Faculté de Technologie

Département des Télécommunications

Filière : Télécommunication

Niveau : L3 TTL

Solution feuille de TD N°02 en Communications numériques

Modulations numériques

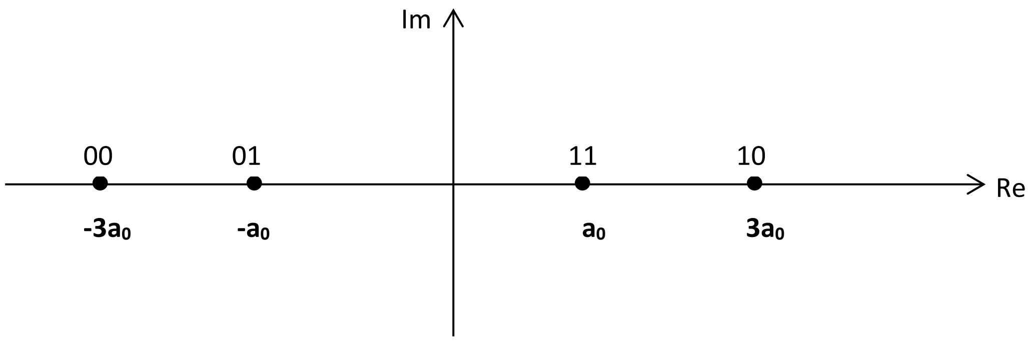
Exercice 01 :

$Si(t) \; = \; ai \; g(t - iTS) cos \, (2\pi f cT)$

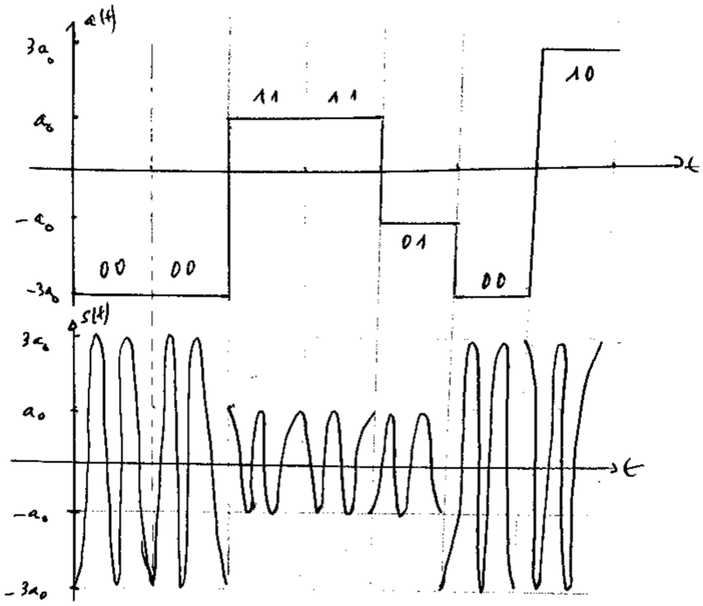
S(t) = $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} ai \;\; g(t - iTS) \; cos \; (2\pi f ct)$

- ai représente l'amplitude dans l'intervalle $[iTs \quad (i+1)Ts]$.

  $a_{i=(2i-(M+1))a_0}$



- Représentation de a(t) et s(t) de (00001111010010) :



Exercice 02 :

$$Si(t) = g(t - iTs)\cos(2\pi fct + \phi i)$$

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Cos(2\pi fct + \phi i) g(t - iTs)$$

$$S(t) = \cos(2\pi fct) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \cos(\phi i) g(t - iTS) - \sin(2\pi fct) . \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Sin(\phi i)\, g(t - iTs)$$

$$S(t) = a(t)\cos(2\pi fct) - b(t)\sin(2\pi fct)$$

Avec :

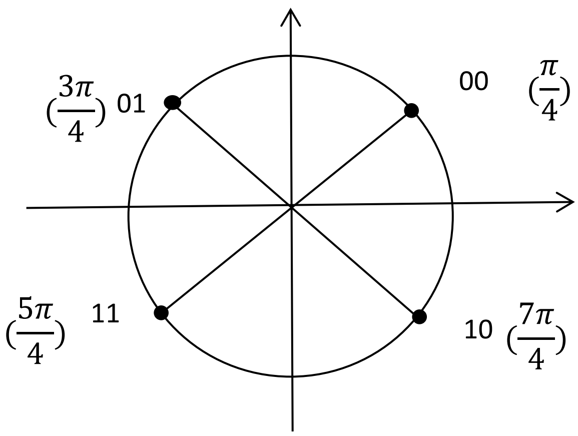
$$a(t) = \textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty} Cos(\phi_i) g(t - iTs)$$

$$b(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} sin(\phi i)\, g(t - iTS)$$

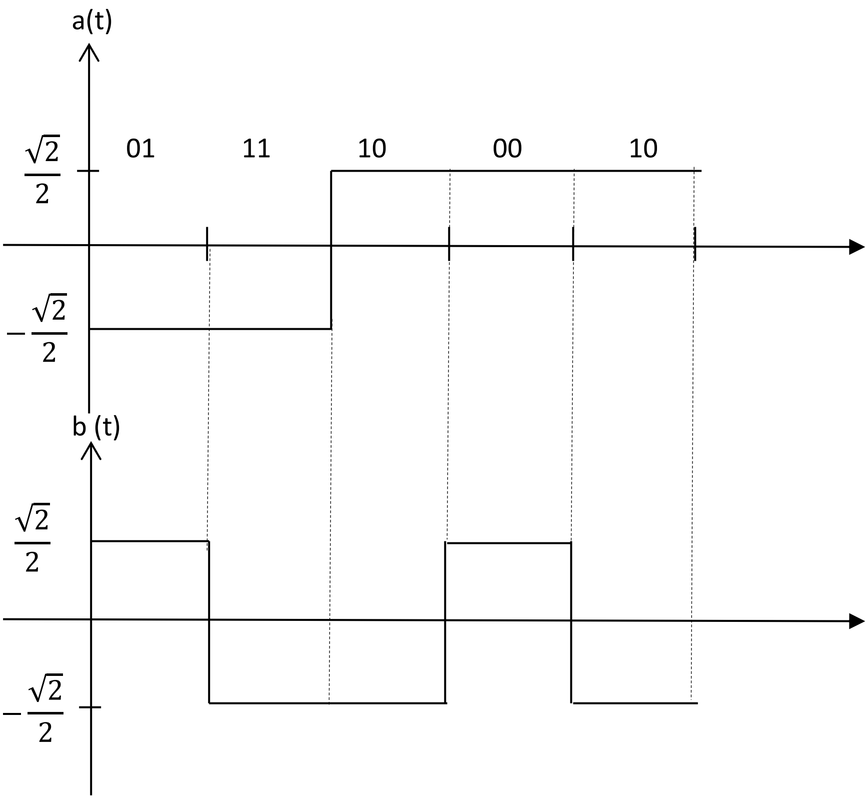
Les constellations :

$\varphi_k = \frac{\pi}{M} + k\frac{2\pi}{M}$ avec k=0 :M-1

Pour M=4 : $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}$



- Les signaux a(t) et b(t) de la suite (01/11/10/00/10) :

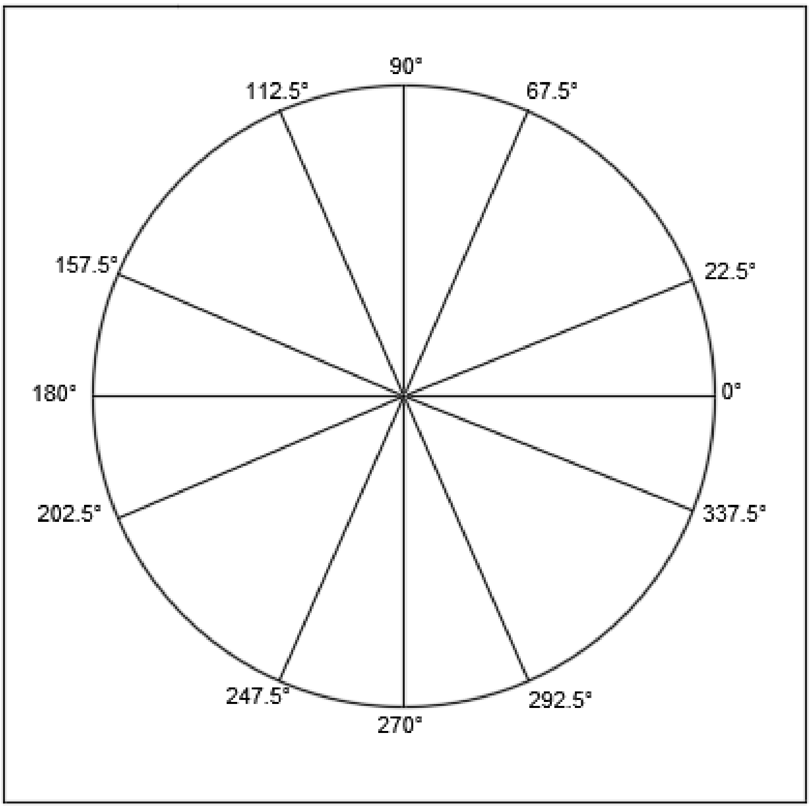


Exercice 03:

$\varphi_k = \frac{\pi}{M} + k\frac{2\pi}{M}$ k=0, 1, ...M-1

$= \frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{8}$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} = 22.5 \\ \frac{3\pi}{8} = 67.5 \\ \frac{5\pi}{8} = 112.5 \\ \frac{7\pi}{8} = 157.5 \\ \frac{9\pi}{8} = 202.5 \\ \frac{11\pi}{8} = 247.5 \\ \frac{13\pi}{8} = 292.5 \\ \frac{15\pi}{8} = 337.5 \end{cases}$$



$S_{ref} = \cos(2\pi\, f_0 t + \phi)$ $\qquad\qquad \phi = \{\, 45, 90, 135, 180 \,\}$

$r(t) = A cos(2\pi\, f_0 t + \theta)$

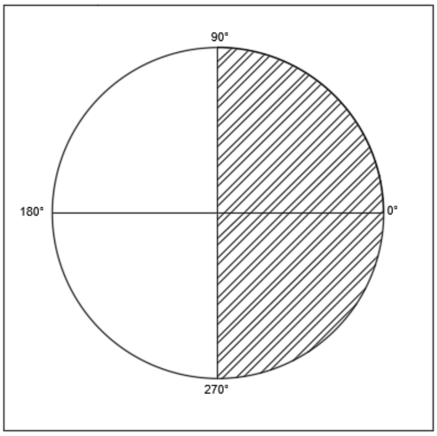
$$Z(nTs) = \int_{(n-1)Ts}^{nTs} A cos(2\pi\, f_0 t + \theta) cos(2\pi\, f_0 t + \phi)\ dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_{(n-1)Ts}^{nTs} cos(\theta - \phi) + cos(4\pi\, f_0 t + \theta + \phi)\ dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_{(n-1)Ts}^{nTs} cos(\theta - \phi) dt + \int_{(n-1)Ts}^{nTs} cos(4\pi\, f_0 t + \theta + \phi)\ dt$$

$$\frac{A}{2}\, cos(\theta - \phi) \int_{n-1)TS}^{nTs} dt = \frac{A}{2}\, cos(\theta - \phi)\ t|_{n-1)Ts}^{nTs}$$

$Z(nTs) = \frac{ATS}{2}\, cos(\theta - \phi)\ > 0 \Rightarrow\ cos(\theta - \phi)\ > 0$



$\theta - \phi\ < 90$

$\theta - \phi\ > 270$

- Pour corrélateur A $\quad \boldsymbol{\phi = 45}$

$$Z_1(nts) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta - 45 < 90 & \theta\ < 135 \\ \theta - 45 > 270 & \theta > 315 \end{cases}$$

Donc $\ Z_1(nTs) > 0\ \Longrightarrow\ \theta = (112.5, 67.5, 22.5, 337.5)$

- Pour le corrélateur B $\quad \boldsymbol{\phi = 90}$

$$Z_2(nTs) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta - 90 < 90 & \theta\ < 180 \\ \theta - 90 > 270 & \theta > 360 \end{cases}$$

Donc $\ Z_2(nTs) > 0\ \Longrightarrow\ \theta = (157.5, 112.5, 67.5, 22.5)$

- Pour le corrélateur C $\quad \boldsymbol{\phi = 135}$

$$Z_3(nTs) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta - 135 < 90 & \theta\ < 225 \\ \theta - 135 > 270 & \theta > 45 \end{cases}$$

Donc $\ Z_3(nTs) > 0\ \Longrightarrow\ \theta = (202.5, 157.5, 112.5, 67.5)$

- Pour le corrélateur D $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{180}$

$$Z_4(nTs) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta - 180 < 90 & \theta < 270 \\ \theta - 180 > 270 & \theta > 90 \end{cases}$$

Donc $Z_5(nTs) > 0 \implies \theta = (247.5, 202.5, 157.5, 112.5)$

Correspondances des sorties avec les angles et les bits :

	θ	Sorties				Bits		
		A	B	C	D	b3n-2	b3n-1	b3n
S1	22.5	+	+	-	-	0	0	0
S2	67.5	+	+	+	-	0	0	1
S3	112.5	+	+	+	+	0	1	1
S4	157.5	-	+	+	+	0	1	0
S5	202.5	-	-	+	+	1	1	0
S6	247.5	-	-	-	+	1	1	1
S7	292.5	-	-	-	-	1	0	1
S8	337.5	+	-	-	-	1	0	0

Exercice 04 :

1. Représentation du signal modulé 4-FSK

Modulation $4 - \text{FSK} \Rightarrow M = 4 \Rightarrow n = 2$

$$D = 100000\ bits/s \quad R = \frac{D}{n} = \frac{100000}{2} = 50000\ symboles/sec$$

$fc = 175\ KHz$ et $\Delta f = 25\ KHz$

- Pour 11 $\Rightarrow fc + 3\Delta f = 175 + 3 \times 25 = 250\ KHz$

  $250/50 = \mathbf{5}\ \boldsymbol{fois}\ \boldsymbol{R}$

- Pour 10 $\Rightarrow fc + \Delta f = 175 + 25 = 200\ KHz$

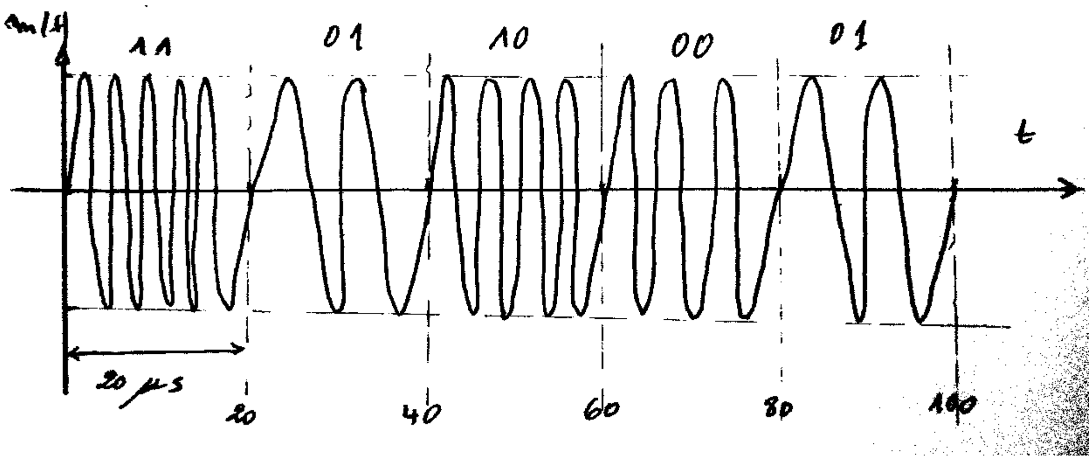
$200/50 = \mathbf{4\ fois\ R}$

- Pour $00 \Rightarrow fc - \Delta f = 175 - 25 = 150\ KHz$

  $150/50 = \mathbf{3\ fois\ R}$

- Pour $01 \Rightarrow fc - 3\Delta f = 175 - 3 \times 25 = 100\ KHz$

$100/50 = \mathbf{2\ fois\ R}$



$r(t) = \gamma A sin(2\pi(fc + 3\Delta f)t$

$\boldsymbol{z1(nTs)} = \int_{(n-1)Ts}^{nTs} \gamma A sin(2\pi(fc + 3\Delta f)t)\,.\, sin(2\pi(fc + 3\Delta f)t)\ \mathrm{dt}$

$= \gamma A \int_{(n-1)Ts}^{nTs} sin^2(2\pi(fc + 3\Delta f)t)\ \mathrm{dt}$

$= \frac{\gamma A}{2} \int_{(n-1)Ts}^{nTs} 1 - \cos 4\pi\,(fc + 3\Delta f)t)\ \mathrm{dt}$

$= \frac{\gamma A}{2}\ t|_{(n-1)Ts}^{nTs} \underbrace{- \int_{(n-1)Ts}^{nTs} \cos 4\pi\,(fc + 3\Delta f)t)\ \mathrm{dt}}_{=0}$

$= \frac{\gamma A}{2}\ (nts - (n-1)Ts) = \boldsymbol{\frac{\gamma ATs}{2}} = \boldsymbol{z1(nTs)}$

$\boldsymbol{z2(nTs)} = \int_{(n-1)Ts}^{nTs} \gamma A sin(2\pi(fc + 3\Delta f)t\,.\, sin(2\pi(fc + \Delta f)t\ \mathrm{dt}$

$= \frac{\gamma A}{2} \int_{(n-1)Ts}^{nTs} \cos 2\pi\,(3\Delta f - \Delta f)t - \cos 2\pi\,(2fc + 4\Delta f)t\ \ \mathrm{dt}$

$$= \underbrace{\frac{\gamma A}{2} \int_{(n-1)Ts}^{nTs} \cos 2\pi\,(3\Delta f - \Delta f)t)dt}_{=0} - \underbrace{\int_{(n-1)Ts}^{nTs} \cos\ (2\pi\,(2fc + 4\Delta f)t)\ \mathrm{dt}}_{=0}$$

$\boldsymbol{z2(nTs) = 0 = Z3(nTs) = Z4(nTs)}$

Si $\boldsymbol{r(t) = S1(t) \Rightarrow Z1(nTs)} = \boldsymbol{\frac{\gamma ATs}{2}} \rightarrow \mathbf{11}$

Si $\boldsymbol{r(t) = S2(t) \Rightarrow Z2(nTs)} = \boldsymbol{\frac{\gamma ATs}{2}} \rightarrow \mathbf{10}$

Si $\boldsymbol{r(t) = S3(t) \Rightarrow Z3(nTs) = \frac{\gamma ATs}{2} \rightarrow 00}$

Si $\boldsymbol{r(t) = S4(t) \Rightarrow Z4(nTs) = \frac{\gamma ATs}{2} \rightarrow 01}$

Exercice 05

1°/ $S_i\,(t) = A_i cos\,(2\pi f_0 t\ +\ \phi_i)\,g(t - iTs)$

2°/ $S\,(t) = \sum Si\,(t)\ =\ \sum A_i cos\,(2\pi f_0 t\ +\ \phi_i)\,g(t - iTs)$

$= \sum A_i[cos\,(\phi i) cos\,(2\pi f_0 t) -\ sin\,(\phi i)\ sin\,(2\pi f_0 t)]\,g(t - iTs)$

$= \sum\,[A_i \cos(\,\phi_i)\,cos\,(2\pi f_0 t) -\ A_i sin\,(\phi_i)\ sin\,(2\pi f_0 t)]\,g(t - its)$

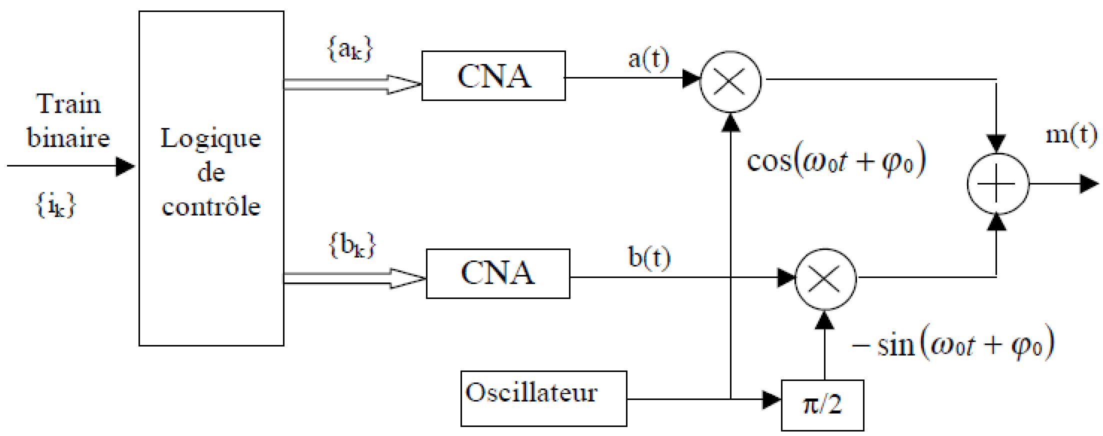
$= a(t)\ cos\,(2\pi f_0 t) -\ b(t)\ sin\,(2\pi f_0 t)$

$Avec\ \ a(t)\ =\ A_i \cos\,(\,\phi_i)\ \ g(t - its)\ =\ ai\ g(t - its)$

$b(t)\ =\ A_i sin\,(\phi_i)\ \ g(t - its)\ =\ bi\ g(t - its)$

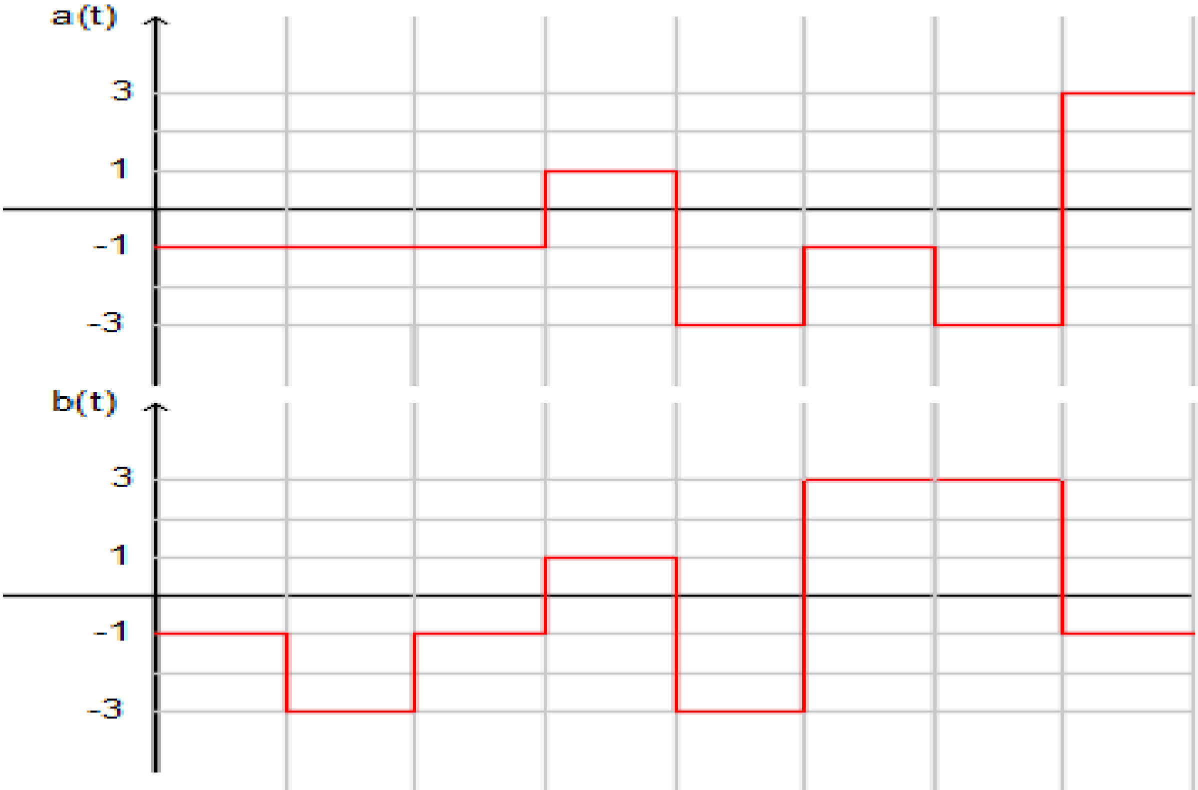
$c_i = a_i + jb_i = A_i(\cos\,(\,\phi_i)\ +\ j\,\sin\,(\,\phi_i)\,)\ =\ A_i\ e^{j\phi_i}$

Architecture de modulateur QAM.



3°/ I = 0011/1011/0011/0000/1111/1010/1110/0101

QAM – 16 ⇨ M=16 ⇨ n=4



4°/ Soit $r(t) = a(t)\cos(\omega_0 t) - b(t)\sin(\omega_0 t)$ le signal non bruité reçu par le récepteur. Pour la voie *A* et après multiplication avec la porteuse récupérée, on obtient :

$\hat{a}_1(t) = [a(t).\cos(\omega_0 t) - b(t).\sin(\omega_0 t)].\cos(\omega_0 t)$

$\hat{a}_1(t) = a(t)cos^2(\omega_0 t) - b(t)\sin(\omega_0 t).\cos(\omega_0 t)$

$$s_{a1}(t) = \frac{a(t)}{2}[1 + cos(2\omega_0 t)] - \frac{b(t)}{2}[\sin(2\omega_0 t) + \sin(0)]$$

Donc, après filtrage pour éliminer la composante à la fréquence *2f0* : $\hat{a}(t) = \frac{a(t)}{2}$.

De la même manière on obtient pour la voie B :

$b_1(t) = -[a(t).\cos(\omega 0t) - b(t)\sin(\omega 0t)].\sin(\omega 0t)$

$\hat{b}_1(t) = -a(t)\cos(\omega_0 t).\sin(\omega_0 t) + b(t)sin^2(\omega_0 t)$

$$\hat{b}_1(t) = -\frac{a(t)}{2}[\sin(2\omega_0 t) + \sin(0)] + \frac{b(t)}{2}[1 - cos(2\omega_0 t)]$$

Donc, après filtrage pour éliminer la composante à la fréquence *2f0* :

$\hat{b}(t) = \frac{b(t)}{2}$