

01. Rappels.

Nous rappelons ici quelques notions essentielles d'ensembles, d'analyse fonctionnelle ou de logique. L'objectif escompté étant la rédaction formelle à l'aide de *méthodes de raisonnement* qui rappelle la *rigueur* globale d'une *démonstration*.

1-1. Notions sur les ensembles.

La notion d'ensemble constitue une base, devenue au fil du développement des mathématiques, indispensable à tout raisonnement. L'*ensemble* se retrouvera en bonne place notamment en *analyse fonctionnelle*.

1-1. Définition-01 (ensemble, cardinal, vide)

Un ensemble est une *collection d'objets partageant les mêmes critères*. Le *cardinal d'un ensemble E* est le nombre n d'éléments qu'il contient. On note : $\text{card}(E) = n$.

Un ensemble V tel que $\text{card}(V) = 0$, est dit *ensemble vide* et noté : $V = \emptyset$ ou $V = \{ \}$.

1-2. exemple-01 (être)

Soit H l'ensemble des êtres humains. Observons qu'en H , on peut reconnaître :

- L'Objet \equiv être vivant (situé dans le vivant).
- Le Critère \equiv humain (appartenance à l'espèce humaine).

1-3. exemple-02 (abstrait) les parties d'un ensemble non vide quelconque noté E .

Rappelons qu'une partie d'un ensemble E est simplement un sous-ensemble de E .

ensemble	objet	Critère(s)
E	Objet quelconque	Critères définissant E
$\mathcal{P}(E)$	Partie quelconque	Partie incluse dans E

1-4. Remarque-01 (le vide)

Ecrire l'ensemble vide, dans le cas de l'exemple-01 puis dans le cas de l'exemple-02.

Que peut-on dire des deux ensembles vides ? sont-ils identiques ?

Notons que le cardinal d'un ensemble E quelconque, présente deux possibilités :

$$\text{Card}(E) = \begin{cases} n, & \text{où } n \in \mathbb{N} \text{ (} E \text{ est dit alors ensemble fini)} \\ +\infty, & \text{(} E \text{ est dit alors ensemble infini)} \end{cases}$$

1-5. Définition-03 (dénombrable, puissance du continu)

Ensemble dénombrable : Un ensemble non vide E est dit dénombrable s'il est en bijection avec \mathbb{N} i. e. on peut numéroter, ou compter ses éléments. (ex. : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$). On dit aussi qu'un tel ensemble est *discret*.

Ensemble ayant la puissance du continu : Une partie de \mathbb{R} , non vide I , a la *puissance du continu* s'il n'existe pas de bijection de $I \rightarrow \mathbb{N}$. (ex : $I = [0,1]$) : i.e. entre 2 éléments différents de I , aussi proches que l'on veut, il y a une infinité d'éléments de I .

1-6. Remarque-01 (dénombrabilité, finitude)

Tout ensemble fini est clairement dénombrable puisqu'on peut compter ses éléments, mais en général, la réciproque est fautive.

Un ensemble infini peut être dénombrable ou avoir la puissance du continu.

Exemple-01 : \mathbb{N} est infini et dénombrable (en bijection avec lui-même).

Exemple-02 : soit $I = [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$ i.e. I est un intervalle de longueur $|b - a| > 0$ donc infini. Et I possède la puissance du continu. Autrement dit entre deux éléments distincts quelconques de I , il existe une infinité d'éléments de I .

1-2. Opérations sur les ensembles.

Soient un ensemble quelconque $E \neq \emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On peut définir des *opérations* et des *relations* sur $\mathcal{P}(E)$. Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$, on définit les *opérations* et *relation* de base suivantes.

1-1. Opération-01 (UNION)

C est l'union (ou la réunion), notée \cup , de A et B qu'on écrit $C = A \cup B$, qu'on lit « C égal A union B », si par définition : $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$.

1-2. Opération-02 (INTERSECTION)

C est l'intersection, notée \cap , de A et B qu'on écrit $C = A \cap B$, qu'on lit « C égal A inter B », si par définition : $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$.

1-3. Opération-03 (DIFFERENCE, DIFFERENCE SYMETRIQUE)

C est la différence, notée \setminus , entre A et B qu'on écrit $C = A \setminus B$, qu'on lit « C égal A moins B », si par définition : $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$.

C est la différence symétrique, notée Δ , entre A et B qu'on écrit $C = A \Delta B$, qu'on lit « C égal A delta B », si par définition : $(x \in A \Delta B) \Leftrightarrow (x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

1-4. Opération-04 (COMPLEMENTAIRE)

A est le complémentaire de B dans E qu'on écrit $A = C_E^B$, qu'on lit « A est égal au complémentaire de B dans E », si par définition : $(x \in C_E^B) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (x \notin B))$.

1-5. Remarque-01 (différence et complémentaire)

A l'aide des définitions 03 et 04, on peut vérifier que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E); C_E^A = B \setminus A$.

1-6. Relation-01 (INCLUSION)

A est inclus dans B (inclusion notée \subseteq) et on écrit $A \subseteq B$, qu'on lit « A est inclus ou égal à B », si tout élément de A est dans B i.e. : $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x \in A; x \in B)$.

1-7. Exercice-01 (relation : INCLUSION)

Montrer l'équivalence suivante : $(A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow (A = B)$.

Indication : se ramener à la double inclusion, et à la double implication en utilisant les définitions :

- $(H = G) \stackrel{\text{Déf.}}{\Leftrightarrow} (H \subseteq G) \wedge (G \subseteq H)$ où $(H, G \in \mathcal{P}(X) \text{ où } X \neq \emptyset)$.
- $(P \Leftrightarrow Q) \stackrel{\text{Déf.}}{\Leftrightarrow} (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ où $(P, Q \text{ propositions logiques})$.

1-8. Remarque-02 (opération et relation)

L'opération \mathcal{O} diffère de la relation \mathcal{R} dans $X (X \neq \emptyset)$. \mathcal{O} agit sur $x, y \in X$ pour produire $z \in X$ tq $x \mathcal{O} y = z$. Tandis que \mathcal{R} compare simplement x et $y \in X$ et donne :

- soit $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$ si x et y sont comparables,
- soit $x \not\mathcal{R} y$ si x et y sont incomparables.

Exemples :

$E =]-1,8[$	$A_1 = \{1,2\}$	$A_2 = \{0,3,7\}$	$A_3 = \{1,2,7\}$
$\forall i \in \{1,2,3\}; E \supset A_i, I_i$	$I_1 = [1,2]$	$I_2 = [0,7[$	$I_3 =]3,7[$
Opération : \cup	$A_1 \cup A_2 = \{0,1,2,3,7\}$	$A_1 \cup A_3 = \{1,2,3\}$	$A_2 \cup A_3 = \{0,1,2,3,7\}$
Opération : \cap	$I_2 \cap A_2 = \{0,3\}$	$I_3 \cap A_2 = \emptyset; I_1 \cap A_3 = A_1$	$I_3 \cap I_2 = I_3;$
Relation : \subseteq	$A_1 \subseteq I_1; A_1 \subseteq A_3$	$\forall i, j \in \{1,2,3\}; I_i \not\subseteq A_j$	$I_1 \subseteq I_2; I_3 \subseteq I_2$

1-9. Remarque-03 (relation \subset ou \subseteq)

$A, B \in \mathcal{P}(E)$, comme avec la relation l'ordre « $<$ ou \leq » dans \mathbb{R} qui peut être stricte ou large, on dira que :

- Si $A \subset B$, A est strictement inclus dans B , (non égalité)
- Si $A \subseteq B$, A est largement inclus dans B (égalité possible).

Par ailleurs $A \subseteq B$ peut se lire B contient A et se noter : $B \supseteq A$.

1-10. Relation-02 (égalité d'ensembles)

$A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a l'égalité d'ensemble : $(A = B) \stackrel{\text{Déf.}}{\iff} ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$.

1-11. Remarque-04 (la non-relation)

Si A n'est pas égal à B on note : $A \neq B$. De façon générale toute relation « \leq » définit la non-relation « \nleq ». Exemples : $(=, \neq)$; $(\subset, \not\subset)$; $(\supset, \not\supset)$; $(\subseteq, \not\subseteq)$; $(\supseteq, \not\supseteq)$...

1-12. Quelques ensembles particuliers

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les ensembles :

1. $f(I)$ est appelé : image directe de I par la fonction f . Avec :
$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f; f(x) = y\}$$
2. $B \subseteq \mathbb{R}$ ($B \neq \emptyset$). $f^{-1}(B)$ est appelé : image réciproque de B par f . Avec :
$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid \exists y \in B; f(x) = y\}$$

1-3. Éléments de logique mathématique

1-1. Définition-01 (Assertion)

Une assertion est une affirmation simple que l'on peut qualifier, sans ambiguïté et sans informations complémentaires, de VRAIE (V) ou de FAUSSE (F).

Une proposition logique P (assertion évoluée), vraie (V) ou fausse (F), admet sa négation non P ou \bar{P} . Ce faisant, on définit une correspondance entre les valeurs de P et celles de sa négation \bar{P} , à l'aide de la *table de vérité* :

P	$\text{Non } P = \bar{P}$
V	F
F	V

Exemple-01 (Assertion)

$P =$ « 2 points de l'espace sont toujours alignés »..... (V) ou (F) $\rightarrow P$ est ?

$P =$ « 3 points de l'espace sont toujours dans un même plan » (V) ou (F) $\rightarrow P$ est ?

$P =$ « 3 points non alignés sont dans un même cercle »..... (V) ou (F) $\rightarrow P$ est ?

1-2. Connecteurs logiques

Un raisonnement peut contenir plusieurs assertions ou propositions logiques reliées entre elles par des *relations* ou *connexions*, matérialisées par des *connecteurs logiques*. Les quatre principaux connecteurs logiques sont :

la conjonction notée : et ,	l' implication de symbole : « \Rightarrow »
la disjonction notée : ou ,	l' équivalence de symbole : « \Leftrightarrow »

Deux propositions logiques P et Q peuvent s'associer sous les formes suivantes :

1. (P **et** Q) ou bien ($P \wedge Q$) : **et** est dit *connecteur de conjonction*.
2. (P **ou** Q) ou bien ($P \vee Q$) : **ou** est dit *connecteur de disjonction*.
3. ($P \Rightarrow Q$) lu « P entraîne (ou implique) Q » : est dite *implication*.
4. ($P \Leftrightarrow Q$) lu « P équivalent à Q » : est dite *équivalence logique*.

1-3. Remarque-05 :

L'*équivalence* est construite à l'aide des *implications* (3.) et (4.), rattachées par la *conjonction* (1.). On parle alors de *double implication* pour exprimer la notion d'*équivalence* :

$$\left[\underbrace{(P \Rightarrow Q)}_{(3.)} \text{ et } \underbrace{(Q \Rightarrow P)}_{(4.)} \right]_{(1.)} \xLeftrightarrow{\text{Déf.}} [(P \Leftrightarrow Q)]$$

La table de vérité associée aux quatre connecteurs logiques est donnée par :

P	Q	$P \wedge Q$ $P \text{ et } Q$	$P \vee Q$ $P \text{ ou } Q$	$\bar{P} \vee Q$ $P \Rightarrow Q$	$(\bar{P} \vee Q) \wedge (\bar{Q} \vee P)$ $P \Leftrightarrow Q$
V	V	?	?	?	?
V	F	?	?	?	?
F	V	?	?	?	?
F	F	?	?	?	?

(A compléter ...)

1-4. Propriétés des connecteurs logiques

Les connecteurs « et » et « ou », qui sont relationnels, vérifient La symétrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{symétrie de ou, et : } [(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)] ; [(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)]. \\ \text{négation de ou, et : } [(\bar{P} \text{ et } \bar{Q}) \Leftrightarrow (\bar{P}) \text{ ou } (\bar{Q})] ; [(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q}) \Leftrightarrow (\bar{P}) \text{ et } (\bar{Q})]. \end{array} \right.$$

La *contraposée* de l'implication ($P \Rightarrow Q$) est l'implication ($\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$).

Ces deux implications vérifient : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(\bar{Q}) \Rightarrow (\bar{P})]$.

1-5. Remarque-06

En notons $(\text{non } P) = \bar{P}$, la *négation* de la *négation* d'une proposition P est une affirmation : $(\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P)$. Plus simplement, on peut écrire : $(\bar{\bar{P}} = P)$. On peut trouver noter : $[\bar{e}t = ou]$; $[\bar{o}u = et]$; $[\bar{\forall} = \exists]$; $[\bar{\exists} = \forall]$; $[\bar{\cup} = \cap]$; $[\bar{\cap} = \cup]$; $[\bar{\equiv} \Leftrightarrow \neq]$; $[\bar{\subset} = \not\subset]$ etc...

1-6. Méthode et raisonnement logique.

Pour démontrer une proposition quelconque, il existe des méthodes et raisonnement rigoureux. Le choix d'une méthode ou raisonnement dépend, évidemment du contexte de la question étudiée, mais essentiellement de la conclusion à prouver.

1.2-1. Le raisonnement par récurrence (cas de propriétés à variable discrète)

Le type standard de proposition :

Sachant que $I \subseteq \mathbb{N}$ et $\forall n \in I, n + 1 \in I$ montrer que : $\forall n \in I, P(n)$ est Vraie.

Méthode : (3 étapes E1, E2, E3)

- E1. On vérifie $P(n)$ pour les 2 (ou 3) valeurs initiales successives de $n \in I$;
 $n_0 + i; i = 0 \text{ à } 2$. Si on a : $P(n_0 + i)$, Vrai ; $i = 0 \text{ à } 2$, Continuer.
- E2. On suppose que ce résultat reste vrai **jusqu'à l'ordre** $n = n_0 + k$, i.e. :
 $P(n_0 + j)$ Vraie ; $\forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$. Montrons alors que $P(n)$ reste vrai à
l'ordre suivant $n = (n_0 + k) + 1$ i.e. : si $P((n_0 + k) + 1)$ Vrai, Continuer.
- E3. Conclusion : $\forall n \in I, P(n)$ est Vrai, terminer.

1.2-2. La méthode directe

La méthode directe peut s'utiliser pratiquement, dans tout cas de problème, quand la difficulté de tels calculs reste raisonnable. Il s'agit toujours, d'opter pour les méthodes les plus simples.

- Propriété discrète : voir 1.2-1
- Implication :

Type standard de proposition : $(H \Rightarrow C)$ ($\Leftrightarrow (\bar{H} \text{ ou } C)$)
où (H) est appelé : les hypothèses et (C) la conclusion.

Méthode : (3 étapes E1, E2, E3).

Globalement il s'agit de montrer que (C) est Vraie à l'aide de toutes les hypothèses contenues dans (H) .

Pour plus de précision, regardons les deux cas suivants :

1. $\exists I \subseteq \mathbb{N}$ et $\forall n \in I, n + 1 \in I$ on a : $\forall n \in I, P(n)$ est Vraie.
2. Cas où (C) est inclusion : $A, B \in \mathcal{P}(E)$; montrer $(H \Rightarrow A \subseteq B)$

1.2-3. Le raisonnement par contraposée (cas d'une implication : $(H \Rightarrow C)$)

Le type standard de proposition :

Il s'agit de prouver : $(\bar{C} \Rightarrow \bar{H})$ en lieu et place de $(H \Rightarrow C)$

1.2-4. Le raisonnement par l'absurde (cas d'une implication : $(H \Rightarrow C)$)

Le type standard de proposition :

On suppose l'implication $(H \Rightarrow C)$ Fausse (i.e. $(H \text{ et } \bar{C})$ Vrai). Et il faut alors trouver une contradiction avec l'une des hypothèses de H .

1-4. Introduction (étude d'une fonction)

1-1. Introduction

Comme déjà vu, l'étude d'une fonction consiste à appliquer rigoureusement un plan prédéfini. Nous résumons ici l'essentiel de ce plan en plaçant quelques observations qui, nous l'espérons, vous seront utiles.

Ce plan, partant des études des fonctions classiques simples, connues de tous, est élaboré pour pouvoir étudier des fonctions composées plus complexes.

Pratiquement, il s'agit de *décomposer* la fonction donnée g en une fonction composée $g = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$ où les fonctions $(g_i, i = 1, 2, \dots, n)$ sont *toutes classiques*.

Par conséquent, le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité, les limites de $g \dots$ découleront de celles, plus simples des fonctions $(g_i, i = 1, 2, \dots, n)$. Des théorèmes permettent les passages de $(g_i, 1 \leq i \leq n)$ vers $(g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n)$ puis g .

Nous présentons ci-après les étapes de ce plan. Nous donnons un exemple.

1-2. Plan d'étude d'une fonction

Soit à étudier une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ce plan est composé en étapes ordonnées de manière à assurer une simplification des calculs, autant que possible.

1.2-1. Domaine de définition de la fonction $g : \mathcal{D}_g$

Pour déterminer \mathcal{D}_g , il y a 2 méthodes :

- Déterminer directement \mathcal{D}_g ,
- Déterminer $\bar{\mathcal{D}}_g$, le complémentaire de \mathcal{D}_g dans \mathbb{R} .

Prenons l'exemple : $g(x) = x\sqrt{x+2} \frac{\log(x-3)}{(x-1)}$.

E1. Déterminer le domaine de définition (Calcul Direct : $\mathcal{D}_g = ?$)

Ecrivons la fonction sous forme de produit de fonctions simples.

$$g(x) = \underbrace{x}_{g_1(x)} \times \underbrace{\sqrt{x+2}}_{g_2(x)} \times \underbrace{\log(x-3)}_{g_3(x)} \times \underbrace{\frac{1}{(x-1)}}_{g_4(x)}.$$

Les fonctions $(g_i; 1 \leq i \leq 4)$ sont simples. Leurs domaines respectifs sont :

$$\mathcal{D}_{g_1} = \mathbb{R}; \mathcal{D}_{g_2} = [-2, +\infty[; \mathcal{D}_{g_3} =]3, +\infty[; \mathcal{D}_{g_4} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g_1} \cap \mathcal{D}_{g_2} \cap \mathcal{D}_{g_3} \cap \mathcal{D}_{g_4} =]3, +\infty[= \mathcal{D}_{g_3} \text{ d'où : } \mathcal{D}_g =]3, +\infty[.$$

E2. Déterminer le domaine des valeurs « interdites » (Calcul indirect : $\bar{\mathcal{D}}_g = ?$)

$$\text{On a : } \bar{\mathcal{D}}_{g_1} = \emptyset; \bar{\mathcal{D}}_{g_2} =]-\infty, -2]; \bar{\mathcal{D}}_{g_3} =]-\infty, 3]; \bar{\mathcal{D}}_{g_4} = \{1\}.$$

$$\bar{\mathcal{D}}_g = \bar{\mathcal{D}}_{g_1} \cup \bar{\mathcal{D}}_{g_2} \cup \bar{\mathcal{D}}_{g_3} \cup \bar{\mathcal{D}}_{g_4} =]-\infty, 3] = \bar{\mathcal{D}}_{g_3}.$$

$$\text{On vérifie que : } \bar{\mathcal{D}}_g = \bar{\mathcal{D}}_{g_3} \Leftrightarrow \mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g_3}. \text{ On retrouve } \mathcal{D}_g =]3, +\infty[.$$

1.2-2. Parité de la fonction

Si \mathcal{D}_f est non-symétrique par rapport à zéro, on déduit que f n'est ni paire ni impaire ! Si \mathcal{D}_f est symétrique par rapport à zéro, f est susceptible d'être :

- Paire, si $\forall x \in \mathcal{D}_f; f(-x) = f(x)$.
- Impaire si $\forall x \in \mathcal{D}_f; f(-x) = -f(x)$

1.2-3. Périodicité

f est T -périodique si et seulement si :

$$\exists T > 0 \mid \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x + kT) = f(x); \forall k \in \mathbb{Z}, (\text{avec } x + kT \in \mathcal{D}_f).$$

1.2-4. Limites

Les limites seront conditionnées notamment par la parité de f .

1.2-5. Dérivabilité et dérivées.

- Dérivabilité :

On sait que (f dérivable sur I (ou en $a \in I$) $\xRightarrow{(d-c)}$ f continue sur I (ou en $a \in I$)).

On peut utiliser la contraposée de $(d - c)$. De façon générale la dérivabilité d'une fonction découle de celle des fonctions simples qui la composent.

- Calcul et signe de la dérivée :

1.2-6. Tableau de variation.

1.2-7. Asymptotes (Asymptotes verticales (AV), horizontales (AH), obliques(AO))

(AH): $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, (AV): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, (AO): $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1.2-8. Courbe ou graphe de la fonction.

Choix des unités, des points particuliers (points de tangence). Tracé.