Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MIA

Systèmes de Communication

Examen 2e session (1h30) - 20 juin 2008

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (6 points)

a) Dans le codage d'une trame MPEG-1, le nombre de bit par échantillon dans chaque bande i doit respecter la relation $n_i > \frac{P^i_{\mathrm{dB}} - M_i}{6}$, où P^i_{dB} et M_i désignent respectivement la puissance du signal et le seuil de masquage dans la i^{eme} bande. D'autre part, la somme des n_i doit rester inférieure à une certaine valeur N qui dépend du débit autorisé. Quel problème peut survenir ? Par quel mécanisme y remédie-t-on dans le codeur MP3 ? *(ne pas donner simplement le nom du mécanisme, mais expliquer en quoi il consiste)*

b) Pourquoi la radio-diffusion utilise-t-elle les grandes longueurs d'onde ?

c) Dans un système de communications, il faut trouver un compromis entre un débit raisonnable et une bonne protection des données, qui implique nécessairement une augmentation du débit. Expliquer brièvement comment ce compromis est mis en œuvre dans le codage de la parole sur le GSM.

d) Dans les systèmes de communications mobiles (GSM et UMTS), pourquoi entrelace-t-on les données après le codage de canal ?

2 Exercices

2.1 MAQ-8 (10 points)

Les constellations de deux modulations de type MAQ-8 sont représentées sur la figure 1. On les note respectivement C_1 et C_2.

Lors de l'émission d'un symbole de coordonnées (x, y), on reçoit, après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, un point (z_c, z_s) tel que :

$$\begin{aligned} z_c &= x + b_c \\ z_s &= y + b_s \end{aligned}$$

où b_c et b_s sont des variables aléatoires indépendantes, gaussiennes, centrées, de variance σ^2.

a) Ces constellations permettent-elle un codage de Gray ? (justifier) Pour la ou les constellation(s) le permettant, dessinez la constellation en indiquant sur chaque symbole le mot binaire associé.

b) Sur la constellation C_1, dessiner les zones de décisions associées aux différents symboles. On émet le symbole $S_{ij} = (\lambda, \lambda)$. Montrer que la probabilité de ne pas reconnaître ce symbole peut s'exprimer :

$$\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 1 - \mathrm{P}(-\lambda < b_c < \lambda)\mathrm{P}(b_s > -\lambda)$$

En exploitant le caractère gaussien de b_c et b_s, exprimer $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij})$ à l'aide de la fonction Q :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

On simplifiera l'expression obtenue en considérant que, pour un bruit de canal modéré, $Q(\lambda/\sigma) \ll 1$.

On peut montrer ainsi que pour les 4 symboles centraux de la constellation, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 3Q(\lambda/\sigma)$, tandis que pour les 4 autres, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 2Q(\lambda/\sigma)$. En déduire la probabilité d'erreur par symbole P_{eS}.

c) L'énergie d'un symbole de coordonnées (x, y) vaut $(x^2 + y^2)T/2$, où T désigne la durée symbole. Calculer l'énergie moyenne par symbole, puis la puissance moyenne, pour les deux modulations. Pour quelle valeur de λ les deux modulations ont-elles la même puissance ? On prend désormais cette valeur.

d) Pour chaque modulation, calculer le nombre moyen de plus proches voisins d'un symbole (*i.e.* le nombre de voisins situés à la distance minimale d_{min} de ce symbole).

e) La probabilité d'erreur par symbole d'une modulation s'exprime :

$$P_{eS} = K.Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

où K désigne le nombre moyen de plus proches voisins d'un point de la constellation.

Calculer la probabilité d'erreur par symbole pour chacune des deux modulation et vérifier votre résultat de la question b.

Pour un débit et une puissance d'émission donnés, la constellation la plus intéressante est celle qui offre la plus faible probabilité d'erreur. Que peut-on conclure ici ?

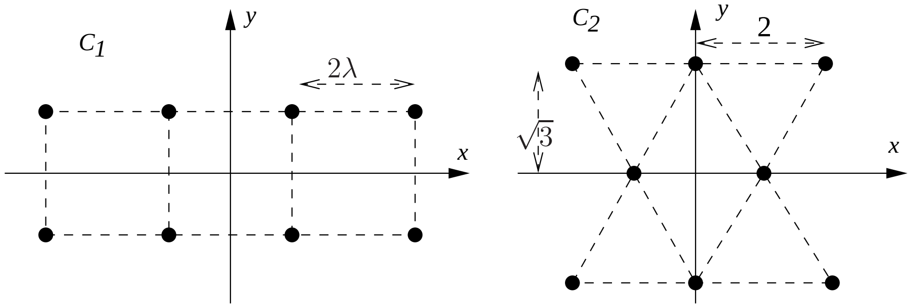

FIG. 1 – Constellations MAQ-8. Les traits pointillés relient les plus proches voisins.

2.2 Codage de canal (5 points)

Soit un code en bloc linéaire défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Quel est le rendement de ce code ?

b) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoirs de détection et de correction.

c) On reçoit le mot $r = 111011$. Décoder r selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu). Ce décodage est-il fiable ? (justifier votre réponse).

3 Annexes

Probabilités

Soient une variable aléatoire Z et deux réels a et b :

$$\mathrm{P}(a < Z < b) = \int_a^b \mathrm{p}(z)\mathrm{d}z$$

Densité de probabilité p d'une variable aléatoire gaussienne centrée Z de variance σ^2 :

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{z^2}{2\sigma^2}\Big)$$