Corrigé Partiel Topologie L3, 11 2008

Responsable Patrick Delorme

Documents et calculettes non autorisés

I Soit A, B des parties d'un espace métrique (E, d). Pour tout ouvert O de E inclus dans $A \cap B$, démontrer que O est contenu dans l'intersection $Int(A) \cap Int(B)$ de l'intérieur $Int(A)$ de A et de l'intérieur $Int(B)$ de B. En déduire $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

Corrigé de I

Soit O ouvert de E inclus dans $A \cap B$. Comme l'intérieur de A est le plus grand ouvert de E contenu dans A et que O est un ouvert contenu dans A, on a $O \subset Int(A)$. De même on voit que $O \subset Int(B)$ Donc $O \subset int(A) \cap Int(B)$. Appliquant ceci à $O = Int(A \cap B)$, on en déduit $Int(A \cap B) \subset Int(A) \cap Int(B)$. Par ailleurs $Int(A) \cap Int(B)$ est un ouvert (intersection de 2 ouverts) contenu dans $A \cap B$ donc contenu dans $Int(A \cap B)$, qui est le plus grand ouvert contenu dans $A \cap B$. On a montré, par une double inclusion, l'égalité:

$$Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$$

II

1)$\mathbb{Q}$ est il un ouvert de $\mathbb{R}$?: a) faire un dessin, b) donner la réponse, c) la justifier.

2) $\mathbb{Q}$ est il un fermé de $\mathbb{R}$? : a) faire un dessin, b) donner la réponse, c) la justifier.

Corrigé de II

1) $\mathbb{Q}$ n 'est pas ouvert: Il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide contenu dans $\mathbb{Q}$, car entre deux rationnels il existe toujours un irrationnel.

2) $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$: la racine carrée de 2 n'est pas un nombre rationnel et c'est la limite d'une suite de rationnels. Plus généralement tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels. L'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$, et donc est distincte de $\mathbb{Q}$.

III Soit E un ensemble. On définit une application d sur $E \times E$ par:
$d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ si $x = y$.
1) Montrer que c'est une distance sur E.
2) Quelles sont les suites de Cauchy sur E. Que peut on conclure pour (E, d).

Corrigé de III
1)Soit $x, y, z \in E$. Il est clair que $d(x, y)$ est nul si et seulement si $x = y$, et que $d(x, y) = d(y, x)$. Comparons $A = d(x, z)$ et $B = d(x, y) + d(y, z)$. Si y n'est pas à la fois égal à x et z, B est au moins égal à 1 tandis que A est inférieur ou égal à 1. Donc $A \leq B$ dans ce cas. Si par contre y est à la fois égal à x et z, alors $A = B = 0$.Dans tous les cas $A \leq B$, ce qui montre l'inégalité triangulaire. Donc d est une distance.
2) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. En particulier (en prenant $\varepsilon = 1/2$ dans la définition des suites de Cauchy: voir cours), il existe N tel que:

$$\forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) \leq 1/2$$

Mais tenant compte du fait que la distance ne prend que les valeurs 0 et 1, on en déduit

$$\forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) = 0$$

En prenant $p = n$, $q = N$, on en déduit:

$$\forall n \geq N, x_n = x_N$$

Conclusion: les suites de Cauchy sont des suites constantes à partir d'un certain rang. Elles sont donc convergentes et l'espace métrique (E, d) est complet.
IV
1) Soit f une application de E dans F, et B une partie de F. Rappelez la definition de $f^{-1}(A)$.
2) On munit $\mathbb{R}^2$ de l'une des distances de d_1 , d_2, d_∞. Montrez que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^2$ est continue. En déduire que l'ensemble $\{(x, y) \in R^2 | x^3 + y^2 < 1\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Si l'on utilise un ou plusieurs théorème on le ou les citera.
3) L 'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$g(x, y) = (x - y)/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$
$g(0, 0) = 0$
est-elle continue en $(0, 0)$? Pour répondre et justifier la réponse, on utilisera

un Théorème du cours que l'on citera complètement.
Corrigé de IV
1) $f^{-1}(A) = \{x \in E | f(x) \in A\}$.
2) Une suite (x_n, y_n) de $\mathbb{R}^2$ converge vers (x, y) pour l'une des trois distances considérées si et seulement si (x_n) converge vers x dans $\mathbb{R}$ et (y_n) converge vers y dans $\mathbb{R}$.
Il est clair qu'alors $(f(x_n, y_n))$ converge vers $f(x, y)$. Donc d'après la caractérisation de la continuité par les suites, f est continue.
L'ensemble $\{(x, y) \in R^2 | x^3 + y^2 < 1\}$ est égal à $f^{-1}(] - \infty, 1])$ donc est ouvert comme image réciproque de l'intervalle ouvert $(] - \infty, 1]$ par l'application continue f.
3) Pour que f soit continue en $(0, 0)$ il faut et il suffit (cours) que pour toute suite (x_n, y_n) tendant vers $(0, 0)$, $(f(x_n, y_n))$ tende vers $f(0, 0)$. Mais pour la suite $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$ qui tend vers $(0, 0)$, $f(x_n, y_n) = n$ ne tend pas vers $0 = f(0, 0)$. Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.