

Electricité : Epreuve Finale
(Durée 1h30)

Rappel : Constante de Coulomb $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$

Exercice 1 : (5 points)

Un dipôle de moment dipolaire \vec{p} est maintenu fixe au point O (voir figure 1-a). On définit un point M repéré par son vecteur position $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$ et on suppose que r est très grand devant les dimensions du dipôle. Le potentiel créé par ce dipôle au point M est donné par l'expression suivante:

$$V(r, \theta) = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

- 1) Etablir l'expression des composantes radiale E_r et transversale E_θ du champ électrique \vec{E} créé par le dipôle au point M.

On place successivement aux positions M_1 et M_2 un deuxième dipôle de moment dipolaire \vec{p}' faisant un angle α avec la direction du dipôle \vec{p} (voir figure 1-b)

- 2) Pour $\alpha=30^\circ$, calculer l'énergie potentielle du dipôle \vec{p}' dans chacune des positions M_1 et M_2 .
 - 3) Représenter le dipôle \vec{p}' dans sa position d'équilibre stable en M_1 , puis en M_2 . Justifier.
- On donne : $\|\vec{p}\| = 3.7 \cdot 10^{-31} \text{ C.m}$; $\|\vec{p}'\| = 5.3 \cdot 10^{-31} \text{ C.m}$; $\|\vec{OM}_1\| = \|\vec{OM}_2\| = 1 \text{ cm}$

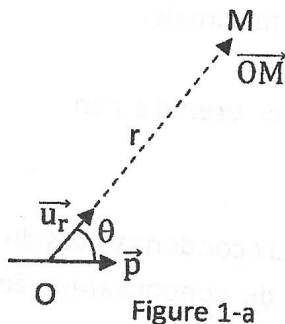


Figure 1-a

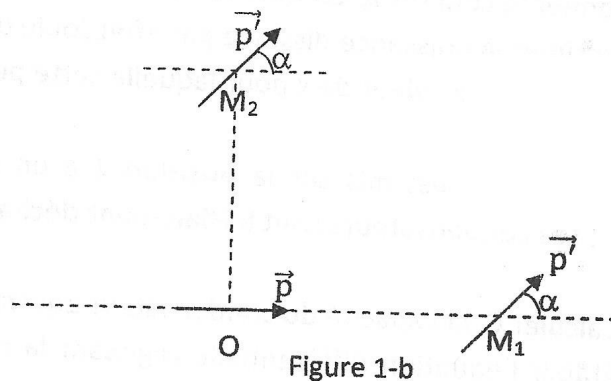


Figure 1-b

Exercice 2: (7 points)

Une sphère (S) de rayon $R=2 \text{ cm}$ et de centre O porte une charge totale $Q (>0)$ distribuée uniformément en volume. On notera que tout point M de l'espace est repéré par le vecteur $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$ et que le potentiel électrique créé par (S) est nul pour r tendant vers l'infini.

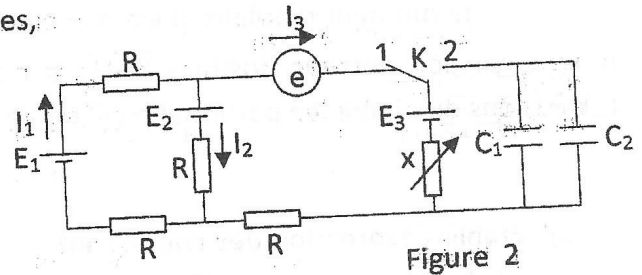
- 1) a) En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ créé par (S) pour $r > R$.
b) En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$ pour cette région.
- 2) a) Calculer le flux Φ_1 du champ électrique à travers la sphère, de centre O et de rayon $R_1=30 \text{ cm}$, sachant que $E(R_1) = 4 \cdot 10^3 \text{ V/m}$.
b) Quelle relation y a-t-il entre le flux Φ_1 et le flux Φ_2 du champ électrique à travers la sphère de centre O et de rayon $R_2 (R_2 > R_1)$?
c) En déduire le champ électrique $E(R_2)$ pour $R_2=2 R_1$.
- 3) a) Calculer la charge totale Q de (S) ainsi que sa densité volumique de charge ρ .
b) Calculer les potentiels $V(R_1)$ et $V(R_2)$.

- 4) On abandonne, sans vitesse initiale, une charge ponctuelle $q=1\text{nC}$ au point M_1 tel que $OM_1=R_1$. Déterminer l'énergie cinétique $E_c(M_2)$ de la charge q lorsqu'elle sera au point M_2 tel que $OM_2=R_2$.

Exercice 3 : (8 points)

Le circuit de la figure 2 comprend 3 générateurs réversibles, de forces électromotrices respectives E_1 , E_2 et E_3 , un récepteur pur de force contre-électromotrice e , des résistances identiques R , une résistance variable x , deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 et un interrupteur K à 2 positions.

On prendra : $R = 90 \Omega$, $E_1 = 200 \text{ V}$, $E_2 = 100 \text{ V}$, $E_3 = 50 \text{ V}$, $e = 50 \text{ V}$, $C_1 = 10000 \mu\text{F}$ et $C_2 = 5000 \mu\text{F}$.



- 1) L'interrupteur K est mis sur la **position 1**. Les intensités des courants sont appelées I_1 , I_2 et I_3 ; leurs sens sont indiqués sur la figure 2.
- En appliquant les lois de Kirchhoff, établir le système d'équations permettant de calculer les courants I_1 , I_2 et I_3 .
 - Donner le courant I_3 en fonction de la résistance x .
 - Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance x en fonction de x .
 - Trouver x_0 , la valeur de x pour laquelle cette puissance est maximale.
- 2) L'interrupteur K est mis sur la **position 2** à un instant qu'on prendra comme origine des temps. Les condensateurs sont **initialement déchargés**.
- Calculer C , la capacité du condensateur équivalent aux deux condensateurs du circuit.
 - Établir l'équation différentielle régissant la charge, $q(t)$, du condensateur équivalent en fonction de x et C .
 - En déduire la charge $q(t)$ à un instant t quelconque.
 - Pour $x = x_0$, calculer le temps t_0 au bout duquel le condensateur équivalent atteint les 80% de sa charge finale.
 - Calculer les charges finales Q_1 et Q_2 des deux condensateurs.

**Electricité : Epreuve Finale
(Barème)**

Exercice 1 : (5 points)

1) Expression des composantes E_r et E_θ du champ électrique \vec{E} créé par le dipôle au point M.

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp \cos \theta}{r^3}$$

0,25

0,5

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp \sin \theta}{r^3}$$

0,25

0,5

2) En M_1 : $\theta_1 = 0$ rd, $\vec{E}_1 \begin{cases} E_{r_1} = \frac{2Kp}{r^3} \\ E_{\theta_1} = 0 \end{cases}$ 0,25

$$E_{p_1} = -\vec{p}' \cdot \vec{E}_1 = -p' E_1 \cos \alpha = -\frac{Kpp'\sqrt{3}}{\|OM_1\|^3}$$
 0,5

A.N. $E_{p_1} = -3,05 \cdot 10^{-45} \text{ J}$

0,25

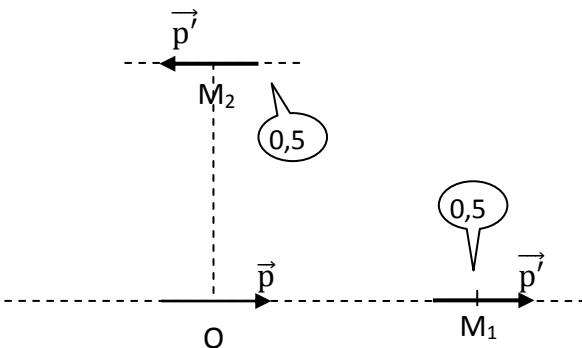
En M_2 : $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ rd $\vec{E}_1 \begin{cases} E_{r_2} = 0 \\ E_{\theta_2} = \frac{Kp}{r^3} \end{cases}$ 0,25

$$E_{p_2} = -\vec{p}' \cdot \vec{E}_2 = -p' E_2 \cos(\pi - \alpha) = p' E_2 \cos \alpha = \frac{Kpp'\sqrt{3}}{2\|OM_2\|^3}$$
 0,5

A.N. $E_{p_2} = 1,52 \cdot 10^{-45} \text{ J}$

0,25

3) Représentation du dipôle \vec{p}' dans sa position d'équilibre stable.



Justification : la position d'équilibre stable correspond à une énergie potentielle minimale. On trouve les valeurs $\alpha_1 = 0$ rd et $\alpha_2 = \pi$ rd.

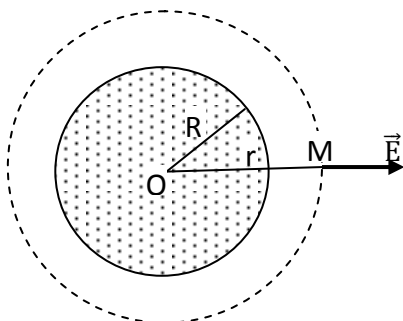
0,5

Exercice 2 : (7 points)

1) a) Expression du champ électrique $\vec{E}(r)$:

1,5

- Le champ électrique est radial (symétrie sphérique)
- La surface de Gauss est une sphère de rayon $r > R$
- Flux du champ électrique à travers la surface de Gauss:



$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S E \cdot ds = E \iint_S ds = E 4\pi r^2$$

- Charge enveloppée par la surface de Gauss: $q_{\text{int}} = Q$

- Théorème de Gauss : $\Phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \text{ou} \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

b) Expression du potentiel électrique $V(r)$:

Le champ étant radial, $dV = -E dr$ 0,5

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}$$

Et, puisque $V(\infty) = 0$, $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 0,5

2) a) Calcul du flux Φ_1 :

$$\Phi_1 = E(R_1) \cdot 4\pi R_1^2 \quad \text{A.N. } \Phi_1 = 4,52 \cdot 10^3 \text{ V.m}$$

b) Le flux de $\vec{E}(r)$ est le même à travers toutes les sphères de centre O et de rayon r (pour $R < r < \infty$) $\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$

c) $E(R_1) \cdot 4\pi R_1^2 = E(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 \Rightarrow$ pour $R_2 = 2R_1$, $E(R_2) = \frac{E(R_1)}{4}$
A.N. $E(R_2) = 10^3 \text{ V/m}$

3) a) Calcul de la charge totale Q :

Application du théorème de Gauss $\Rightarrow Q = \Phi \cdot \epsilon_0$ A.N. $Q \cong 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

La charge étant distribuée de manière uniforme, la densité volumique de charge est constante $\Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ A.N. $\rho = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3$

b) Calcul des potentiels $V(R_1)$ et $V(R_2)$:

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 1200 \text{ V}$$

$$V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 600 \text{ V}$$

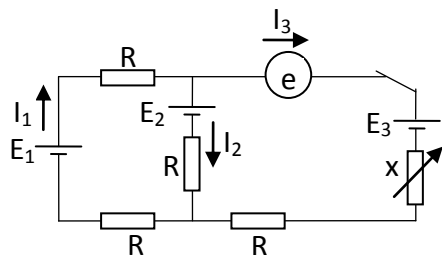
4) La charge q est soumise à une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}(r)$. Cette force est conservative.
 $E_c(M_2) - E_c(M_1) = E_p(M_1) - E_p(M_2)$

$$E_c(M_2) = q[V(R_1) - V(R_2)] \quad \text{A.N. } E_c(M_2) = 6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Exercice 3 : (8 points)

1) L'interrupteur K est mis sur la position 1.

a) Système d'équations permettant de calculer les courants I_1 , I_2 et I_3 :



Loi des nœuds :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Loi des mailles :

$$2RI_1 + RI_2 = E_1 - E_2$$

$$-RI_2 + (R + x)I_3 = E_2 - E_3 - e$$

b) Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 180 I_1 + 90 I_2 = 100 \\ -90 I_2 + (90 + x) I_3 = 0 \end{cases}$$

On élimine I_1 puis I_2 et on obtient :

$$I_3 = \frac{100}{450 + 3x} \quad \text{--- } 1$$

c) Puissance dissipée par effet Joule dans la résistance x :

$$P_x = x I_3^2 = \frac{10^4 x}{(450 + 3x)^2} \quad \text{--- } 0,5$$

0,25

d) Valeur de x pour laquelle cette puissance est maximale.

$$P_x \text{ est maximale si } \frac{dP_x}{dx} = 0 \quad \text{--- } 0,25$$

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{10^4 (450 - 3x)}{(450 + 3x)^3} \quad \text{--- } 0,5$$

$$\frac{dP_x}{dx} = 0 \text{ pour } x_0 = 150 \Omega \quad \text{--- } 0,25$$

(On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum en cherchant le signe de la dérivée seconde de P_x qui doit être négative)

2) L'interrupteur K est mis sur la **position 2**.

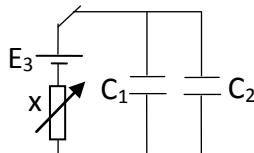
a) Capacité du condensateur équivalent :

$$C = C_1 + C_2 = 15000 \mu\text{F} \quad \text{--- } 0,25$$

b) Equation différentielle régissant la charge :

$$x \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_3$$

$$x \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 50 \quad \text{--- } 1$$



c) Charge $q(t)$ à un instant t quelconque :

$$q = 50 C \left(1 - e^{-\frac{t}{xC}} \right) \quad \text{--- } 1 : \text{ Pour la résolution}$$

d) Calcul du temps t_0 :

$$q(t_0) = \frac{80}{100} 50 C = 50 C \left(1 - e^{-\frac{t_0}{xC}} \right) \quad \text{--- } 0,25$$

$$t_0 = x_0 C \ln 5 \quad \text{--- } 0,25 \quad \text{A.N. } t_0 = 3,62 \text{ s} \quad \text{--- } 0,25$$

e) Calcul des charges finales Q_1 et Q_2 .

Les 2 condensateurs sont en parallèle :

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C} = \frac{50 C}{C} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = C_1 50 = 0,5 C \\ Q_2 = C_2 50 = 0,25 C \end{cases} \quad \text{--- } 0,25$$

$$0,5$$