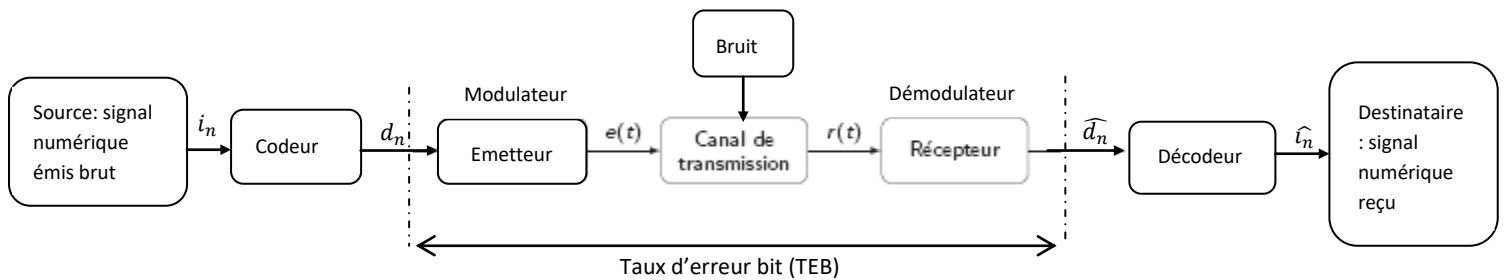


# Chapitre 1

## Rappels sur les modulations numériques

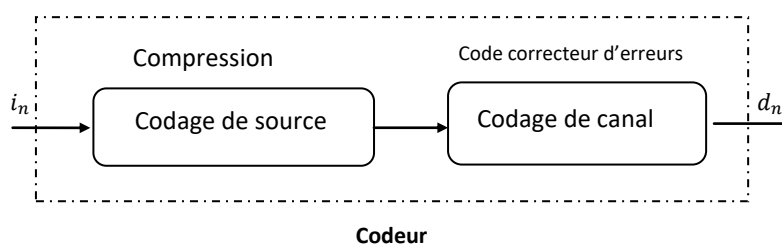
### I-Schéma de principe d'une chaîne de transmission numérique



Synoptique d'une transmission numérique

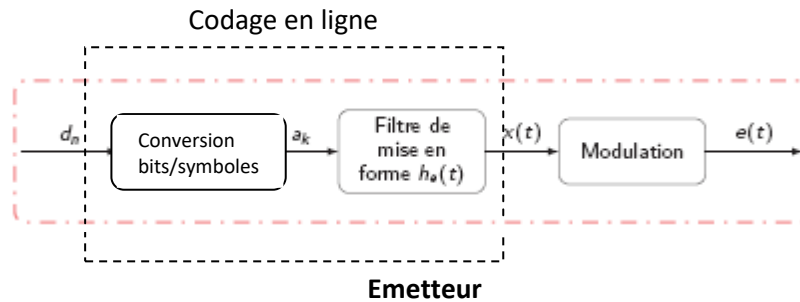
**I-1- Codeur :** il permet de transformer le signal numérique brut en un nouveau signal numérique optimisé et robuste aux erreurs. Il est composé de :

- Le codeur de source a pour rôle la suppression de certains bits assez peu significatifs. Le décodeur de source réalise l'opération inverse. Les systèmes de Compression/Décompression, tels que l'on peut les rencontrer pour les signaux audio ou vidéo numériques, font partie du codage source.
- Codage de canal (ou codage détecteur et/ou correcteur d'erreurs): consiste à insérer dans le message des bits dits de « *redondance* » suivant une loi donnée pour permettre de détecter et de corriger les éventuelles erreurs de transmission.



### I-2- Emetteur

L'émetteur permet de transformer un signal numérique  $d_n$  en un signal physique  $e(t)$  (onde électromagnétique, onde optique, signal électrique, etc) qui puisse être transmis sur le canal de transmission.



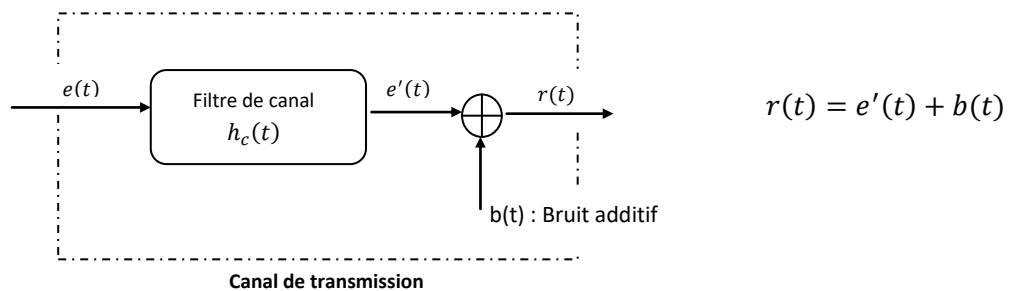
$d_n$  représente un bit  $n$  et  $d_n \in \{0,1\}$ ,  $a_k$  représente un symbole  $k$ .

$x(t)$  : signal en bande de base,  $e(t)$  : signal en bande transposée.

Le filtre de mise en forme (ou filtre d'émission) est un filtre linéaire de réponse impulsionnelle  $h_e(t)$ . Il permet de transformer le signal numérique en un signal physique.

### I-3- Canal de transmission

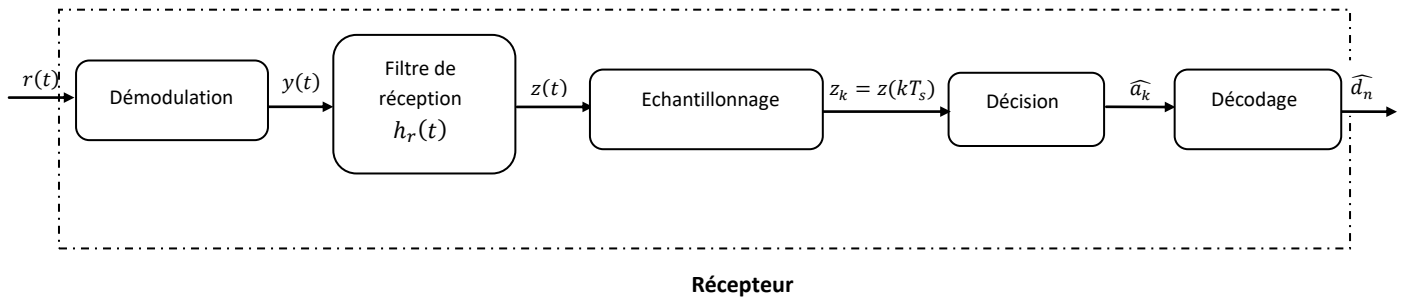
Il est modélisé comme suit :



Dans le cas idéal, le filtre de canal est linéaire et invariant dans le temps (filtre linéaire). Il est supposé possédant une fonction de transfert  $H_c(f)$  constante sur une bande passante infinie.

### I-4- Récepteur

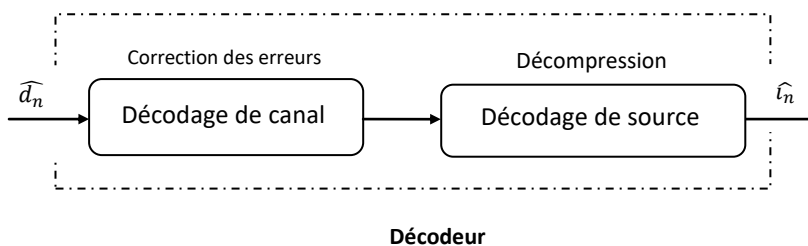
Le récepteur a pour fonction de reconstituer le signal numérique envoyé  $\hat{d}_n$  à partir du signal physique reçu  $r(t)$ .



- Démodulation : inverse de l'étape de modulation.
- Filtre de réception : il est construit de manière à minimiser les interactions entre symboles et à maximiser le rapport signal sur bruit.
- Echantillonnage :
  - Transformation du signal physique en un signal discret,
  - Nécessite une synchronisation sur le temps d'horloge.
- Décision :
  - $\hat{a}_k$  : décision sur le symbole  $a_k$  émis.
  - La décision sur le symbole  $a_k$  est sensible au bruit ajouté par le canal,
- Décodage : les symboles ainsi détectés sont convertis en bits d'information.  
 $\hat{d}_n$  est estimé pour le bit  $d_n$ .

### I-5- Décodeur

A partir de l'estimation du signal numérique envoyé, une reconstruction du message original (texte, son, image, vidéo,...) est faite.



Inversion des étapes de codage de source et codage de canal.

$$\hat{d}_n \in \{0,1\} \rightarrow \hat{i}_n \in \{0,1\}$$

## II- Modulation en bande de base

Une transmission en bande de base signifie qu'il n'y a pas d'étapes de Modulation / Démodulation sur une fréquence porteuse:

$$e(t) = x(t)$$

$$y(t) = r(t)$$

## II-1- Rappel sur le codage en ligne

Le codage en ligne comprend :

- Conversion bit / symbole :  $d_n \rightarrow a_k$
- Mise en forme :  $a_k \rightarrow x(t)$

**But :** Donner de bonnes propriétés au signal physique créée (largeur de bande, raies, annulation du spectre à certaines fréquences,...).

Pour un signal binaire  $d_n$  donné, un bit est émis toutes les  $T_b$  secondes ;  $T_b$  : période d'émission (cadence horloge).

Le débit binaire, qui est le nombre de bits émis par seconde, est donné par :

$$D_b = \frac{1}{T_b} \quad [bit/seconde]$$

### II-1-1- Transcodage : conversion bit / symbole

Il permet de remplacer des bits ou des groupements de bits par des symboles.

On passe de deux valeurs possibles (0, 1) à M valeurs possibles.

Une manière de procéder est d'utiliser le **codage par dictionnaire**.

#### Codage par dictionnaire

Le dictionnaire comprend M symboles (M est appelée **valence**).

Des groupements de  $m$  bits chacun sont construits et, à chaque groupement, est associé un symbole du dictionnaire, avec :

$$M = 2^m \quad \text{ou} \quad m = \log_2 M$$

Si  $M=2$  : il s'agit du codage binaire.

Si  $M>2$  : on dit que le codage est M-aire (pour  $M=4$ , on parle de codage 4-aire ou quaternaire).

Plusieurs façons d'attribuer un symbole  $a_k$  à chaque groupe de  $m$  bits.

- Codage M-aire unipolaire :

$$a_k \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$$

- Codage M-aire antipolaire :

$$a_k \in \{-(M-1), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, M-1\}$$

(uniquement les valeurs impaires).

#### Exemple :

Pour un codage quaternaire antipolaire (appelé également 2B1Q), les symboles pourraient être codés de la manière suivante :

Mot binaire associé	Symbole M-aire
0 0	+1
0 1	+3
1 1	-3
1 0	-1

$$\underbrace{001010011101}_{\text{Suite de bits } d_n} \rightarrow \underbrace{+1 \quad -1 \quad -1 \quad +3 \quad -3 \quad +3}_{\text{Suite de symboles } a_k}$$

On utilise un **codage de Gray** : un bit de différence pour deux états successifs.

Un symbole est émis toutes les  $T_s$  secondes ; c'est la **Période symbole** :

$$T_s = mT_b = \log_2 M \cdot T_b = \frac{\log_2 M}{D_b}$$

La **Rapidité de modulation (ou débit symbole)** correspond au nombre de changements d'états par seconde. Elle est donnée par :

$$R = \frac{1}{T_s} = \frac{D_b}{\log_2 M} \quad [\text{baud}]$$

### II-1-2- Mise en forme

L'entrée du filtre de mise en forme est une suite de symboles M-aire ; qui est une suite aléatoire.

On construit le signal continu  $a(t)$  ; représentation continue de la suite de symboles  $a_k$ .

$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT_s)$$

et  $\delta$  : impulsion de Dirac.

Le signal  $x(t)$  est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) * h_e(t) \\ &= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT_s) \right) * h_e(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s) \end{aligned}$$

(\*) désigne l'opération de convolution.

$h_e(t)$  est l'impulsion de base et c'est une quantité déterministe.

Chaque impulsion dans  $x(t)$  est un multiple de l'impulsion de base.

La suite  $a_k$  module l'amplitude des impulsions  $h_e(t)$  à la cadence d'émission des symboles ( $1/T_s$ ). On parle de **Modulation par Impulsion en Amplitude (MIA)** qui est une modulation en bande de base.

Parmi les principaux codes MIA, on retrouve :

- Code NRZ : la réponse impulsionnelle du filtre NRZ est :

$$h_e(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Code RZ :

$$h_e(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T_s/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Code biphasé ou de Manchester :

$$h_e(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T_s/2 \\ -A & \text{si } T_s/2 \leq t < T_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le choix de  $h_e(t)$  définit les caractéristiques spectrales et les performances du système.

---

## II-2- Energie et puissance

L'énergie totale  $E_x$  d'un signal continu  $x(t)$  est définie par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Lorsque  $E_x < +\infty$ , le signal est dit à énergie finie.

Pour un signal  $x(t)$  en bande de base, l'énergie totale est :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s) \right|^2 dt$$

Dans l'expression ci-dessus, les  $a_k$  sont aléatoires donc inconnus. Par conséquent, au lieu de définir une énergie totale, on va définir une énergie moyenne.

### II-2-1- Energie moyenne par symbole et énergie moyenne par bit

L'énergie associée à l'émission d'un seul symbole  $a_i$  est donnée par:

$$E_{ai} = \int_{-\infty}^{+\infty} |a_i h_e(t)|^2 dt = |a_i|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |h_e(t)|^2 dt = |a_i|^2 \cdot E_{he}$$

$E_{he}$  : énergie totale de la réponse impulsionnelle  $h_e(t)$  du filtre de mise en forme.

Si on suppose que tous les symboles du dictionnaire sont équiprobables (de densité de probabilité  $p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_M)$  et tel que  $p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_M) = 1$ ), l'énergie moyenne par symbole peut être définie par :

$$E_{sym} = E\{E_{ai}\} = \sum_{i=1}^M E_{ai} \cdot p(a_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_{ai} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 E_{he}$$

$E\{E_{ai}\}$  : espérance mathématique sur l'ensemble des énergies associées aux M symboles.

L'énergie moyenne par bit, exprimée en nombre de Joules par bit, est :

$$E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \cdot \log_2 M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 E_{he}$$

### II-2-2- Ecriture de l'énergie moyenne en fonction de la moyenne et de la variance

Soient  $\mu_a$  et  $\sigma_a^2$  la valeur moyenne et la variance des symboles du dictionnaire.

$$\mu_a = E\{a_i\} = \sum_{i=1}^M a_i \cdot p(a_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i$$

$$\sigma_a^2 = E\{(a_i - \mu_a)^2\} = \sum_{i=1}^M (a_i - \mu_a)^2 \cdot p(a_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (a_i - \mu_a)^2$$

Cette expression conduit à :

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i^2 - \mu_a^2$$

$$\text{et} \quad \sigma_a^2 + \mu_a^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i^2$$

Ce qui permet d'écrire :

$$E_{bit} = \frac{1}{\log_2 M} (\sigma_a^2 + \mu_a^2) E_{he}$$

**Exemple** : Pour un dictionnaire quaternaire antipolaire (2B1Q),

$M=4$  et  $a_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$

$$E_{sym} = \frac{1}{4}((-3)^2 + (-1)^2 + (+1)^2 + (+3)^2)E_{he} = 5E_{he}$$

$$E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 4} = \frac{5}{2}E_{he}$$


---

### II-2-3- Formules générales de l'énergie moyenne

- Pour un dictionnaire M-aire unipolaire où  $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ ,

$$E_{bit} = \frac{1}{\log_2 M} (\sigma_a^2 + \mu_a^2) E_{he} = \frac{(M-1)(2M-1)}{6 \log_2 M} E_{he}$$

- Pour un dictionnaire M-aire antipolaire où  $a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ , on a :

$$\mu_a = 0 \quad , \quad \sigma_a^2 = E\{a_i^2\} = \frac{M^2 - 1}{3}$$

$$\text{Et} \quad E_{bit} = \frac{\sigma_a^2}{\log_2 M} E_{he} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{he}$$

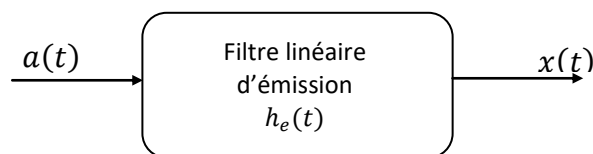
### II-2-4- Puissance émise moyenne

Chaque symbole est émis durant une période  $T_s$ . On peut exprimer la puissance moyenne totale du signal  $x(t)$ , nommée aussi puissance émise moyenne, par :

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{E_{sym}}{T_s} \\ &= \frac{E_{bit}}{T_b} = E_{bit} \cdot D_b \end{aligned}$$

### II-3- Densité Spectrale de Puissance (DSP) pour un signal $x(t)$ modulé en bande de base

Considérons le signal  $x(t)$  à la sortie du filtre linéaire d'émission tel que :



$$x(t) = a(t) * h_e(t) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT_s) \right) * h_e(t)$$

$h_e(t)$  quantité déterministe,

$a(t)$  est un signal aléatoire et  $x(t)$  dépend de  $a(t)$ ,  $x(t)$  est donc aléatoire.

La DSP à la sortie du filtre linéaire est :

$$\Gamma_x(f) = \Gamma_a(f) \cdot |H_e(f)|^2$$

$\Gamma_a(f)$  : DSP du signal aléatoire  $a(t)$ ,

$H_e$  fonction de transfert du filtre d'émission.

Dans le cas où les symboles sont supposés équiprobables et indépendants (non corrélés),  $\Gamma_a(f)$  s'écrit :

$$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} + \frac{\mu_a^2}{T_s^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Ce qui implique que :

$$\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H_e(f)|^2 + \frac{\mu_a^2}{T_s^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \left| H_e\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \right]$$

Le deuxième terme du membre de droite représente des raies fréquentielles pour  $f = \frac{k}{T_s}$ .

- **Cas du dictionnaire M-aire antipolaire**

$$\mu_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H_e(f)|^2$$

La puissance moyenne du signal s'écrit par définition :

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df = \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df$$

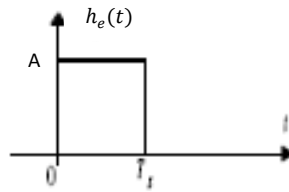
D'après le théorème de Parseval,

$$P_x = \frac{\sigma_a^2}{T_s} E_{he}$$

- **Cas du dictionnaire M-aire unipolaire**

$\mu_a \neq 0$ , la distribution de la puissance est similaire à celle du cas antipolaire à laquelle sont ajoutées des raies fréquentielles pour  $f = \frac{k}{T_s}$ .

**Exemple :** Traçons la DSP pour un signal NRZ M-aire antipolaire. Le filtre NRZ considéré est d'amplitude A et de durée d'impulsion  $T_s$ . Les symboles  $a_k$  sont supposés équiprobables et non corrélés.



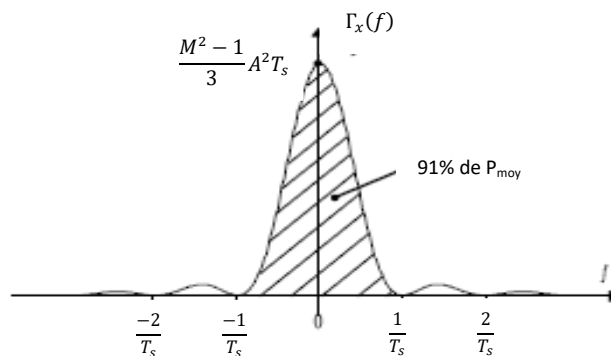
Pour ce filtre, la fonction de transfert est un sinus cardinal, telle que :

$$H_e(f) = AT_s \text{sinc}(fT_s)$$

Sachant que  $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{3}$ , la DSP du signal  $x(t)$  à la sortie du filtre d'émission est donnée par :

$$\Gamma_x(f) = \frac{M^2 - 1}{3} A^2 T_s \text{sinc}^2(fT_s)$$

La puissance du signal en bande de base est répartie dans la bande  $[-B, B]$  où  $B \approx \frac{1}{T_s}$  est la largeur de bande du signal.



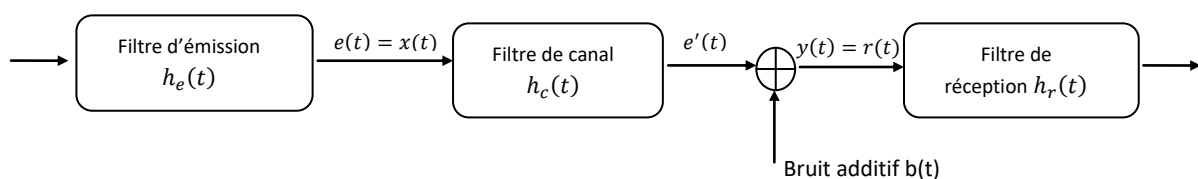
La forme de la DSP est dépendante du filtre de mise en forme utilisé.

#### II-4- Performances en bande de base en présence de bruit blanc additif Gaussien

**Objectif :** - Obtenir un rapport signal sur bruit (SNR) maximum à la sortie du récepteur.  
- Obtenir une probabilité d'erreurs sur les bits minimale.

##### II-4-1- Hypothèses

On travaille en bande de base (pas de modulation / démodulation sur fréquence porteuse).



On suppose le canal de transmission réel (bande passante BP limitée), invariant ( $h_c(t)$  : fonction déterministe).

On suppose la présence d'un Bruit Blanc Additif Gaussien (BBAG) (ou AWGN : Additif White Gaussian Noise) de densité spectrale de puissance bilatérale  $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$ , exprimée en W/Hz (voir annexe C1).

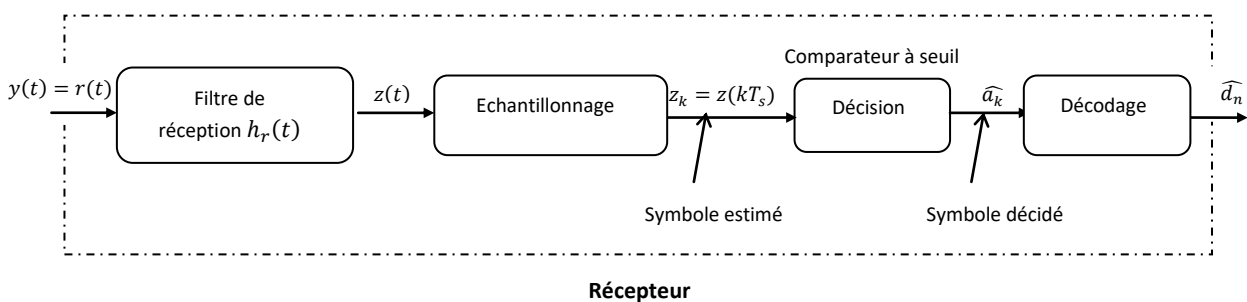
$$e(t) = x(t)$$

$$y(t) = r(t) = e'(t) + b(t)$$

$x(t)$  : signal MIA et  $y(t)$  : signal à l'entrée du filtre de réception.

Dans la description des modulations en bande de base,  $x(t)$  est un signal réel, par conséquent,  $e'(t)$  est un signal réel également.

### II-4-2- Etude au niveau du récepteur



A l'entrée du filtre de réception de réponse impulsionnelle  $h_r(t)$ , on a :

$$y(t) = x(t) * h_c(t) + b(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s) * h_c(t) + b(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) + b(t) \end{aligned}$$

Avec  $h(t) = h_e(t) * h_c(t)$

Le filtre de réception est un filtre linéaire totalement défini par sa fonction de transfert  $H_r(f)$ .

A la sortie du filtre de réception, on a :

$$z(t) = y(t) * h_r(t)$$

$$= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) + b(t) \right) * h_r(t)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) * h_r(t) + b(t) * h_r(t)$$

On pose

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) * h_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p(t - kT_s) = s(t)$$

et  $b(t) * h_r(t) = n(t)$

d'où  $z(t) = s(t) + n(t)$

avec  $n(t)$  : bruit Gaussien filtré dont la DSP est donnée par :

$$\Gamma_n(f) = \Gamma_b(f) \cdot |H_r(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |H_r(f)|^2$$

et  $p(t)$  : réponse impulsionnelle globale du système de transmission, donnée par :

$$p(t) = h(t) * h_r(t) = h_e(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

Le filtre global est composé du filtre d'émission, du filtre de canal et du filtre de réception. Sa fonction de transfert dans le domaine fréquentiel est donnée par :

$$P(f) = H_e(f) \cdot H_c(f) \cdot H_r(f)$$

En sortie de l'échantillonneur et pour décoder le symbole  $a_k$ , il y a prélèvement d'échantillons aux instants de décision ( $t_k = kT_s + \tau$ ) ;  $\tau$  est le temps de retard.

$$z_k = z(kT_s + \tau) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{k'} \cdot p(kT_s + \tau - k'T_s) + n(kT_s + \tau)$$

$$= a_k \cdot p(\tau) + \sum_{\substack{k' \neq k \\ k' \in \mathbb{Z}}} a_{k'} \cdot p((k - k')T_s + \tau) + n(kT_s + \tau)$$

$a_k \cdot p(\tau)$  : amplitude de l'impulsion utile (contribution du symbole  $a_k$ ),

$\sum_{\substack{k' \neq k \\ k' \in \mathbb{Z}}} a_{k'} \cdot p((k - k')T_s + \tau)$  : Interférences Entre Symboles : **IES** (terme parasite),

$n(kT_s + \tau)$  : bruit  $n_k$ .

L'IES consiste en un chevauchement partiel de certains symboles adjacents. Il est relatif à tous les symboles autres que celui émis à l'instant  $kT_s$ .

Si la synchronisation est parfaite avec l'émetteur ( $\tau = 0$  : émission du symbole à l'instant  $kT_s$  et prélèvement de l'échantillon au même instant  $kT_s$ ), le signal est échantillonné de façon synchrone avec l'émetteur. L'expression précédente devient :

$$z_k = a_k \cdot p(0) + \sum_{\substack{k' \neq k \\ k' \in \mathbb{Z}}} a_{k'} \cdot p((k - k')T_s) + n(kT_s)$$

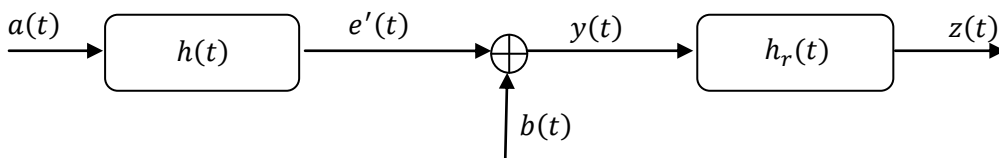
### II-4-3- Récepteur optimal

Un récepteur optimal réalise un moins d'erreurs possibles.

- IES=0  $\Rightarrow p = h_e * h_c * h_r$  correspond à la réponse impulsionnelle d'un filtre de Nyquist (voir section IV).
- Maximisation du rapport signal sur bruit (SNR) à la sortie du récepteur aux instants de décision  $kT_s$ .  $\Rightarrow$  Le filtre de réception  $h_r(t)$  doit être le **filtre adapté** à  $h(t)$ .

#### II-4-3-1- Notion de filtrage adapté

Le filtre adapté est un filtre linéaire qui maximise le SNR aux instants de décision.



On admet le résultat fondamental suivant :

Pour maximiser le SNR en sortie du récepteur, il faut :

$$H_r(f) = H^*(f) e^{-j2\pi f\tau} \quad \Rightarrow \quad h_r(t) = h^*(\tau - t)$$

Le filtre de réception optimal est adapté (avec un retard  $\tau$ ) au filtre  $h(t)$ .

La valeur de  $\tau$  étant choisie de façon à ce que l'impulsion  $h_r(t)$  soit nulle pour  $t < 0$ .

**Exercice** : démontrer l'expression  $h_r(t) = h^*(\tau - t)$ .

Cas typique (pour  $\tau = 0$ ) :

$$H_r(f) = H^*(f) \quad \Rightarrow \quad h_r(t) = h^*(-t)$$

$$p(t) = h(t) * h_r(t) = h(t) * h^*(-t)$$

$$P(f) = H(f).H^*(f) = |H(f)|^2 = |H_r(f)|^2 \quad \text{qui est réel positif}$$

Ce résultat est valable pour une IES nulle aux instants d'échantillonnage.

Le rapport signal sur bruit vaut (voir section III-1) :

$$SNR|_{max} = \frac{2E_h}{N_0}$$

$E_h$  : Energie totale de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du filtre ( $h_e, h_c$ )

Les échantillons prélevés, à la sortie de l'échantillonneur, sont :

$$z_k = z(kT_s) = a_k.p(0) + n(kT_s)$$

Sachant que  $p(0) = E_h$  pour un récepteur optimal, on aura :

$$z_k = a_k.E_h + n(kT_s)$$

Il faut estimer  $\widehat{a}_k$  à partir de  $z_k$  à l'instant de décision  $t = kT_s$ , malgré le bruit.

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f).H^*(f)e^{j2\pi ft} df$$

D'où

$$p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f).H^*(f)df$$

$$p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = E_h$$

#### II-4-4- Décision

C'est une étape supplémentaire à cause de la présence du bruit.

Dans le cas général, l'organe de décision est compliqué et fait appel à un algorithme dit de Viterbi.

Une situation particulièrement simple et importante en pratique où la décision peut être prise symbole par symbole c'est-à-dire au fur et à mesure que les valeurs en sortie du filtre adapté sont observées : C'est la **décision par seuil**.

Décision par seuil :

Utiliser un seuillage pour décider de la valeur de chaque symbole.

- On opère par comparaison avec M seuils de décision.
- On calcule  $Z_k/E_h$  et on regarde quel symbole du dictionnaire est le plus proche au sens de la distance euclidienne.
- On décide ensuite de  $\widehat{a}_k$ . La présence de distorsion et / ou de bruit peut évidemment conduire à une erreur de symbole.

**Exemple 1 :** Pour M=4,

$Z_k/E_h$	=	1,36	3,66	2,20	0,68	- 2,20
$\widehat{a}_k$	=	1	3	3	1	- 3

**Exemple 2 :** Codage binaire antipolaire,

$$z_k = E_h + n(kT_s) \quad \text{ou} \quad z_k = -E_h + n(kT_s)$$

Avec  $n(kT_s)$  aléatoire, Gaussien, de moyenne nulle.

$$\text{Si } z_k > 0 \quad \widehat{a}_k = 1$$

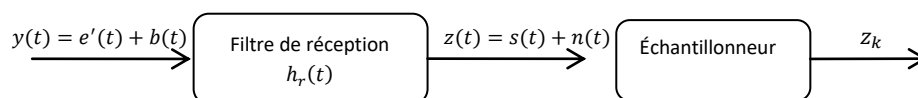
$$\text{Si } z_k < 0 \quad \widehat{a}_k = -1$$

**II-4-5- Décodage**

En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver  $\widehat{d}_n$  à partir de  $\widehat{a}_k$ .

**III- Paramètres pour l'évaluation d'une chaîne de transmission numérique**

**III-1- Rapport signal sur bruit**



**III-1-1- Rapport signal sur bruit à l'entrée du récepteur**

Le rapport signal sur bruit à l'entrée du récepteur :

$$SNR|_{entrée} = \frac{\text{Puissance du signal à l'entrée non bruité}}{\text{Puissance du bruit}} = \frac{P_{e'}}{P_b}$$

En réalité, le canal est réel (non idéal) à bande passante BP limitée. Sa fonction de transfert peut s'écrire :

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -BP \leq f \leq +BP \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Donc,

$$P_{e'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{e'} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x |H_c(f)|^2 df = \int_{-BP}^{+BP} \Gamma_x df = P_x$$

Et avec  $P_b = N_0 \cdot BP$  (voir Annexe C1)

Ceci permet d'écrire :

$$SNR|_{\text{entrée}} = \frac{P_x}{P_b} = \frac{E_{bit}}{N_0} \cdot \frac{D_b}{BP}$$

$\frac{E_{bit}}{N_0}$  est appelé **Efficacité de puissance** et est exprimé en Joule/W/Hz.

$\frac{D_b}{BP} = \eta$  est appelé **Efficacité spectrale** et est exprimé en bit/s/Hz.

### III-1-2- Rapport signal sur bruit à la sortie du filtre de réception à l'instant de décision $kT_s$

L'échantillon à l'instant  $kT_s$  s'écrit :

$$\begin{aligned} z_k = z(kT_s) &= a_k \cdot p(0) + n(kT_s) \\ &= s(kT_s) + n(kT_s) \end{aligned}$$

Le but est de retrouver la valeur de  $a_k$  à partir de  $z_k$  malgré le bruit, par conséquent, maximiser le SNR.

$$SNR = \frac{\text{Puissance instantanée de la sortie non bruité}}{\text{Puissance liée au bruit}}$$

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{E\{[a_k \cdot p(0)]^2\}}{E\{n^2(kT_s)\}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} = \frac{\sigma_a^2 p^2(0)}{\sigma_n^2}$$

La valeur maximale du SNR est réalisée lorsque le récepteur est optimal ; elle est donnée par (voir annexe C2) :

$$SNR|_{\text{max}} = \frac{E_h^2}{\frac{N_0}{2} \cdot E_h} = \frac{2E_h}{N_0}$$

### III-2- Probabilité d'erreur

Probabilité d'erreur par symbole :

$$P_{sym}^{err} \stackrel{\text{def}}{=} \text{prob}(\widehat{a}_k \neq a_k)$$

Probabilité d'erreur par bit :

$$P_{bit}^{err} \stackrel{\text{def}}{=} \text{prob}(\widehat{d}_n \neq d_n)$$

Il existe une relation entre  $P_{sym}^{err}$  et  $P_{bit}^{err}$  :

$$\frac{P_{sym}^{err}}{\log_2 M} \leq P_{bit}^{err} < P_{sym}^{err}$$

La valeur minimale de  $P_{bit}^{err}$  est atteinte lorsque un bit erroné conduit à un symbole erroné, la valeur maximale lorsque tous les bits dans un symbole sont estimés d'une manière incorrecte.

Si le SNR en sortie du filtre adapté, bien échantillonné, est maximum, la probabilité d'erreur est minimale.

### III-2-1- Probabilité d'erreur M-aire (cas dictionnaire antipolaire)

$$P_{sym}^{err} = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_h}{N_0}}\right)$$

Q : fonction de Marcum

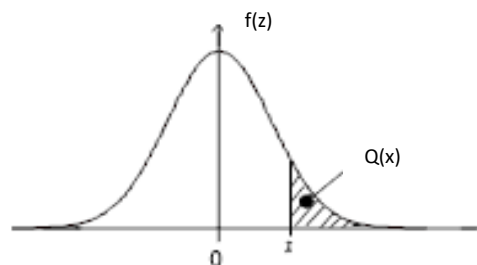
La probabilité d'erreur dépend de :

- Nombre de symboles M du dictionnaire,
- Variance du bruit blanc Gaussien  $\sigma_b^2 = \frac{N_0}{2} = \Gamma_b$ ,
- L'énergie du filtre ( $h_e * h_c$ ).

#### Fonction de Marcum Q(x)

Elle s'appelle aussi fonction d'erreur ou la « queue de la gaussienne ». Elle est définie par :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-z^2/2} dz$$



C'est une fonction monotone et décroissante.

$$Q(-\infty) = 1 \quad , \quad Q(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad Q(+\infty) = 0 \quad , \quad Q(-x) = 1 - Q(x)$$

**Remarque 1 :**

Si un codage de Gray est utilisé, une erreur de décision sur un symbole conduit, en général, à un seul bit erroné parmi  $m$ , donc :

$$P_{bit}^{err} \approx \frac{P_{sym}^{err}}{\log_2 M}$$

**Remarque 2**

Pour un canal réel à bande passante BP limitée et de gain unitaire, nous avons :

$$E_h = E_{he}$$

Et sachant que, dans le cas antipolaire :

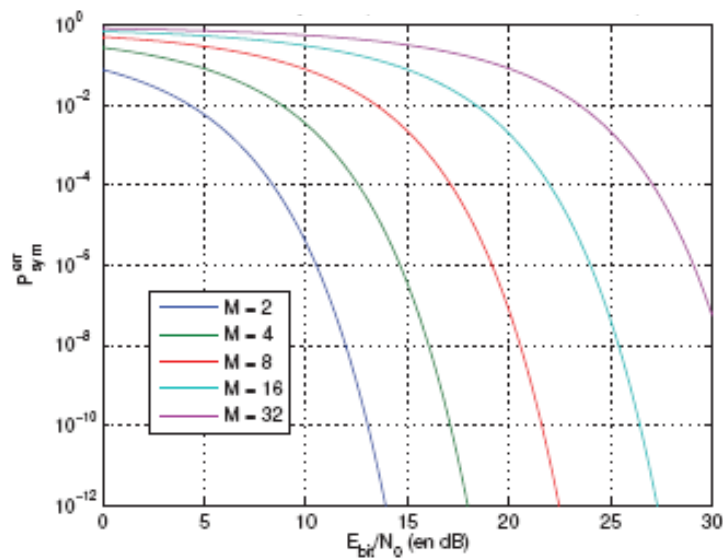
$$E_{bit} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{he}$$

La probabilité d'erreur par symbole s'écrit :

$$P_{sym}^{err} = 2 \frac{M - 1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0} \cdot \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1}} \right)$$

$N_0$ : DSP mono-latérale du BBAG en entrée du récepteur.

- Pour minimiser  $P_{sym}^{err}$ , il faut augmenter  $E_{bit}$  ( $= P_x / D_b$  ; augmenter la puissance émise moyenne  $P_x$  ou diminuer le débit binaire),
- Pour  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  fixe, plus on augmente  $M$ , plus  $P_{sym}^{err}$  augmente.
- Pour  $P_{sym}^{err}$  constante, lorsque  $M$  augmente,  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  augmente : pour un même débit binaire, le passage de  $M=2$  à  $M=4$ , par exemple, nécessite une augmentation de la puissance d'environ 4 dB.



Probabilité d'erreur symbole en fonction de  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  pour un dictionnaire M-aire antipolaire

### III-3- Efficacité spectrale

C'est une mesure de performance. Elle est définie comme étant le nombre de bits par seconde que l'on peut passer par Hertz de bande passante.

$$\eta = \frac{\text{Débit binaire}}{\text{bande passante du canal}} \quad [\text{bit/s/Hz}]$$

$$= \frac{D_b}{BP} = \frac{\log_2 M}{T_s \cdot BP}$$

#### Exemple :

Si  $\eta = 2$  et  $BP = 50\text{kHz}$ , on peut transmettre du binaire à la vitesse de 100 kbit/s.

Si  $\eta = 3$  et  $BP = 50\text{kHz}$ , on peut transmettre du binaire à la vitesse de 150 kbit/s.

Plus  $\eta$  est grand, plus le système est performant.

$\eta$  est le plus grand possible pour  $D_b$  maximal et BP minimale.

### III-4- Taux d'Erreur Bit TEB (ou BER : Bit Error Rate)

$$TEB = \frac{\text{Nombre de bits mal détectés}}{\text{Nombre total de bits émis}}$$

$TEB \sim 10^{-5}$  à  $10^{-9}$  pour les systèmes numériques.

TEB est égal à  $P_{bit}^{err}$  lorsque le nombre total de bits émis est infini.

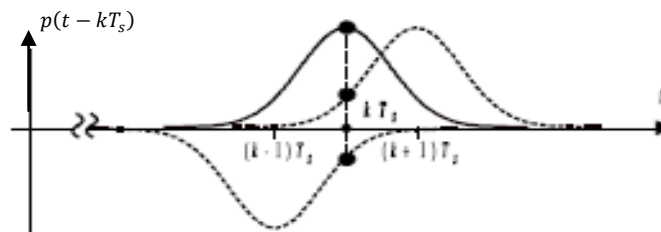
#### IV- Transmission en BB sur canal à bande limitée – Filtre de Nyquist

Soit l'échantillon  $z_k$  prélevé à l'instant  $kT_s$  :

$$z_k = z(kT_s) = a_k \cdot p(0) + \underbrace{\sum_{\substack{k' \neq k \\ k' \in \mathbb{Z}}} a_{k'} \cdot p((k - k')T_s)}_{IES} + n(kT_s)$$

L'échantillon  $z_k$  dépend de  $a_k$  mais aussi des symboles antérieurs et postérieurs à  $a_k$ .

Une approche consiste à faire en sorte que le terme IES soit nul.



Exemple d'IES

##### IV-1- Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Le critère de Nyquist en temps se traduit par :

$$p((k - k')T_s) = \begin{cases} p(0) & \text{pour } k = k' \\ 0 & \text{pour } k \neq k' \end{cases}$$

Qui peut s'écrire également :

$$p(kT_s) = \begin{cases} p(0) & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, la condition nécessaire et suffisante pour ne pas avoir d'IES est que l'impulsion  $p(t)$  possède la propriété suivante :

$$p(kT_s) = p(0) \cdot \delta(k) \quad \text{et} \quad p(0) \neq 0$$

Avec  $\delta(k)$  : symbole de Kronecker et  $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$

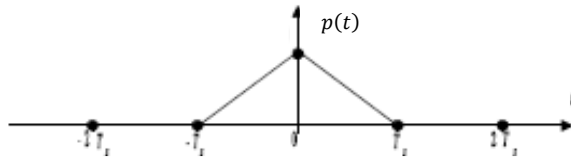
L'impulsion  $p(t)$  peut être de durée et de forme quelconque mais tous les échantillons aux instants  $kT_s$  doivent être nuls.

Le critère de Nyquist assure que chaque échantillon du signal reçu provient d'un seul symbole. Il permet d'effectuer une décision symbole par symbole.

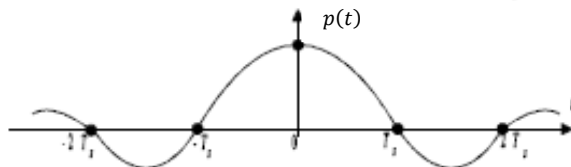
Le filtre  $p(t)$  qui représente le canal total (depuis la source des symboles  $a_k$  jusqu'à l'entrée de l'organe de décision du récepteur) est dit **canal de Nyquist**.

#### IV-1-1- Exemples de filtres vérifiant la condition de Nyquist en temps

Les impulsions suivantes vérifient la condition de Nyquist dans le domaine temporel.



Le support temporel du filtre est borné centré et inférieur à  $2T_s$ .



Le support temporel du filtre est non borné et s'annule à tous les multiples de  $T_s$ .

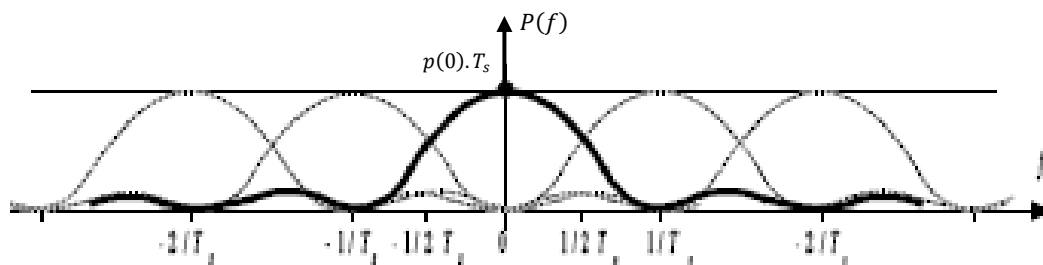
#### IV-2- Critère de Nyquist dans le domaine spectral

Le critère de Nyquist en fréquence est donné par :

$$\sum_k P(f - k/T_s) = p(0) \cdot T_s = \text{constante}$$

$p(0)$  : valeur de l'impulsion  $p(t)$  pour  $t=0$ .

$P(f)$  : Transformée de Fourier de  $p(t)$ .



Exemple de spectre des impulsions vérifiant la condition de Nyquist en fréquence

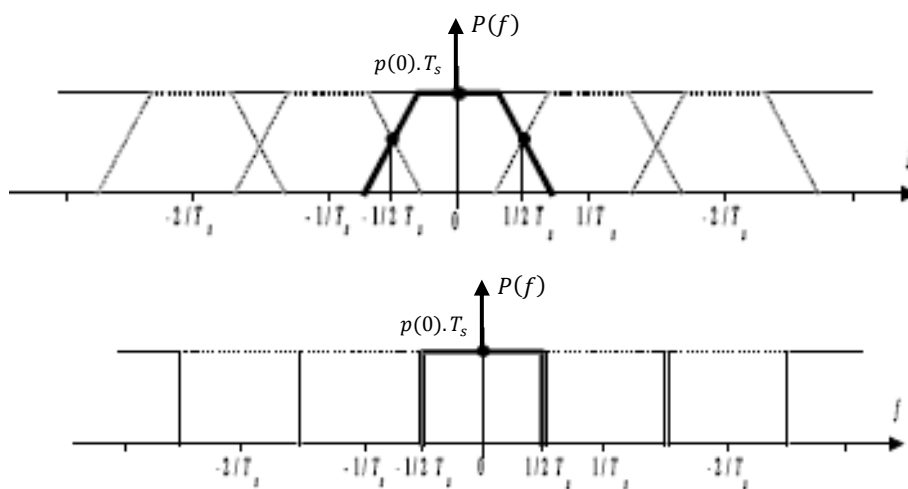
Si la somme des courbes de réponses décalées du canal est constante, le critère de Nyquist est respecté, il n'y a pas d'IES.

Généralement, on peut supposer que  $P(f)$  a un support en fréquence borné avec  $P(f) = 0$  pour  $|f| \geq \frac{1}{T_s}$ , la condition de Nyquist peut alors s'écrire :

$$P(f) + P(f - 1/T_s) = p(0) \cdot T_s = \text{constante}$$

#### IV-2-1- Exemples de filtres vérifiant la condition de Nyquist en fréquence

Tous les canaux à courbe de réponse antisymétrique par rapport à  $f = \frac{1}{2T_s}$  sont possibles, mais ne sont pas les seuls à vérifier la condition de Nyquist.



Si  $P(f)$  occupe une bande  $BP < \frac{1}{2T_s}$ , elle ne peut vérifier le critère de Nyquist.

#### IV-3- Bande de Nyquist et débit de Nyquist

##### IV-3-1- Bande de Nyquist

C'est la bande minimale nécessaire pour transmettre, sans IES, une information numérique à une cadence  $\frac{1}{T_s}$ . Elle s'écrit :

$$BP_N = \frac{1}{2T_s}$$

Pour un filtre à bande passante BP supérieure à  $BP_N$  :

$$BP \geq BP_N \Rightarrow BP \geq \frac{R}{2} \Rightarrow R \leq 2 \cdot BP$$

R étant la rapidité de modulation.

Une condition nécessaire pour rendre possible une transmission sans IES sur un canal de bande BP est d'avoir  $R \leq 2.BP$ .

#### IV-3-2- Débit de Nyquist

C'est le débit maximum que l'on peut espérer transmettre sans IES sur un canal de bande BP

$$R_N = 2.BP$$

#### IV-4- Filtre en cosinus surélevé (Raised Cosine : RC)

C'est un exemple important du filtre de Nyquist qui possède :

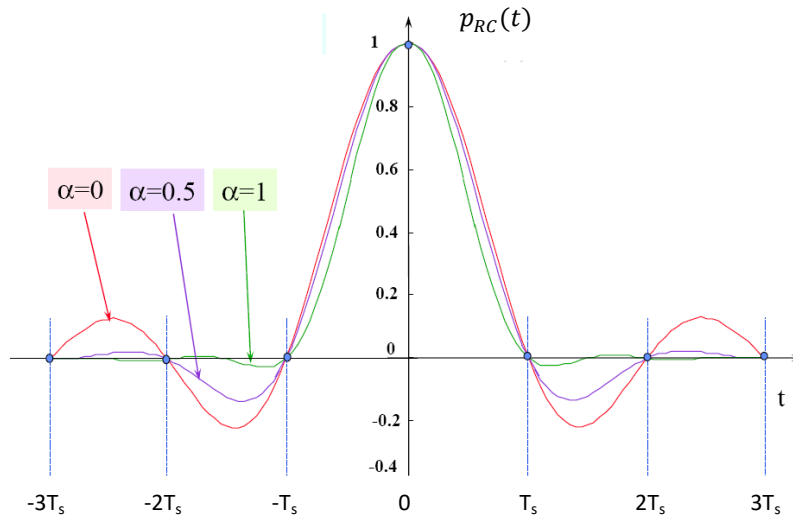
- un support temporel infini,
- une bande passante finie.

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$p_{RC}(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{\cos(\pi \alpha t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2}$$

$\alpha$  est appelé le coefficient d'arrondi ou facteur de retombée (ou roll-off factor).

C'est un paramètre réel qui est tel que  $0 \leq \alpha \leq 1$ .



La fonction de transfert est telle que :

$$P_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & \text{pour } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi T_s}{\alpha} \left( f - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right] & \text{pour } \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq f_{max} = \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{pour } |f| > f_{max} = \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases}$$

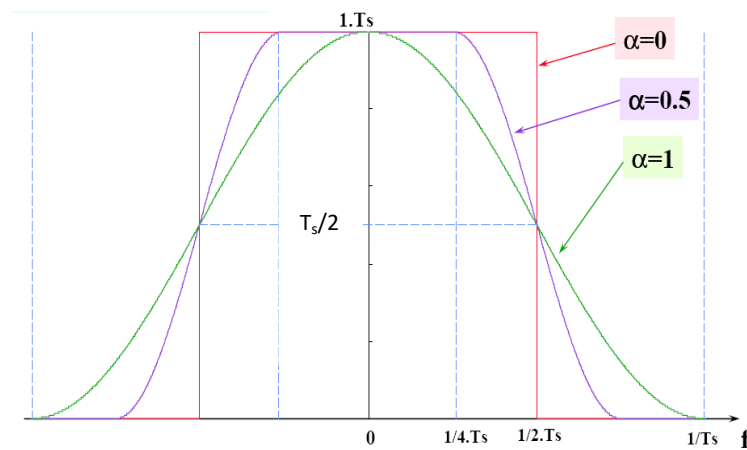


Figure. Réponse fréquentielle du filtre RC

La fonction de transfert présente une symétrie impaire (anti symétrie) par rapport au point  $\left(\frac{1}{2T_s}, \frac{P_{RC}(0)}{2}\right)$ . Ce point est un centre de symétrie.

Il y a une multitude de filtres dont la bande est inférieure à  $\frac{1}{T_s}$  et qui vérifient le critère de Nyquist.

$\alpha = 0$  : filtre passe bas idéal de bande passante  $\frac{1}{2T_s}$  et la réponse  $p_{RC}(t)$  est un sinus cardinal (cas physiquement non réalisable).

$\alpha = 1$  : filtre qui occupe une bande  $\frac{1}{T_s}$ .

La bande passante du filtre est :

$$BP = \frac{1 + \alpha}{2T_s} = (1 + \alpha) \frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{2T_s} \leq BP < \frac{1}{T_s}$$

Plus  $\alpha$  est grand, plus la bande en fréquence nécessaire pour transmettre est grande.

## V- Rappels sur la transmission sur fréquence porteuse

### V-1- Introduction

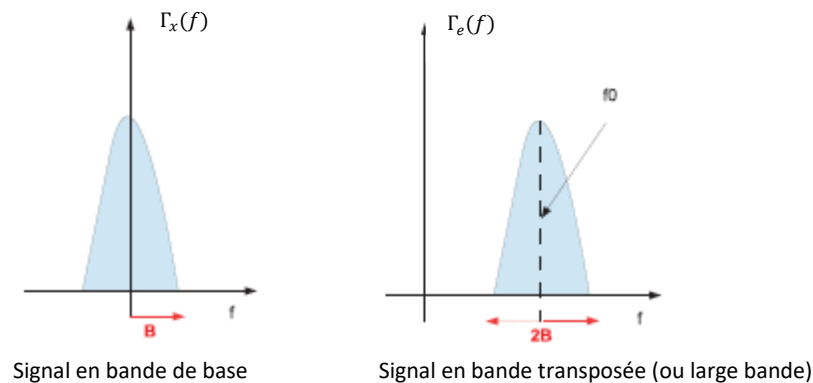
La transmission sur fréquence porteuse ou modulation permet de transformer le signal en bande de base pour l'adapter au canal de transmission. Cette opération consiste à moduler la phase, la fréquence et/ou l'amplitude d'une onde porteuse centrée sur la bande de fréquence du canal.

Les modulations qui translatent le spectre du signal vers la fréquence porteuse (sans en modifier la forme) sont appelées modulations linéaires. A l'opposé, les modulations qui modifient la forme du spectre du signal en bande de base sont dites non linéaires.

Les modulations fondamentales les plus rencontrées sont :

- Modulation par Déplacement d'Amplitude MDA (ou ASK « Amplitude Shift Keying »)
- Modulation par Déplacement de Phase MDP (ou PSK « Phase Shift Keying »)
- Modulation d'Amplitude sur deux porteuses en Quadrature MAQ (ou QAM « Quadrature Amplitude Modulation »)
- Modulation par Déplacement de Fréquence MDF (ou FSK « Frequency Shift Keying »)

Le signal en bande de base  $x(t)$  est un signal physique donc réel. Le signal en bande transposée  $e(t)$ , dont le spectre est centré autour de la fréquence porteuse  $f_0$ , est également un signal physique donc réel.



Le signal modulé a une largeur de bande :  $B_{mod} = 2B_{BB}$ .

Dans la suite du cours, la réponse impulsionnelle du filtre d'émission est celle d'un filtre NRZ.

On parle de modulations binaires ou M-aires, selon que le nombre de symboles différents est égal à 2 ou à M.

### V-2- Modulation par Déplacement d'Amplitude (MDA, en anglais ASK « Amplitude Shift Keying »)

Le signal  $x(t)$  module l'amplitude de la porteuse. Le signal modulé est de la forme :

$$e(t) = \Re\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$= \Re\left\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$a_k$  symbole réel et  $h_e(t)$  réel, donc :

$$e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s) \cos 2\pi f_0 t$$

Chaque symbole  $a_k$  modifie l'amplitude de la porteuse durant une durée  $T_s$ .

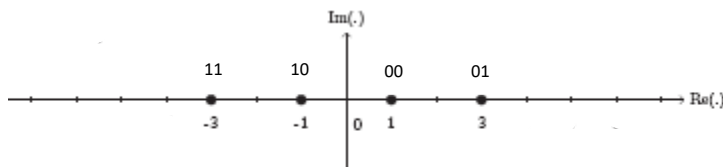
Lorsqu'il y a M valeurs possibles de l'amplitude du signal modulé, la modulation est dite M-ASK.

#### V-2-1- Constellation

C'est une représentation dans le plan complexe des différents états de la modulation ; c'est-à-dire les différentes amplitudes possibles.

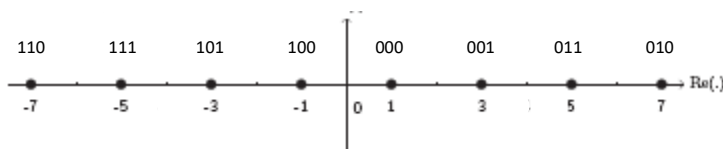
##### V-2-1-1- Exemples de constellation pour une M-ASK symétrique

➤ M=4



Le premier bit est le bit de signe, le deuxième représente l'amplitude.

➤ M=8

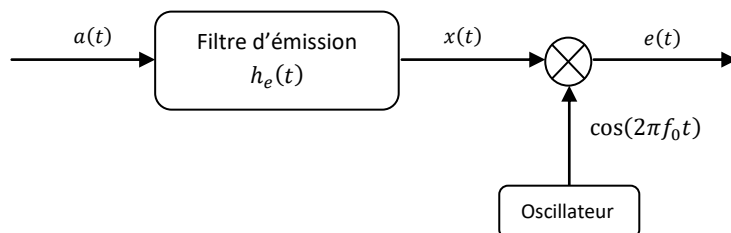


La disposition des symboles met en œuvre le code de Gray.

Remarque : Ces formes de constellation ne sont pas des formes uniques.

## V-2-2- Modulateur et démodulateur ASK

### V-2-2-1- Modulateur ASK



$$e(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s) \cos 2\pi f_0 t$$

### V-2-2-2- Démodulateur ASK cohérent

La démodulation est l'opération inverse de la modulation. La démodulation cohérente est applicable lorsque le récepteur a une connaissance exacte de la fréquence et de la phase de la porteuse. Dans ce cas, une technique permettant de synchroniser l'oscillateur local générant cette porteuse avec la porteuse à l'émission est nécessaire.

A la sortie du canal (supposé sans bruit), on a :

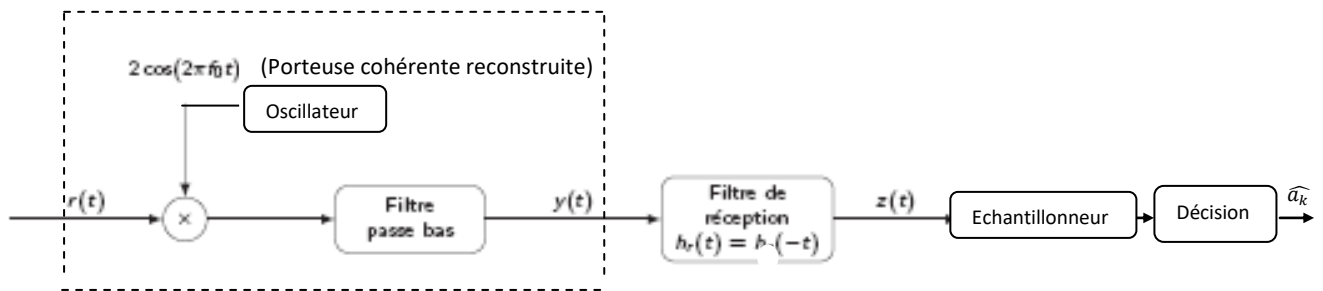
$$r(t) = e(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Pour récupérer  $x(t)$ ,

➤ on multiplie  $r(t)$  par  $2 \cos(2\pi f_0 t)$  :

$$2 \cos(2\pi f_0 t) \cdot r(t) = 2 \cos^2(2\pi f_0 t) x(t) = x(t) + x(t) \cos(4\pi f_0 t)$$

➤ puis, on utilise un filtrage passe bas pour éliminer la composante en haute fréquence.



- Après le filtrage adapté, qui maximise le SNR tout en annulant l'IES aux instants de décision, le signal est échantillonné par une horloge synchronisée avec l'horloge d'émission. Le signal échantillonné entre ensuite dans un détecteur à seuils pour décider des symboles émis.

### V-2-3- Energie moyenne par bit

Pour une modulation M-ASK symétrique et un codage antipolaire, l'énergie moyenne par bit est donnée par :

$$E_{bit} = \frac{1}{M \cdot \log_2 M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 E_{he} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{he} \quad [\text{Joule/bit}]$$

Elle est égale à celle d'un signal en bande de base.

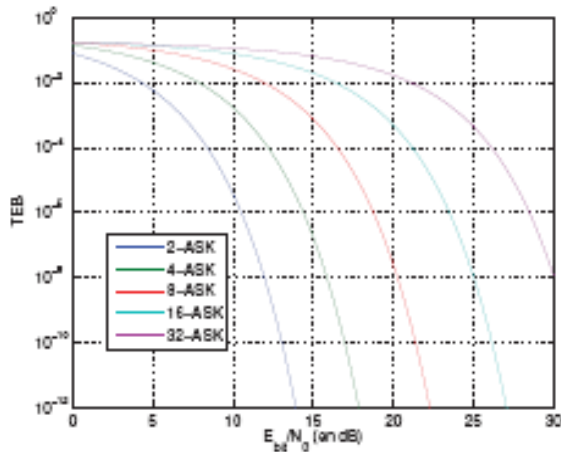
### V-2-4- Probabilité d'erreur

Dans le cas où le récepteur est optimal et en utilisant un codage antipolaire, la probabilité d'erreur par bit est donnée par :

$$P_{bit}^{err} = 2 \frac{M - 1}{M \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{2E_h}{N_0}} \right)$$

Si en plus le filtre de canal est de gain unitaire sur sa bande passante :  $E_h = E_{he}$

$$P_{bit}^{err} = 2 \frac{M - 1}{M \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0} \cdot \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1}} \right)$$



Taux d'erreur binaire en fonction de  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  pour des modulations M-ASK symétriques

### V-3- Modulation par Déplacement de Phase (MDP, en anglais PSK « Phase Shift Keying »)

C'est la phase de la porteuse qui est modulée par le signal en bande de base.

$$e(t) = \Re\{A \cdot e^{(j2\pi f_0 t + jx(t))}\}$$

$$= A \cdot \cos[2\pi f_0 t + x(t)]$$

avec 
$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k h_e(t - kT_s)$$

A chaque symbole  $a_i$  est associée une phase  $\varphi_i$ . A : amplitude de la porteuse.

La phase de la porteuse change toutes les  $T_s$  secondes.  $\varphi_k$  représente la valeur de la phase de la porteuse dans l'intervalle de temps  $[kT_s, (k + 1)T_s[$ .

$$\varphi_k \in \frac{2\pi}{M} \{0, 1, 2, \dots, M - 1\} \quad \text{cas unipolaire}$$

$$\varphi_k \in \frac{\pi}{M} \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M - 1)\} \quad \text{cas antipolaire}$$

L'expression de  $e(t)$  peut se mettre sous la forme :

$$e(t) = \Re\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} A e^{j\varphi_k} h_e(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$= \Re\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_e(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

Cette dernière formule exprime une équivalence mathématique avec la modulation ASK où les symboles sont  $c_k = A e^{j\varphi_k}$ : symboles complexes.

En développant l'expression précédente, on obtient :

$$e(t) = A \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos(\varphi_k) h_e(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t) - A \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin(\varphi_k) h_e(t - kT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Cette écriture montre que le signal  $e(t)$  peut se mettre en la somme de deux signaux ASK en quadrature.  $I(t)$  module une porteuse  $\cos(2\pi f_0 t)$  et  $Q(t)$  module une porteuse  $-\sin(2\pi f_0 t)$ .

$I(t)$  : composante en phase (In phase)

$Q(t)$  : composante en quadrature de phase (Quadrature)

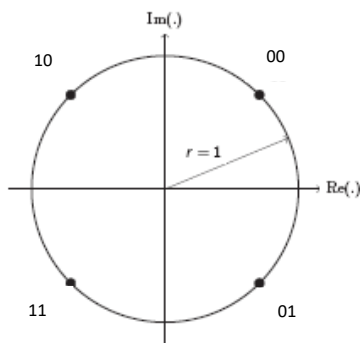
$I(t)$  et  $Q(t)$  sont des signaux MIA, M-NRZ, dont les amplitudes valent respectivement  $\cos(\varphi_i)$  et  $\sin(\varphi_i)$  avec  $i \in [0, M - 1]$

### V-3-2- Constellation

C'est une représentation des symboles  $c_k$  équivalents dans le plan complexe. Les points de constellation sont régulièrement espacés sur un cercle de rayon A, ceci permet d'améliorer les performances par rapport au bruit.

#### V-3-2-1- Exemple : Modulation 4-PSK (ou QPSK)

Si on utilise le dictionnaire antipolaire et si on prend  $A=1$ .



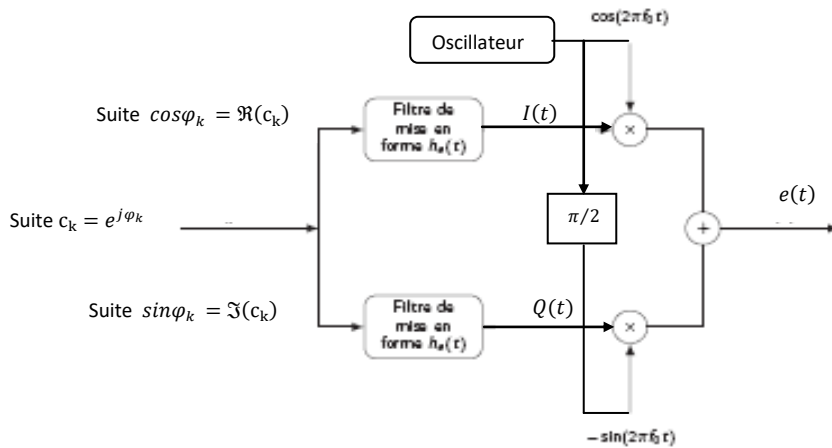
$$\varphi_k \in \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \rightarrow c_k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mot binaire associé	$\varphi_k$	$c_k$	$\sqrt{2}\Re(c_k)$	$\sqrt{2}\Im(c_k)$
0 0	$\pi/4$	$+\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$	+1	+1
1 0	$3\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	+1
1 1	$-3\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
0 1	$-\pi/4$	$+\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$	+1	-1

Remarque : on obtient le dictionnaire unipolaire en faisant tourner la constellation de  $-\frac{\pi}{4}$ .

### V-3-3- Modulateur et démodulateur PSK

#### V-3-3-1- Modulateur PSK

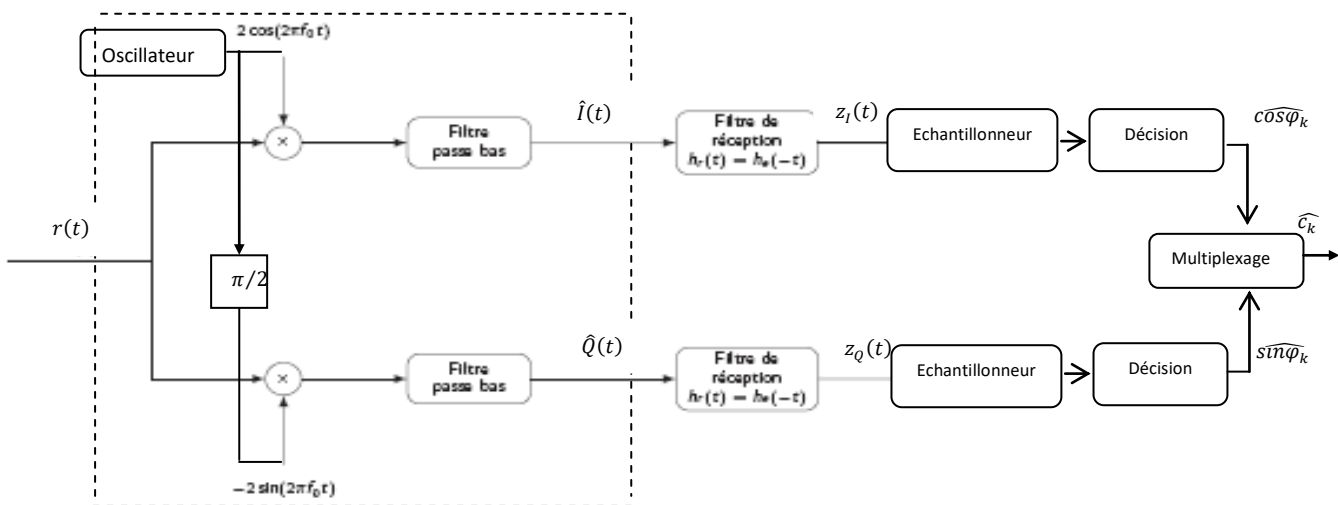


$$I(t) = A \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos(\varphi_k) h_e(t - kT_s) \quad \text{et} \quad Q(t) = A \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin(\varphi_k) h_e(t - kT_s)$$

I(t) transmet la partie réelle du symbole et Q(t) transmet la partie imaginaire.

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

#### V-3-3-2- Démodulateur PSK cohérent



### V-3-4- Energie moyenne par bit pour une modulation M-PSK

On la calcule non pas avec les symboles  $\varphi_k$  mais avec les symboles  $c_k$  équivalents en modulation ASK.

$$E_{bit} = \frac{1}{M \cdot \log_2 M} \sum_{i=1}^M |c_i|^2 E_{he} \quad [Joule/bit]$$

Si l'amplitude de la porteuse est  $A=1$ ,  $|c_i|^2 = 1$  pour tous les symboles et :  $E_{bit} = \frac{E_{he}}{\log_2 M}$

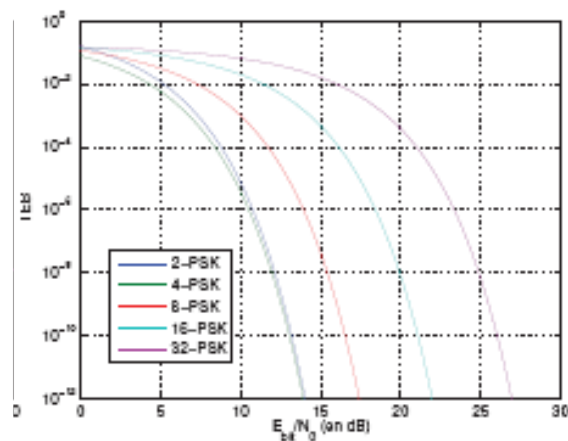
### V-3-5- Probabilité d'erreur

Pour le calcul de performances d'une PSK avec démodulation cohérente, les points de la constellation étant régulièrement espacés sur un cercle, les zones de décision sont des zones circulaires centrées sur ces points. Une erreur de décision a lieu chaque fois que le signal reçu se trouve en dehors de la zone de décision du point émis.

Pour un récepteur optimal et en utilisant un codage antipolaire et un filtre de canal de gain unitaire, la probabilité d'erreur par bit est donnée par :

$$P_{bit}^{err} = \frac{2}{\log_2 M} Q \left( \sqrt{2 \log_2 M \frac{E_{bit}}{N_0}} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \right)$$

Taux d'erreur binaire en fonction de  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  pour des modulations M-PSK



**Remarque :** Pour une modulation PSK, l'augmentation de M réduit la distance entre états adjacents pour un rayon donné. Cela dégrade naturellement les performances.

Pour M entre 2 et 16, les performances sont bonnes.

#### V-4- Modulation d'Amplitude sur deux porteuses en Quadrature (MAQ, en anglais QAM « Quadrature Amplitude Modulation »)

La ASK et la PSK ne constituent pas une solution satisfaisante pour utiliser efficacement l'énergie émise lorsque le nombre de points  $M$  est grand car la probabilité d'erreur est fonction de la distance minimale entre les points de la constellation, et la meilleure modulation est celle qui maximise cette distance pour une puissance moyenne donnée. Le choix le plus rationnel est alors une modulation qui répartit les points uniformément dans le plan. C'est le cas de la modulation QAM.

Le signal modulé s'écrit :

$$e(t) = \Re \left\{ \sum_k c_k h_e(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$= \Re \left\{ \sum_k A_k e^{j\psi_k} h_e(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$c_k = a_k + jb_k = A_k e^{j\psi_k} \quad \text{où} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad , \quad \psi_k = \tan^{-1} \left( \frac{b_k}{a_k} \right)$$

$c_k$  : symbole complexe.  $a_k$  et  $b_k$  sont des symboles réels indépendants ; c'est l'intérêt.

$e(t)$  s'écrit également :

$$e(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

où

$$I(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s)$$

$$Q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT_s)$$

$I(t)$  transmet la partie réelle du symbole  $c_k$  et  $Q(t)$  transmet la partie imaginaire.

Le signal  $e(t)$  modulé est donc la somme de deux porteuses en quadrature, modulées en amplitude par  $I(t)$  et  $Q(t)$ .

La QAM peut être considérée comme une modulation à la fois de la phase et de l'amplitude.

La modulation PSK est un cas particulier de la modulation QAM dans laquelle le paramètre  $A_k$  est constant.

La modulation ASK est un cas particulier de la modulation QAM dans laquelle les  $b_k$  sont nuls (la composante en quadrature  $Q(t) = 0$ ).

### V-4-1- Constellation M-QAM

Si le symbole  $a_k$  prend ses valeurs dans un dictionnaire de  $M_1$  états possibles, et si le symbole  $b_k$  prend ses valeurs dans un dictionnaire de  $M_2$  états possibles (où  $M_1 = M_2$ ) alors la constellation M-QAM possède  $M = M_1^2$  états possibles.

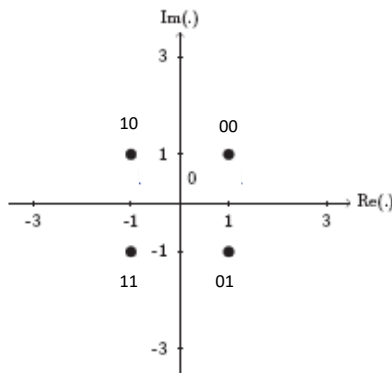
Chaque état est représenté par un couple  $(a_k, b_k)$  ou ce qui revient au même par un symbole complexe  $c_k$ .

Si  $a_k$  et  $b_k$  sont des groupements de  $m$  bits chacun alors  $c_k$  contient  $2m$  bits et  $M = M_1^2 = 2^{2m}$ .

On parle de modulation 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM...

Une modulation M-QAM correspond à deux modulations  $\sqrt{M}$  - ASK symétriques en parallèle.

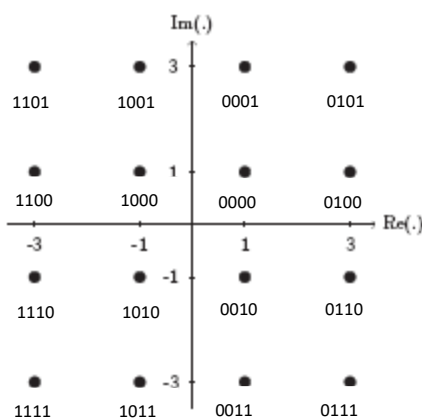
#### V-4-1-1- Exemple : Constellation de la 4-QAM



Le 1<sup>er</sup> bit (à partir de la gauche) code la partie réelle et le 2<sup>ème</sup> bit code la partie imaginaire.

$$c_k = \pm 1 \pm j$$

#### V-4-1-2- Exemple : Constellation de la 16-QAM

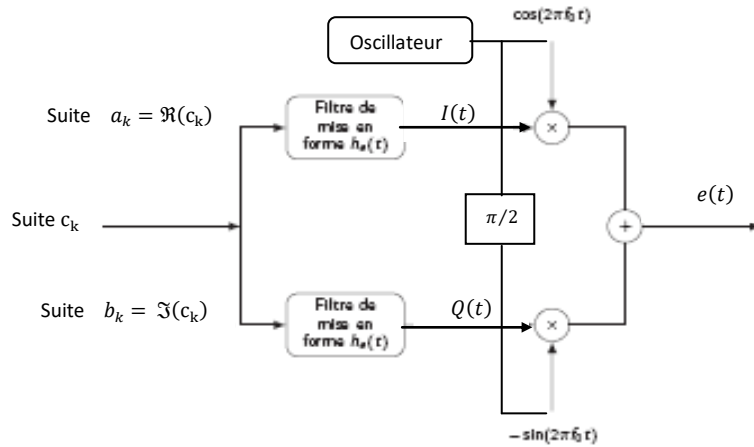


Le 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> bit codent la partie réelle et le 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> bit codent la partie imaginaire.

$$c_k \in \{\pm 1 \pm j, \pm 1 \pm 3j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j\}$$

V-4-2- Modulateur / Démodulateur M-QAM

V-4-2-1- Modulateur QAM

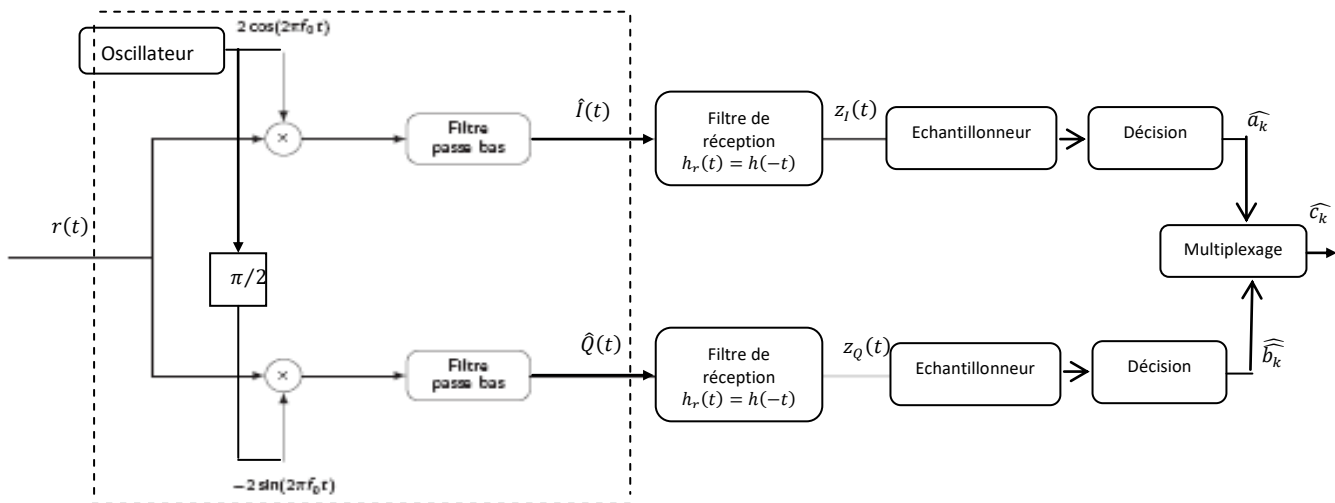


$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$I(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s) \quad \text{et} \quad Q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT_s)$$

V-4-2-2- Démodulateur QAM cohérent

Dans le cas d'un système à modulation QAM, la démodulation est seulement cohérente ; c'est différent de la modulation PSK pour laquelle la démodulation peut être non cohérente dans certaines applications. La démodulation du signal reçu nécessite la synchronisation de la porteuse en phase et en fréquence avec la porteuse à l'émission.



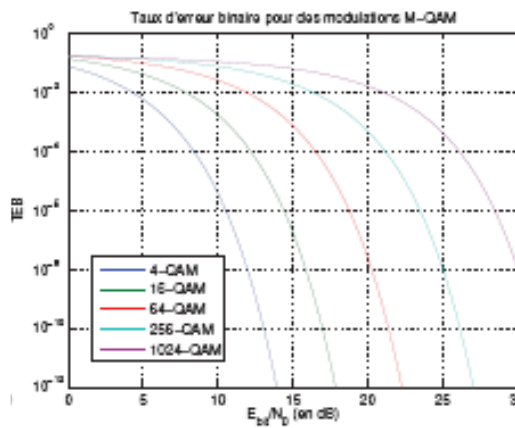
**V-4-3- Energie moyenne par bit**

$$E_{bit} = \frac{2(M - 1)}{3 \cdot \log_2 M} E_{he}$$

**V-4-4- Probabilité d'erreur**

$$P_{bit}^{err} \approx \frac{4(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M - 1} \cdot \frac{E_{bit}}{N_0}} \right)$$

Taux d'erreur binaire en fonction de  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  pour des modulations M-QAM



**V-4-5- Remarques**

- On peut transmettre avec une M-QAM pour le même taux d'erreur bit qu'une  $\sqrt{M}$  – ASK symétrique.

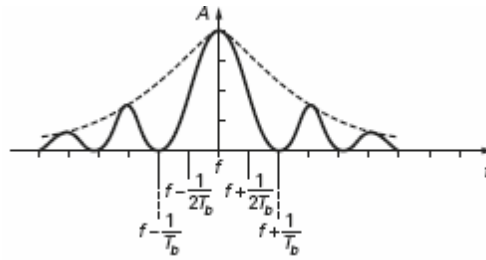
$$P_{bit}^{err} (M-QAM) = P_{bit}^{err} (\sqrt{M}-ASK)$$

- $P_{bit}^{err} (4-QAM) = P_{bit}^{err} (4-PSK)$

**V-5- Efficacité spectrale**

Si le signal en bande de base est NRZ, le signal modulé a une représentation spectrale de largeur de bande  $B \approx \frac{2}{T_s}$ .

$$\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{T_s} \cdot \frac{T_s}{2} = \frac{\log_2 M}{2}$$



Plus M augmente, plus  $\eta$  augmente. Par contre, la probabilité d'erreur augmente également.

Si le spectre est limité aux valeurs  $f - \frac{1}{2T_s}$  et  $f + \frac{1}{2T_s}$ , l'occupation spectrale est  $B = \frac{1}{T_s}$  et l'efficacité spectrale est égale à :

$$\eta = \log_2 M \quad \text{Equation valable pour ASK, PSK et QAM}$$

Pour la modulation FSK,  $\eta = \frac{\log_2 M}{M}$ .

### V-6- Critères de choix d'une modulation

Chaque modulation se caractérise par une efficacité spectrale  $\eta$  (en termes d'occupation spectrale B) et une efficacité en puissance émise (le rapport  $\frac{E_{bit}}{N_0}$ ) nécessaire pour obtenir une probabilité d'erreur donnée.

#### V-6-1- Compromis entre efficacité spectrale $\eta$ , probabilité d'erreur par bit $P_{bit}^{err}$ et puissance du signal émis

L'étude serait équivalente si on remplaçait  $P_{bit}^{err}$  par le TEB et la puissance du signal émis par l'efficacité en puissance  $\frac{E_b}{N_0}$ . Le but est de maximiser  $\eta$  et minimiser  $P_{bit}^{err}$  (ou TEB) et la puissance émise (ou  $\frac{E_b}{N_0}$ ).

Dans ce paragraphe, l'optimisation de ces paramètres s'est faite par l'évaluation de la paire Efficacité spectrale -  $\frac{E_b}{N_0}$ , la  $P_{bit}^{err}$  étant fixée.

#### Evaluation selon la paire Efficacité spectrale - $\frac{E_b}{N_0}$

Soit un canal AWGN à bande passante limitée de largeur B. La capacité du canal, d'après le théorème de Shannon, est :

$$C = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P_{émise}}{P_{bruit}} \right) = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{E_b \cdot D_b}{B \cdot N_0} \right)$$

qui peut s'écrire également sous forme normalisée :

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left( 1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{D_b}{B} \right)$$

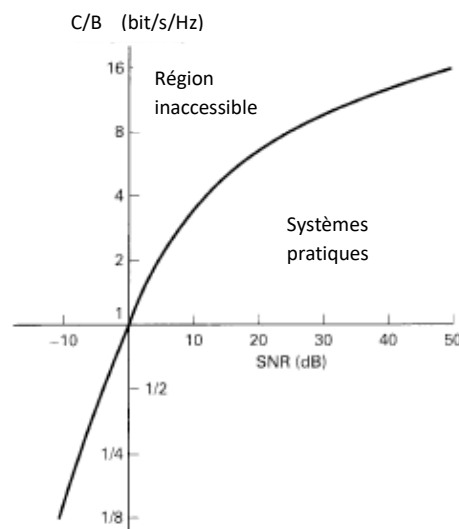
Si le débit binaire est maximal et est égal à la capacité du canal ( $D_{bmax} = C$ ), on aura :

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left( 1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{B} \right)$$

qui correspond à une efficacité spectrale maximale :

$$\eta_{max} = \log_2 \left( 1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \eta_{max} \right)$$

$\frac{E_b}{N_0} = \text{SNR}$  et  $\frac{C}{B} = \eta_{max}$ . La figure suivante représente la relation  $\frac{C}{B} = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ .

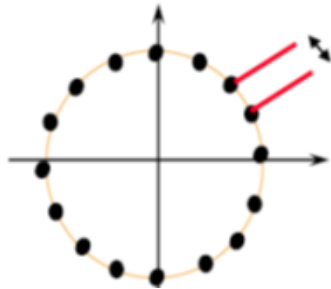


### V-6-2- Critères généraux de choix d'une modulation

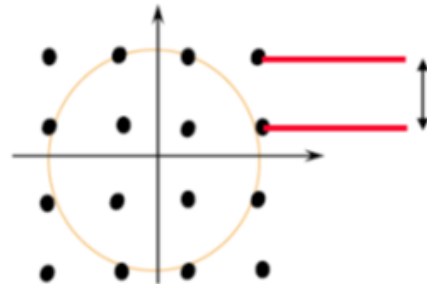
Le choix d'une modulation repose sur les critères suivants et se fait selon les priorités de construction du système de communication :

- **Faible énergie** pour la transmission des symboles et **limitation en puissance émise** :
  - La M-PSK est adaptée ; les points de constellation sont répartis et concentrés sur un même cercle donc leur amplitude est constante ce qui nécessite une faible et même énergie pour la transmission des symboles.
  - La M-QAM est non adaptée dans le cas de grandes constellations car elle peut consommer beaucoup de puissance à cause des points de constellation éloignés : besoin d'utiliser un amplificateur plus puissant.
- **Faible probabilité d'erreur** pour des conditions de transmission données (rapport signal à bruit en particulier) :

- La M-PSK est non adaptée lorsque M est grand. Plus M augmente, plus la distance entre les points de constellation diminue et plus la probabilité d'erreur augmente. Cette modulation est sensible au bruit.
- La M-QAM est adaptée : les points de constellation sont plus éloignés les uns des autres donc cette modulation résiste mieux au bruit.



Exemple de 16-PSK



Exemple de 16-QAM

- La M-ASK est peu utilisée pour  $M > 2$  car ses performances sont moins bonnes que celles d'autres modulations, notamment pour sa résistance au bruit et également car elle prend beaucoup de puissance émise.
- **Maximisation de l'efficacité spectrale**
  - **Limitations en bande passante** (minimisation de l'occupation spectrale du signal modulé pour un débit binaire donné) :
    - La M-QAM est largement utilisée.
    - La M-FSK est non adaptée (occupation spectrale importante)
  - Coût du système lié à la **simplicité de réalisation du modulateur et du démodulateur** (avec éventuellement une symétrie entre les points de la constellation) : La M-ASK est avantagée.

### Exemple

Si le critère de performance principal d'un système de communication est la probabilité d'erreur bit, lequel de ces schémas de modulation serait choisi pour un canal AWGN ?

- 4-ASK avec  $\frac{E_{bit}}{N_0} = 12 \text{ dB}$
- 4-PSK avec  $\frac{E_{bit}}{N_0} = 12 \text{ dB}$
- 4-QAM avec  $\frac{E_{bit}}{N_0} = 12 \text{ dB}$

Réponse :

Le choix se portera sur le système qui donnera la plus faible probabilité d'erreur.

- $P_{bit}^{err} = 1,425 \cdot 10^{-4}$
- $P_{bit}^{err} = 10^{-8}$
- $P_{bit}^{err} = 10^{-8}$

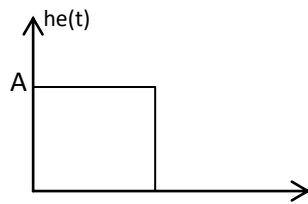
## VI- Exercices

### Exercice 1

Soit le signal  $a(t)$ , à l'entrée d'un filtre de mise en forme, donné par la suite de symboles  $a_k$  suivants : -1 -1 +7 -3 +3 -1 +1 +3 -5 +3... envoyés avec une période symbole  $T_s = 50\mu s$ .

- 1) Donner l'expression générale de  $a(t)$  et représenter le signal en fonction du temps.
- 2) Quelle est la valence possible  $M$  et quel est le dictionnaire utilisé ?

Le filtre de mise en forme est un filtre NRZ représenté par la réponse impulsionnelle suivante :



Et le signal  $x(t)$  à la sortie du filtre de mise en forme ne s'exprime par :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h_e(t - kT_s)$$

- 3) Représenter ce signal en fonction du temps pour la suite de symboles donnés plus haut.
- 4) Calculer l'énergie moyenne par symbole et l'énergie moyenne par bit.
- 5) Calculer la puissance moyenne émise.

Le signal  $x(t)$  est émis sur un canal de transmission de réponse impulsionnelle  $h_c(t)$  pour lequel  $N_0 = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ W/Hz}$  ( $N_0$  : densité spectrale de puissance mono-latérale du BBAG).

- 6) Calculer la probabilité d'erreur symbole et la probabilité d'erreur bit dans le cas d'un récepteur optimal. On admet que  $E_h$  (énergie totale de la réponse impulsionnelle  $h(t) = h_e(t) * h_c(t)$ ) est telle que  $E_h = E_{h_e}$ .

### Exercice 2

On considère une transmission en bande de base sur un canal, de gain unitaire, à bande passante limitée BP= 40MHz. On suppose que la densité spectrale de puissance du bruit BBAG est  $\frac{N_0}{2}$  et que la puissance émise moyenne  $P_x$  est fixée. On suppose de plus que le récepteur est optimal, que le dictionnaire utilisé est M-aire antipolaire et que l'on utilise à l'émission un filtre de mise en forme NRZ. Le rapport signal sur bruit à l'entrée du récepteur est  $SNR|_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_x}{P_b} \right) = 20dB$  avec  $P_b$  la puissance du bruit à l'entrée du récepteur.

- 1) Calculer le débit symboles.
- 2) Exprimer l'efficacité spectrale en fonction de  $M$ .
- 3) Exprimer le rapport  $\frac{P_x}{P_b}$  (SNR en valeur normale) à l'entrée du récepteur en fonction de  $M$ .

Donner son expression en dB,  $SNR|_{dB}$ , en fonction de  $M$ .

- 4) Exprimer  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  en fonction de M. Donner son expression en décibels ;  $\left. \frac{E_{bit}}{N_0} \right|_{dB}$ .
- 5) Pour M=2, calculer le débit binaire, l'efficacité spectrale et le rapport  $\frac{E_{bit}}{N_0}$ .  
Refaire le même calcul pour M=4, puis M=8.
- 6) Si on veut obtenir une probabilité d'erreur bit inférieure à  $10^{-6}$ , quels dictionnaires choisir (entre M=2, 4 et 8) ?
- 7) Pour M fixé, Quel choix fera-t-on si l'on veut minimiser la probabilité d'erreur bit ?

### Exercice 3

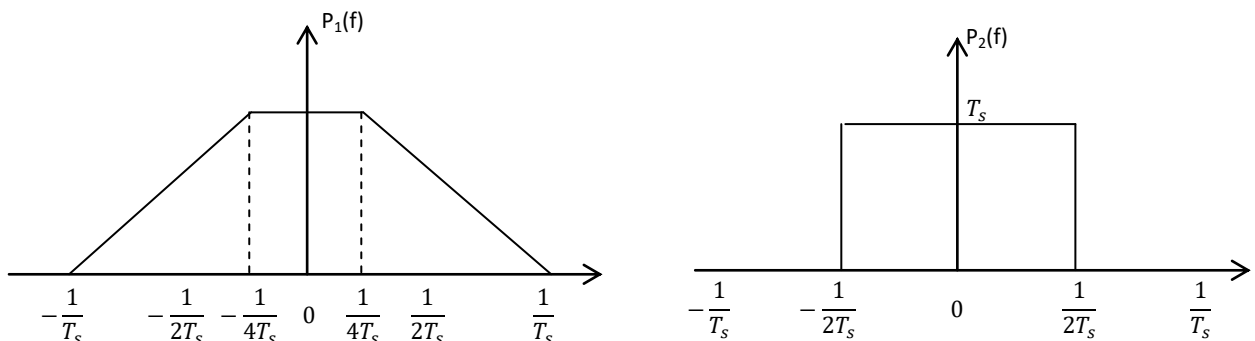
On considère le filtre suivant :

$$P(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -BP \leq f \leq BP \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Rappeler la définition de la bande de Nyquist  $B_N$  ?
- 2) En faisant un dessin, en déduire que si la bande passante BP du filtre P(f) est strictement inférieure à  $B_N$ , alors le critère de Nyquist ne peut pas être vérifié.
- 3) Quelle est la réponse impulsionnelle p(t) du filtre dans le cas où BP= $B_N$  ?
- 4) Ce filtre vérifie-t-il le critère de Nyquist ? Démontrez.

### Exercice 4

- 1) On utilise une modulation en bande de base NRZ à 4 états pour transmettre un débit binaire de 2,5 Mbits/s. Quel est la rapidité de modulation R?
- 2) Pour chacun des canaux suivants, de fonction de transfert globale  $P_1(f)$  et  $P_2(f)$ , dites lequel est un filtre de Nyquist (qui permet une transmission sans IES au débit symbole). Expliquez.
- 3) Quelle est la réponse impulsionnelle  $p_2(t)$  du filtre  $P_2$ .
- 4) Dans le cas où les filtres globaux  $P_1(f)$  et/ou  $P_2(f)$  ne vérifient pas le critère de Nyquist, on désire construire des filtres de Nyquist  $P'_1(f)$  et/ou  $P'_2(f)$  ayant la même allure et la même bande passante que ceux présentés sur la figure. Quel est le débit binaire qu'il faut transmettre pour que les filtres globaux  $P'_1(f)$  et/ou  $P'_2(f)$  soient filtres de Nyquist ? Donner l'expression de  $P'_1$  et/ou  $P'_2$  à  $f=0$ .



### Exercice 5

On considère un système de transmission en bande de base comportant :

- Une source qui délivre un signal binaire dont le débit est de 10kbits/s. Le signal est représenté par :

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - kT_s)$$

Où  $a_k$  sont une suite de symboles à valeurs dans le dictionnaire  $\{-3, -1, +1, +3\}$

- Une chaîne de transmission comportant un filtre d'émission, un canal de transmission et un filtre de réception, de fonction de transfert respectives  $H_e(f)$ ,  $H_c(f)$  et  $H_r(f)$ . On note  $P(f)=H(f).H_r(f)$ , avec  $H(f)=H_e(f).H_c(f)$ , la fonction de transfert du filtre global et  $p(t)$  sa transformée de fourrier inverse.
- Un échantillonneur et un comparateur de seuil situés derrière le filtre de réception.

Un bruit blanc additif gaussien de densité spectrale de puissance bilatérale  $N_0/2$  s'ajoute au signal à l'entrée du filtre de réception

La fonction de transfert  $H_c(f)$  est supposée égale à 1 sur la bande de fréquence  $[-B, B]$  et Elle est nulle ailleurs. On donne  $B=3\text{KHz}$ .

- 1) Calculer la rapidité de modulation
- 2) Donner la fonction de transfert du filtre de réception qui minimise la probabilité d'erreur (récepteur optimal). Donner l'expression de  $P(f)$  dans ce cas.
- 3) A quelle condition sur  $p(t)$  a-t-on absence d'interférence entre symboles à la sortie de l'échantillonneur ?
- 4) On utilise pour  $P(f)$  une fonction en cosinus surélevé. Quelle valeur du roll off faut-il choisir ?
- 5) Démontrer que  $p(0)$  est égale à  $E_{he}$  dans le cas du récepteur optimal ( $E_{he}$  : énergie totale de la réponse impulsionnelle  $h_e(t)$ ).

### Exercice 6

On considère une transmission modulée 16-QAM avec une porteuse  $f_0=1800\text{Hz}$  sur un canal BBAG, avec un bruit de densité spectrale  $\frac{N_0}{2}$  où  $N_0 = 10^{-21,5}\text{W/Hz}$ . On suppose que l'on émet avec un débit binaire  $D_b=9,6\text{kbits/s}$  et d'énergie totale  $E_{he} = 4 \times 10^{-21}\text{J}$ .

- 1) Quelle est la bande de fréquence minimale utilisée dans le cas d'un filtrage idéal de Nyquist (préciser les fréquences min et max de la bande)?
- 2) On utilise pour la transmission un filtre global en cosinus surélevé de roll-off  $\alpha=0,3$ . Quelle est la bande de fréquence utilisée (préciser les fréquences min et max de la bande) ?
- 3) Pour ce dernier cas, déterminer l'expression de l'efficacité spectrale (l'écrire en fonction de la valence  $M$  et de  $\alpha$ ) et calculer sa valeur.
- 4) Calculer l'énergie moyenne par bit et l'énergie moyenne par symbole.
- 5) Calculer la probabilité d'erreur bit théorique pour cette transmission.

## Références bibliographiques

- 1) M. Joindot et A. Glavieux, « *Introduction aux communications numériques* », Collection: Sciences Sup, édition Dunod 2007.
- 2) G. Baudoin et coll., « *Radio communications numériques /1- Principes, modélisation et simulation* », 2<sup>ème</sup> édition DUNOD 2007.
- 3) J. Proakis, « *Digital communications* », Mc Graw-Hill, 4th edition, 2001.
- 4) B. Sklar, “*Digital Communications, Fundamentals and applications*”, Prentice Hall, 2001.
- 5) F. De Dieuleveult, O. Romain, « *Electronique appliquée aux hautes fréquences, principes et applications* », 2<sup>ème</sup> édition DUNOD 2008.
- 6) Hikmet Sari, « *Transmission des signaux numériques* », Techniques d’ingénieur, Traité Télécoms.

## Cours sur sites Internet

- 7) Série de cours et TD « *Communications numériques* », Laurent Oudre, Université Paris 13, institut Galilée, 2015-2016
- 8) Cours « *Introduction aux communications numériques* », Iryna Andriyanova, Université de Cergy-Pontoise, 2012.
- 9) Cours « *Communications numériques et théorie de l’information* », Maurice Charbit, 2005.
- 10) Cours « *Systèmes de télécommunication* » C. Poulliat, INP-ENSEEIHT, Toulouse, Nov. 2011.
- 11) Cours « Bases de transmissions numériques – Les modulations numériques », P. Kadionik, Ecole nationale supérieure : Electronique, informatique et radiocommunications de Bordeaux, ENSEIRB.
- 12) « *Cours EN310 : Communications numériques avancées* », Benoît ESCRIG, ENSEIRB-MATMECA (Bordeaux) / IRIT (Toulouse), 2009.