pi f t}\Big|_{-f_2}^{-f_1} + \frac{1}{2j\pi t} e^{j2\pi f t}\Big|_{-f_1}^{f_1} + \frac{\alpha}{j2\pi t} e^{j2\pi f t}\Big|_{f_1}^{f_2}$$

$$x(t) = \frac{\alpha}{j2\pi t}\left[e^{-j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_2 t}\right] + \frac{1}{j2\pi t}\left[e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}\right] + \frac{\alpha}{j2\pi t}\left[e^{j2\pi f_2 t} - e^{j2\pi f_1 t}\right]$$

On sait que ~~sin~~ : $\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

$$x(t) = \frac{\alpha}{\pi t}\left[\frac{e^{-j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_2 t} + e^{j2\pi f_2 t} - e^{j2\pi f_1 t}}{2j}\right] + \frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2j}\right]$$

$$x(t) = \frac{\alpha}{\pi t}\left[\frac{e^{-j2\pi f_1 t} - e^{j2\pi f_1 t}}{2j}\right] + \frac{\alpha}{\pi t}\left[\frac{e^{j2\pi f_2 t} - e^{-j2\pi f_2 t}}{2j}\right] + \frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2j}\right]$$

$$x(t) = -\frac{\alpha}{\pi t}\left[\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2j}\right] + \frac{\alpha}{\pi t}\left[\frac{e^{j2\pi f_2 t} - e^{-j2\pi f_2 t}}{2j}\right] + \frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2j}\right]$$

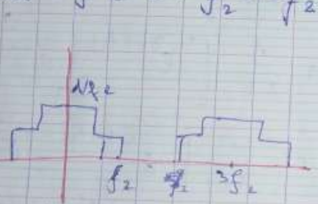
$$x(t) = -\frac{\alpha}{\pi t} \sin(2\pi f_1 t) + \frac{\alpha}{\pi t} \sin(2\pi f_2 t) + \frac{1}{\pi t} \sin(2\pi f_1 t)$$

~~$\sin(2\pi f) = \dfrac{e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}}{2j}$~~ $\boxed{\dfrac{\sin x}{x} = \text{sinc}\, x}$

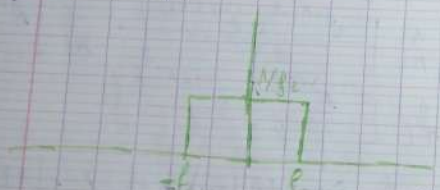
$\Rightarrow x(t) = -2\alpha f_1 \left[\frac{\sin(2\pi f_1 t)}{2\pi f_1 t}\right] + 2\alpha f_2 \left[\frac{\sin(2\pi f_2 t)}{2\pi f_2 t}\right]$
$+ 2 f_1 \left[\frac{\sin(2\pi f_1 t)}{2\pi f_1 t}\right].$

$x(t) = -2\alpha f_1 \, \mathrm{sinc}(2\pi f_1 t) + 2\alpha f_2 \, \mathrm{sinc}(2\pi f_2 t)$
$+ 2 f_1 \, \mathrm{sinc}(2\pi f_1 t)$

2) $\boxed{1^{er}\ \text{Cas}}$: $f_c = f_{max} = f_2$ et $f_2 = 3 f_2$



- filtre de recuperation :



$H_r(f) = \frac{1}{3 f_e}$ $f_2 < f_c < 2 f_2$ en pratique on choisit $f_{cr} = \frac{3}{2} f_e$

Interpolation : On a $f_{max} = f_c - f_2$
et $f_2 = 3 f_2 > 2 f_{max}$. Ainsi que le signal a bien préparé a l'echantillonage. C'est la condition de Shannon est Verifier, Alors la reconstitution est Verifier

$\boxed{2^{em}\ \text{Cas}}$: $f_c = f_2$ et $f_2 \ggg f_1$ donc f_1 peut négligé

$f_e = \frac{3 f_2 - f_1}{2}$ le spectre de signal echantillons

- filtre de reconstruction :

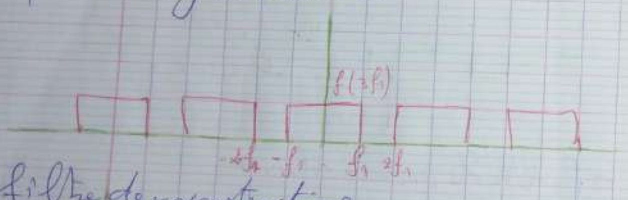
$H_r(f) = \frac{1}{f_e}$ $f_1 < f_{cr} \leq ??$
en pratique on choisit $f_r = ??$

Interpolation :

On a $f_{max} = f_c - f_2$ et $f_e < 2 f_{max}$
Ainsi le signal est bien préparé à l'échantillonnage
La condition de Shannon n'est pas Verifier
Alors impossible d'avoir une reconstruction

$3^{ème}$ Cas : $f_c = f_1$ et $f_e = 3 f_1$

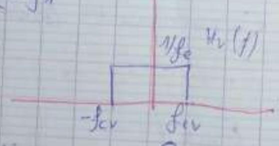
spectre de signal discret :



filtre de reconstruction :

$H_r(f) = \frac{1}{3f_1}$ $\quad f_1 < f_{cr} < 2 f_1$

On pratique $f_{cr} = \frac{3}{2} f_1$



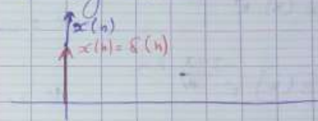
Interpolation :

Comme $f_{max} = f_1$ et $f_e \geq 2 f_{max}$ ainsi la condition de shannon est verifier et le signal est bien preparé à l'echantillonage Alors la reconstruction est parfaite et $X_r(t) \approx X(t)$

TD n° 04

traçage des signaux :

a -

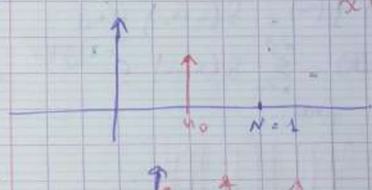


$x(n) = \delta(n)$

b -

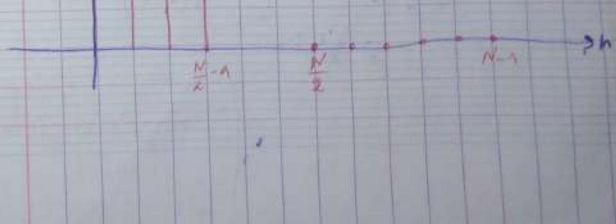
$x(n) = \delta(n - n_0)$

$0 \leq n_0 \leq N-1$



c -

d -



2- Calculer la DFT :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0 : N-1$$

a. $x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0 : N-1$

$$\delta(n-n_0)\, f(n) = \delta(n-n_0)\, f(n_0)$$

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-0)\, \cancel{e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,0}}^{\,1} = 1$$

b. $x(n) = \delta(n-n_0)$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0 : N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \sum_{n=0}^{N-1} \cancel{\delta(n-n_0)}^{\,1}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Propriété impuls de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$$

$$\delta(t-t_0)\, s(t) = \delta(t-t_0)\, s(t_0)$$

c. $x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

n pair $\Rightarrow n = 2m$ avec $m = 0 : \frac{N}{2}-1$

$$x(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \cancel{x(2m)}^{\,0}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k2m}$$

$$x(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k2m}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \alpha^m = \frac{1-\alpha^M}{1-\alpha}$$

$$x(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k2\frac{N}{2}}}{1 - e^{-j\frac{2}{N}\pi k 2}} = \frac{1 - \cancel{e^{-j2\pi k}}^{\,1}}{1 - \cancel{e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}^{\,1}}$$

a. $k=0$ $x(0) = \frac{0}{0}$ ([illegible]) ([illegible])

$$x(0) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} 1 = N/2$$

a. $k = \frac{N}{2} \Rightarrow x(N/2) = \frac{0}{0}$ ~~x~~ ($\frac{N}{2}$ [illegible]) ([illegible])

$$x(N/2) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} 1 = N/2$$

$$x(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} & ,\ k = 0,\ k = \frac{N}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

d. $X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 1\, e^{-J\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} 0\, e^{-J\frac{2\pi}{N}kn}$

$$= \frac{1 - e^{-J\frac{2\pi}{N}k\frac{N}{2}}}{1 - e^{-J\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - e^{-Jk\pi}}{1 - e^{-J\frac{2\pi}{N}k}}$$

(-1)

- si $k = 0 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow X(0) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{0} = \frac{N}{2}$
- si $k \neq 0$ et pair $\Rightarrow X(k) = 0$
- si k impair

$$X(k) = \frac{2}{1 - e^{-J\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{2}{e^{-J\frac{2\pi}{N}\frac{k}{2}}\left(e^{+J\frac{2\pi}{N}\frac{k}{2}} - e^{-J\frac{2\pi}{N}\frac{k}{2}}\right)}$$

$$= \frac{2}{\cancel{2}J\, e^{-J\frac{2\pi}{N}k/2}\left(\frac{e^{J\frac{2\pi}{N}k/2} - e^{-J\frac{2\pi}{N}k/2}}{2J}\right)}$$

$$= \frac{-J\, e^{+Jk\pi/N}}{\sin k\frac{\pi}{N}}$$

Exo n°3

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

$$\sum_{0}^{N-1} x(n) \cdot x'(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{+J\frac{2\pi}{N}kn}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X'(l)\, e^{-J\frac{2\pi}{N}ln}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \sum_{l=0}^{N-1} X'(l) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)n} = \frac{1 - e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)N}}{1 - e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)}}$$

$$= \frac{1 - e^{J2\pi(k-l)}}{1 - e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)}} = \frac{0}{1 - e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)}}$$

- si $k = l \Rightarrow = \frac{0}{0}$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{0} = N$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{J\frac{2\pi}{N}(k-l)n} = \begin{cases} N & \text{si } k-l=0 \\ 0 & \text{si } k-l\neq 0 \end{cases} \Rightarrow N\,\delta(k-l)$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\neq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{l=0}^{N-1} X^*(l)\,\delta(k-l)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, X^*(k) \cancel{\sum_{l=0}^{N-1} \delta(k-l)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

donc le théorème de Parseval démontré

Exo n°4 :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} \quad , k = 0 : N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_N^{(2n+1)k} \quad , k = 0 : N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_{N/2}^{kn} \quad , k = 0 : N-1$$

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} & , k = 0 : \frac{N}{2}-1 \\ X(k+\frac{N}{2}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_{\frac{N}{2}}^{(k+\frac{N}{2})n} + W_N^{k+\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_{\frac{N}{2}}^{(k+\frac{N}{2})n} & k = 0 : \frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

tel que :

$$\begin{cases} W_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}n} = 1 & \text{pair } (2\pi k) \\ W_N^{\frac{N}{2}} = -1 & \text{impair } (k\pi) \end{cases}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow W_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}n} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}\frac{N}{2}n} = 1$$

$$e^{-j2\pi n} = \cos 0 - j\sin(2\pi n)$$

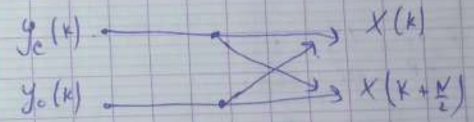
$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_{N/2}^{kn} \\ X(k+\frac{N}{2}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} - W_N^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} \end{cases}$$

On pose que :

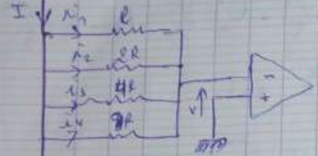
$$\begin{cases} y_e(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} & , k = 0 : \frac{N}{2}-1 \\ y_o(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, W_{\frac{N}{2}}^{kn} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(k) = y_e(k) + W_N^{k}\, y_o(k) & k = 0 : \frac{N}{2}-1 \\ X(k+\frac{N}{2}) = y_e(k) - W_N^{k}\, y_o(k) & k = 0 : \frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

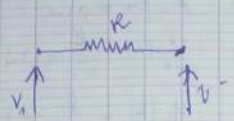
$$\begin{bmatrix} X(k) \\ X(k+\frac{N}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_N^{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e(k) \\ y_o(k) \end{bmatrix}$$



EX n° 2 Serie 3



Avec $V^- = V^+ = 0$



On applique loi de neoud :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$V_1 = R I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R}$ / $V_2 = R I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_2}{2R}$

$V_3 = R I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{V_3}{4R}$ / $V_4 = R I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{V_4}{8R}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{2R} + \frac{V_3}{4R} + \frac{V_4}{8R}}$$

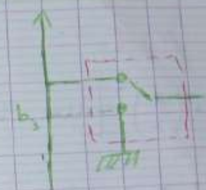
$$V_0 = -R_f I \Rightarrow I = \frac{-V_0}{R_f}$$

$$\Rightarrow \frac{-V_0}{R_f} = \frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{2R} + \frac{V_3}{4R} + \frac{V_4}{8R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = -R_f \left[\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{2R} + \frac{V_3}{4R} + \frac{V_4}{8R}\right]}$$

4 bits $b_3 b_2 b_1 b_0$	Sortie V_0
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15

Completement de Tableau :



$V_1 = b_3 V_{ref}$ avec $b_3 = 0$

$V_2 = b_2 V_{ref}$ avec $b_2 = 0$

$V_3 = b_1 V_{ref}$ avec $b_1 = 0$

$V_4 = b_0 V_{ref}$ avec $b_0 = 0$

$$V_0 = -R_f \left[\frac{b_3 V_{ref}}{R} + \frac{b_2 V_{ref}}{2R} + \frac{b_1 V_{ref}}{4R} + \frac{b_0 V_{ref}}{8R}\right]$$

$$V_0 = -\frac{R_f V_{ref}}{R}\left[b_3 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8}\right]$$

$$V_0 = -\frac{R_f}{2^3} \frac{V_{ref}}{R}\left[2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0\right]$$

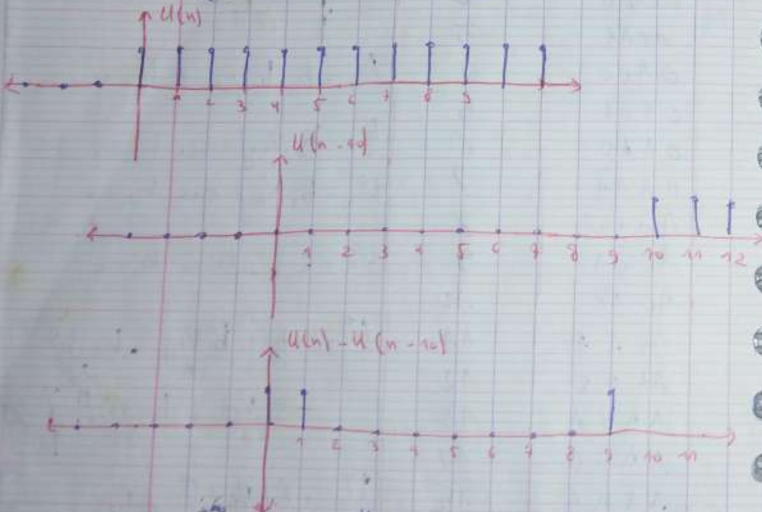
Avec $R_f = 1\,\Omega$ et $V_{ref} = 8\,V$

$$\boxed{V_0 = 2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0}$$

Serie N° 05

Exercice N° 1

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[U(n) - U(n-10)\right]$$



$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n$$

$$X(z) = \frac{1 - \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{z^{-1}}{2}} = \frac{z^{10} - \frac{1}{2^{10}}}{z^9\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

* les pôles : $\cancel{P_1 = \frac{1}{2}}$ (pôles et zeros en même temps)

$P_2 = 0$, est un pôle d'ordre 9

* les zeros : $X(z) = 0 \Rightarrow z^{10} - \frac{1}{2^{10}}$

$$z_k = \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi k}{10}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

$$\left(\frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi k}{10}}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}}$$

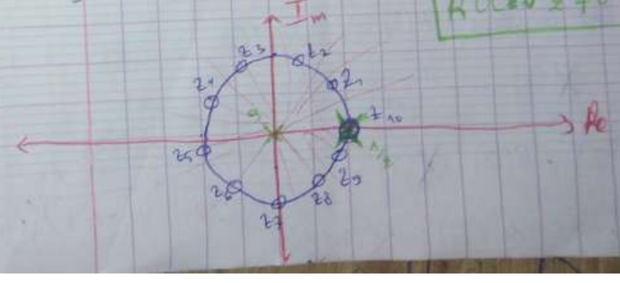
$$Z(k) = \frac{\cancel{(z - z_0)}(z - z_1)(z - z_2) \times \cdots \times (z - z_9)}{z^9 \cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}}$$

On aura :

9 pôles à l'origine $z = 0$

9 zeros : $z_1, z_2, \dots, z_9$

$\boxed{\text{ROC } \forall\, z \neq 0}$



Exercice N°2

$$h(n) = \begin{cases} 3^n & \text{si } n < 0 \\ \left(\frac{2}{5}\right)^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{-1} 3^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n z^{-n}$$

anticausal Causal

$$h(n) = \begin{cases} 3^n & n < 0 \\ \left(\frac{2}{5}\right)^n & n \geq 0 \end{cases} = -\left(-3^n U(-n-1)\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^n U(n)$$

$$\begin{cases} a^n U(n) \xleftrightarrow{z} \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}, & |z| > |a| \\ -a^n U(-n-1) \xleftrightarrow{z} \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}, & |z| < |a| \end{cases}$$

$$H(z) = -\underbrace{\frac{1}{1 - 3 z^{-1}}}_{|z| < 3} + \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}}}_{|z| > \frac{2}{5}}$$

La ROC de $H(z) = \frac{2}{5} < |z| < 3$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{-1}{(1 - 3z^{-1})(1 - z^{-1})} + \frac{1}{(1 - \frac{2}{5} z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

La ROC de $G(z) = 1 < |z| < 3$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}} + \frac{C}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}} + \frac{D}{1 - z^{-1}}$$

$$A = (1 - 3z^{-1}) \left(\frac{-1}{(1 - 3z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \Bigg|_{z=3} = \frac{-3}{2}$$

$$B = (1 - z^{-1}) \left(\frac{-1}{(1 - 3z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \Bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \left(1 - \frac{2}{5} z^{-1}\right) \left(\frac{1}{(1 - \frac{2}{5} z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \Bigg|_{z = \frac{2}{5}} = -\frac{2}{3}$$

$$D = (1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{(1 - \frac{2}{5} z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \Bigg|_{z=1} = \frac{5}{3}$$

$$Y(z) = \frac{-3/2}{1 - 3z^{-1}} + \frac{13/6}{1 - z^{-1}} + \frac{-2/3}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}}, \quad \text{ROC } 1 < |z| < 3$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{3}{2} (3)^n U(-n-1) + \frac{13}{6} U(n)$$

Remind

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$h(n) \xleftrightarrow{z} H(z)$$

$$Y(z) \longleftrightarrow H(z) X(z) \xleftrightarrow{z^{-1}} y(n)$$

$Y(z)$ = la réponse impulsionnelle

$y(n) =$

Exo n° 3

$$X(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

(a) $x(n)$ est Causal ⇒ les deux termes sont Causales

⇒ ROC est $|z| > 1$

Alors $x(n) = 2(1)^n u(n) - (0.5)^n u(n)$

$= (2 - 0.5^n) u(n)$

(b) $x(n)$ est anticausal ⇒ les deux termes sont anti-Causal ⇒ ROC est $|z| < 0.5$

Alors $x(n) = \left[-2 + (0.5)^n\right] u(-n-1)$

(c) $x(n)$ a Un terme Causal et l'autre anti-Causal

⇒ $x(n)$ est two-sided

⇒ ROC est $0.5 < |z| < 1$

Exo n° 4

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.7 z^{-1} + 0.12 z^{-2}} \cdot X(z)$$

$$x(n) = n\, u(n) \Rightarrow \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$Y(z) = \frac{z^{-2} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})^2 \left(1 - \frac{3}{10} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{5} z^{-1}\right)}$$

Le système est stable car les pôles de $H(z)$ sont dans le cercle Unité

$$Y(z) = \frac{4.76 z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{-12.36}{(1 - z^{-1})} + \frac{-26.5}{\left(1 - \frac{3}{10} z^{-1}\right)} + \frac{38.9}{\left(1 - \frac{2}{5} z^{-1}\right)}$$

$$y(n) = \left[4.76 n - 12.36 - 26.5 \left(\frac{3}{10}\right)^n - 38.9 \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] u(n)$$

système stable : le pôls de $H(z)$ est < 1

Puisque Roc $z > 1$