معهد الصيانة و الأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

CONCOURS DU DOCTORAT

Ingénierie de la Sécurité des Procédés et d'Environnement

Epreuve de: Méhodes Numériques

Durée : 2h

*L'epreuve est sous forme de QCM, SVP donnez directement la bonne reponse sans démonstration.*

**Exercice 1:** *(4pts)*

On cherche à résoudre le système linéaire: $Cx = d$, $C$ est une matrice carrée, $x$ et $d$ sont les vecteurs de dimension adéquate.

1. Dans quel cas peut-on utiliser la méthode de Jacobi pour résoudre le système précédent ? *(1pt)*
   - *(i)* Si la matrice $C$ est telle que ses composantes vérifient : $|c_{ii}| > \sum_{j\neq i} |c_{ij}|$
   - *(ii)* Si la matrice $C$ est telle que ses composantes vérifient : $|c_{ii}| < \sum_{j\neq i} |c_{ij}|$
   - *(iii)* Si la matrice $C$ est inversible.
2. Si $|c_{ii}| < \sum_{j\neq i} |c_{ij}|$ est ce que la matrice $C$ est obligatoirement non inversible ? *(1pt)*
   - *(i)* Oui
   - *(ii)* Non .
3. Quelle condition doit vérifier la matrice $(I - \rho C)$ pour qu'il y ait convergence ? *(1pt)*
   - *(i)* $|||(I - \rho C)|||_2 \leq 2$
   - *(ii)* $\sqrt{\varrho((I-\rho C)^T(I-\rho C))} < 1$ (avec $\varrho(A)$ rayon spectral de la matrice $A$.
4. Dans ce cas, quel est le pas $\rho$ optimal ?
   - *(i)* $\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}^{2}}$ ( $\lambda_{min}$ et $\lambda_{max}$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de $C$),
   - *(ii)* $\frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$

**Exercice 2:** *Intégration numérique (7pts)*

On cherche à approcher l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad a < b$

par la formule de quadrature suivante :

$$I(f) \approx (b-a)\left(w_0^{(1)} f(a) + w_1^{(1)} f(b)\right)$$

Avec

$$w_i^{(1)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \ell_i(x)\,dx$$

et $l_i(x)$, polynôme de Lagrange nécessaire pour l'interpolation, avec $(x_0; y_0) = (a; f(a))$ et $(x_1; y_1) = (b; f(b))$.

1. Quel sont les bonnes valeurs des poids $w_0^{(1)}$ et $w_1^{(1)}$ ? *(2pts)*

| | |
|---|---|
| *(i)* $w_0^{(1)} = a/2b$ | *(j)* $w_1^{(1)} = -a/2b$ |
| *(ii)* $w_0^{(1)} = (b-a)/2$ | *(jj)* $w_1^{(1)} = (b+a)/2$ |
| *(iii)* $w_0^{(1)} = 1/2$ | *(jjj)* $w_1^{(1)} = 1/2$ |

2. Quel est le résultat de calcule d'intégrale approchée *I(f)* par la formule de quadrature ? *(1pt)*
   - *(i)* $I(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$
   - *(ii)* $I(f) = \frac{(b-a)^2}{4}(f(a) - f(b))$
   - *(iii)* $I(f) = \frac{b+a}{2ab}(f(a) - f(b))(x-2)$
3. Application : pour ***f(x)=x*** et ***[a, b]= [1, 2]***.
   a. Quel est la valeur exacte de l'intégrale de *f(x)*? *(1pt)*
      - *(i)* $I(f) = 4.000$
      - *(ii)* $I(f) = 1.500$
      - *(iii)* $I(f) = 3.000$

   b. Quel est la valeur approchée d'intégrale de *f(x)* par la formule de quadrature? *(1.5pt)*
      - *(i)* $I(f) = 1.500$
      - *(ii)* $I(f) = 3.197$
      - *(iii)* $I(f) = 3.989$
      - *(iiii)* $I(f) = 1.517$

   c. Que conclus-vous ? *(1.5pts)*
      - *(i)* la méthode de Quadrature est une méthode approchée.
      - *(ii)* la méthode de Quadrature est une méthode exacte.
      - *(iii)* la méthode de Quadrature est sable et convergente.
      - *(iiii)* la méthode de Quadrature est une méthode linéaire approchée.

**Exercice 3 :** *Résolution numérique d'équation différentielle Ordinaire (EDO) (9pts)*

Considérons une tasse de café à la température de ***75°C*** dans une salle à ***25°C***. On suppose que la température du café suit la loi de Newton, c'est-à-dire que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures. En formule cela signifie qu'il existe une constante ($K < 0$) telle que la température vérifie l'équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre.

$$T'(t) = K(T(t) - 25).$$

La condition initiale (CI) est donc simplement

$$T(0)=75.$$

Pour calculer la température à chaque instant on a besoin de connaître la constante ***K***. Cette valeur peut être déduite en constatant qu'après **5** minutes le café est à ***50°C***, c'est-à-dire :

$$T(5)=50.$$

1. Quel est la solution exacte (générale) du problème de CAUCHY (*c-à-d.* EDO avec CI)? *(3pts)*
   - *(i)* La solution est : $T(t) = D * ln(-\frac{K}{t})/25$ définie pour tout $t \in \Re$ et $D$ constante $\in \Re$
   - *(ii)* La solution est : $T(t) = 25 + De^{Kt}$ définie pour tout $t \in \Re$ et $D$ constante $\in \Re$
   - *(iii)* La solution est : $T(t) = 25 + D - Ke^{-1/t}$ définie pour tout $t \in \Re^*$ et $D$ constante $\in \Re$
2. Quel est la valeur numérique de la constante d'intégration ***D*** ? *(1pt)*
   - *(i)* $D = 50.00$
   - *(ii)* $D = -1.00$
   - *(iii)* $D = 100.00$
   - *(iiii)* $D = 50 + K$
3. Quel est la valeur numérique de la constante de refroidissement *K* ? *(1pt)*
   - *(i)* $K = -\ln(D)/2$
   - *(ii)* $K = 1.71$

(iii) $K = -0.14$

(iiii) $K = 25$

4. Soit $h=\Delta t$ le pas temporel. Quel es la méthode d'EULER explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO)? *(1pt)*
   - (i) $T_{i+1} = T_i + hf(t_i, T_i)$ et $f(t_i, T_i) = T'(t)$.
   - (ii) $T_i = T_{i-1} + 2hf(t_{i-1}, T_{i-1})$ et $f(t_i, T_i) = T'(t)$.
   - (iii) $T_{i+1} = T_i + 2hf(t_{i+1}, T_{i+1})$ et $f(t_i, T_i) = T'(t)$.

5. Que peut-on en déduire sur la méthode d'EULER explicite en compare les solutions (pour $h=1$ et $h=5$) sur l'intervalle temps [1, 15] avec la solution exacte ? *(3pts)*
   - (i) Pour h=1, la méthode d'EULER est plus précise que pour h=5.
   - (ii) Pour h=5, la méthode d'EULER est plus précise que pour h=1.
   - (iii) Pour h=1, la méthode d'EULER produit des erreurs plus importants que pour h=5.

**CONCOURS DU DOCTORAT**
**Ingénierie de la Sécurité des Procédés et d'Environnement**
**10/10/2015**

**Epreuve de: THERMODYNAMIQUE** **Durée : 2h**

**Exercice I : (14 pts)**

Le moteur à explosion est un moteur à combustion interne dont l'allumage est commandé par des éclateurs (bougies). Il fonctionne suivant le cycle de Beau de Rochas. Ce cycle est constitué de deux isentropiques et deux isochores que subit un mélange d'air et de carburant. Le système fermé considéré est donc une masse déterminée de ce mélange. Plus précisément, le cycle peut être décrit en quatre temps:

1. un cylindre admet le mélange à travers une soupape d'admission dans un volume $V_A$ (portion **IA** du cycle);
2. les soupapes sont fermées et le mélange subit une compression isentropique jusqu'à un volume $V_B$ (portion **AB**). Au point **B** se produit l'explosion du mélange qui augmente la pression de **B** à **C**;
3. les soupapes sont toujours fermées et les produits de la combustion subissent une détente isentropique en repoussant le piston jusqu'à sa position initiale (portion **CD**);
4. La soupape d'échappement s'ouvre : la pression chute brutalement (portion **DA**), et les gaz brûlés sont évacués.

Le cycle est caractérisé par le taux de compression volumétrique $\alpha$ qui vaut $\frac{VA}{VB}$ . Les températures du mélange en A et C valent $T_A = 293K$ et $T_C = 1220K$.

1. Tracer schématiquement ce cycle de Beau de Rochas dans le diagramme de Clapeyron, en faisant figurer les 5 points **I, A, B, C,** et **D.**
2. Identifier sur le cycle les quantités de chaleur échangées et leurs signes, les travaux fournis et leurs signes, et écrire le bilan thermique sur un cycle.
3. Donner l'expression des quantités de chaleur échangées et donner l'expression de l'efficacité $\eta_m$ de ce moteur thermique. Faire l'application numérique.
4. Montrer que l'efficacité de ce moteur ne dépend que du taux de compression $\alpha$.
5. Calculer le rendement (par rapport au moteur de Carnot idéal) de ce cycle.

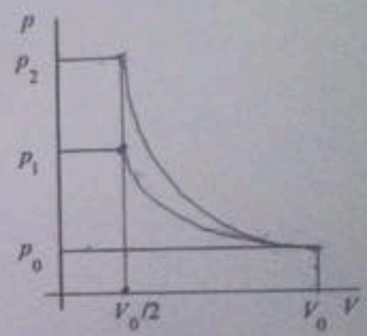
Pour l'application numérique, on considère : $\gamma = 1,4$ et $\alpha = 9$.

**Suite page 2**

**Suite :**

**Exercice II : (3 pts)**

On prépare deux échantillons d'un gaz parfait de volume $V_0$, de température $T_0$ et de pression $P_0$. Le premier système subit une transformation isothermique réversible; le second système est le siège d'une transformation adiabatique réversible. Le volume final de chaque système vaut : $V_f = V_0/2$.



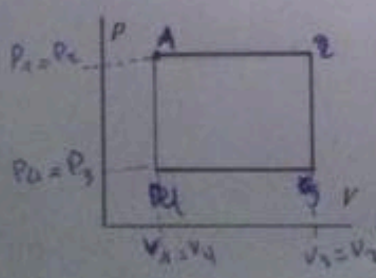

On peut affirmer que la pression finale ***Pf,adiabatique*** sera :

- plus grande que la pression ***Pf,isotherme*** ou
- égale à ***Pf,isotherme*** ou
- plus petite que ***Pf,isotherme***

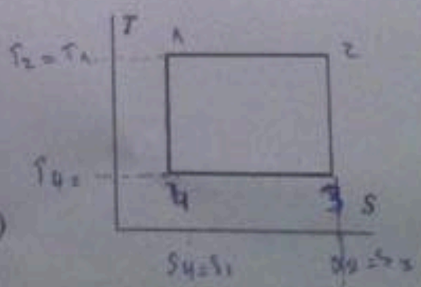
Justifier votre réponse.

**Exercice III : (3 pts)**

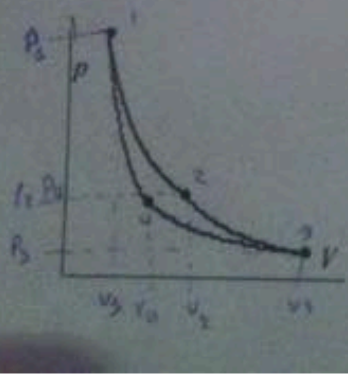
Lesquels des diagrammes suivants peuvent-ils éventuellement représenter un cycle de Carnot ? Justifier votre réponse.



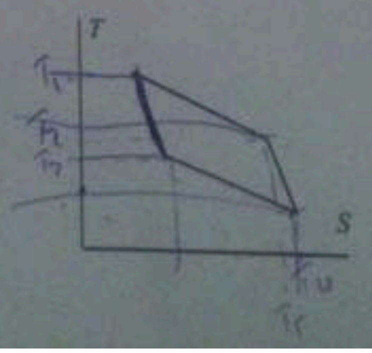

(1)




(2)




(3)




(4)