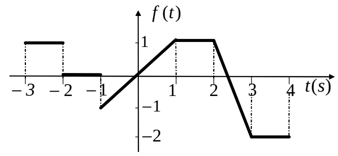
SÉRIE DE TD N°0 DE PHYS. 3

Le but de cette série de TD est de rappeler certaines formules mathématiques utiles pour ce module.

1) ÉQUATIONS DES DROITES

L'équation générale d'une droite dans le plan est $y=\alpha x+\beta$.

Exercice : Trouver l'expression de $f(t)$ en cherchant l'équation des segments de droite.



2) DÉRIVÉE PARTIELLE ET DÉRIVÉE TOTALE

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^k = kt^{k-1}$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{kt} = ke^{kt}$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t = -\sin t$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t)) = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$.

Exercice : Évaluer chacune des dérivées suivantes.

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{3}{4}x^2)$. $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{3}{4}x^2)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j(\omega t+\phi)}$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega t+\phi)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega t+\phi)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{3}{4}x^2)$.

3) INTÉGRALES SIMPLES

$\int_a^b t^k\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\left[t^{k+1}\right]_a^b = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)$. $\int e^{kt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k}e^{kt}.(+\mathrm{C}^{te})$

$\int_a^b \cos kt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k}\left[\sin kt\right]_a^b = \frac{1}{k}(\sin kb - \sin ka)$. $\int_a^b \sin kt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k}\left[-\cos kt\right]_a^b = \frac{1}{k}(\cos ka - \cos kb)$

$\int_a^b f(t)\ g(t)\ \mathrm{d}t = \left[f(t)\ G(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\ G(t)\ \mathrm{d}t$. (Intégration par parties.)

Exercice : Évaluer chacune des intégrales suivantes.

$\int_2^3 (3t+4)\mathrm{d}t$. $\int e^{j(\omega t+\phi)}\mathrm{d}t$. $\int_{-1}^3 3\cos\frac{3\pi nt}{2}\mathrm{d}t$. $\int_1^2 2\sin\frac{\pi nt}{3}\mathrm{d}t$. $\int_0^1 (t+1)\cos\frac{\pi nt}{4}\mathrm{d}t$. $\int_0^1 (2t+1)\sin\frac{\pi nt}{4}\mathrm{d}t$.

4) NOMBRES COMPLEXES

Le module A d'un nombre complexe $\underline{\mathcal{Z}}=x+jy$ est $A=|\underline{\mathcal{Z}}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\underline{\mathcal{Z}}\ \underline{\mathcal{Z}}^*}$.
L'argument ϕ d'un nombre complexe $\underline{\mathcal{Z}}=x+jy$ est donné par $\tan\phi=\frac{\mathrm{Im}\,\underline{\mathcal{Z}}}{\mathrm{Re}\,\underline{\mathcal{Z}}}=\frac{y}{x}$.
Les identités suivantes sont utiles: $A\cos\phi+jA\sin\phi = Ae^{j\phi}$. $e^{j(\phi_1+\phi_2)} = e^{j\phi_1}e^{j\phi_2}$.

Exercice : Trouver le module A et la phase ϕ (la partie constante de l'argument).

$\underline{\mathcal{Z}} = 1-\mathrm{LC}\omega^2+3j\mathrm{RC}\omega$. $\underline{\mathcal{Z}} = \frac{F_0}{\omega_0^2-\Omega^2+j2\lambda\Omega}$. $\underline{\mathcal{Z}} = \frac{2-j\mathrm{LC}\omega^2}{1+2j\mathrm{RC}\omega}$. $e^{j(\omega t+\frac{\pi}{4})}$. $e^{j(\omega t+\frac{\pi}{4})}+e^{j(\omega t+\frac{\pi}{3})}$.

5) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ est $x(t)=A\sin(\omega_0t+\phi)$.
La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$ est:

- $x(t)=e^{-\lambda t}(A_1e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t}+A_2e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t})$ si $\lambda^2-\omega_0^2>0$.
- $x(t)=e^{-\lambda t}(A_1+A_2t)$ si $\lambda^2-\omega_0^2=0$.
- $x(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+\phi)$ si $\lambda^2-\omega_0^2<0$.

Exercice : Trouver la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes.

$5\ddot{x}+3x=0$. $3\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0$. $2\ddot{x}+6\dot{x}+2x=0$. $2\ddot{x}+\sqrt{48}\dot{x}+6x=0$.

<u>**CORRIGÉ DE LA SÉRIE N°0 DE PHYS. 3**</u>

1) Dans l'intervalle]–3,–2[: $f(t) = 1$.

Dans l'intervalle]–2,–1[: $f(t) = 0$.

Dans l'intervalle]–1,1[: $\begin{cases} -1{=}\alpha.(-1){+}\beta \\ 1{=}\alpha.(1){+}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha{=}1. \\ \beta{=}0. \end{cases}$ Donc, dans cet intervalle $f(t) = t$.

Dans l'intervalle]1,2[: $f(t) = 1$.

Dans l'intervalle]2,3[: $\begin{cases} 1{=}\alpha.(2){+}\beta \\ -2{=}\alpha.(3){+}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha{=}-3. \\ \beta{=}7. \end{cases}$ Donc, dans cet intervalle $f(t) = -3t+7$.

Dans l'intervalle]3,4[: $f(t) = -2$.

2) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{3}{4}x^2) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{5}{2}\dot{x}^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{3}{4}x^2) = 0 + (\frac{3}{4}.2x) = \frac{3}{2}x.$

$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{3}{4}x^2) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{5}{2}\dot{x}^2) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{3}{4}x^2) = (\frac{5}{2}.2\dot{x}) + 0 = 5\dot{x}.$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j(\omega t+\phi)} = \frac{\partial e^{j(\omega t+\phi)}}{\partial[j(\omega t+\phi)]} \times \frac{\mathrm{d}[j(\omega t+\phi)]}{\mathrm{d}t} = j\omega e^{j(\omega t+\phi)}$. Ou encore: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j(\omega t+\phi)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{j\omega t}.e^{j\phi}) = e^{j\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega t+\phi) = \frac{\partial\sin(\omega t+\phi)}{\partial(\omega t+\phi)} \times \frac{\mathrm{d}(\omega t+\phi)}{\mathrm{d}t} = \cos(\omega t+\phi)\times\omega = \omega\cos(\omega t+\phi).$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega t+\phi) = \frac{\partial\cos(\omega t+\phi)}{\partial(\omega t+\phi)} \times \frac{\mathrm{d}(\omega t+\phi)}{\mathrm{d}t} = -\sin(\omega t+\phi)\times\omega = -\omega\sin(\omega t+\phi).$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{3}{4}x^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{5}{2}\dot{x}^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{3}{4}x^2) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{5}{2}\dot{x}^2)\times\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{3}{4}x^2)\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5\dot{x}\ddot{x} + \frac{3}{2}x\dot{x}.$

3) $\int_2^3(3t+4)\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_2^3+\left[4t\right]_2^3 = \left[\frac{3}{2}.9 - \frac{3}{2}.4\right] + \left[12 - 8\right] = \frac{27}{2} - 2 = \frac{23}{2}.$

$\int e^{j(\omega t+\phi)}\mathrm{d}t = e^{j\phi}\int e^{j\omega t}\mathrm{d}t = e^{j\phi}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}e^{j(\omega t+\phi)}$. (+C^{te} n'est pas incluse dans l'étude des oscillations.)

$\int_{-1}^3 3\cos\frac{3\pi nt}{2}\mathrm{d}t = 3.\frac{2}{3\pi n}\left[\sin\frac{3\pi nt}{2}\right]_{-1}^3 = \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{9\pi n}{2} + \sin\frac{3\pi n}{2}\right) = \frac{2}{\pi n}\left(\sin(4\pi n+\frac{\pi n}{2}) + \sin(\pi n+\frac{\pi n}{2})\right) = \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} + (-1)^n\sin\frac{\pi n}{2}\right)$

$= \frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^n\right)\sin\frac{\pi n}{2} = 0$. Car si n est paire $\sin\frac{\pi n}{2} = 0$ et si n est impaire $1+(-1)^n = 0$.

$\int_1^2 2\sin\frac{\pi nt}{3}\mathrm{d}t = 2.\frac{3}{\pi n}\left[-\cos\frac{\pi nt}{3}\right]_1^2 = \frac{6}{\pi n}\left(-\cos\frac{2\pi n}{3} + \cos\frac{\pi n}{3}\right) = \frac{6}{\pi n}\left(-\cos(\pi n-\frac{\pi n}{3}) + \cos\frac{\pi n}{3}\right) = \frac{6}{\pi n}((-1)^{n+1}+1)\cos\frac{\pi n}{3}.$

$$\int_0^1(t+1)\cos\frac{\pi nt}{4}\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi n}\left[(t+1)\sin\frac{\pi nt}{4}\right]_0^1 - \frac{4}{\pi n}\int_0^1(t+1)'\sin\frac{\pi nt}{4}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{8}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{4} - \frac{4}{\pi n}\int_0^1\sin\frac{\pi nt}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{8}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{4} + \frac{16}{\pi^2n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{4}-1\right).$$

$$\int_0^1(2t+1)\sin\frac{\pi nt}{4}\mathrm{d}t = \frac{-4}{\pi n}\left[(2t+1)\cos\frac{\pi nt}{4}\right]_0^1 + \frac{4}{\pi n}\int_0^1(2t+1)'\cos\frac{\pi nt}{4}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{-4}{\pi n}\left(3\cos\frac{\pi n}{4}-1\right) + \frac{4}{\pi n}\int_0^1 2\cos\frac{\pi nt}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{-4}{\pi n}\left(3\cos\frac{\pi n}{4}-1\right) + \frac{32}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

4) $A = \sqrt{(1-\mathrm{LC}\omega^2)^2 + 9\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}$. $\tan\phi = \frac{3\mathrm{RC}\omega}{1-\mathrm{LC}\omega^2}$. ($\phi = \arctan\frac{3\mathrm{RC}\omega}{1-\mathrm{LC}\omega^2}$)

$A = \frac{|F_0|}{\left|(\omega_0^2-\Omega^2+j2\lambda\Omega)\right|} = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$. $\quad \underline{\mathcal{Z}} = \frac{F_0}{\omega_0^2-\Omega^2+j2\lambda\Omega} = \frac{F_0(\omega_0^2-\Omega^2-j2\lambda\Omega)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2} \Rightarrow \tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$.

Remarque: il est possible de trouver la phase en se rappelant que l'argument du rapport et la différence des deux arguments: $\phi = \arctan\frac{0}{F_0} - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$.

$$A = \frac{\left|2-j\mathrm{LC}\omega^2\right|}{|1+2j\mathrm{RC}\omega|} = \frac{\sqrt{4+\mathrm{L}^2\mathrm{C}^2\omega^4}}{\sqrt{1+4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}}.$$
$$\underline{\mathcal{Z}} = \frac{2-j\mathrm{LC}\omega^2}{1+2j\mathrm{RC}\omega} = \frac{(2-j\mathrm{LC}\omega^2)(1-2j\mathrm{RC}\omega)}{1+4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2} = \frac{2-2\mathrm{LRC}^2\omega^3-j(\mathrm{LC}\omega^2+4\mathrm{RC}\omega)}{1+4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2} \Rightarrow \tan\phi = -\frac{\mathrm{LC}\omega^2+4\mathrm{RC}\omega}{2-2\mathrm{LRC}^2\omega^3}.$$

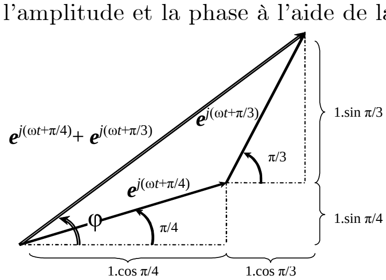
Remarque: il est possible de trouver la phase en se rappelant que l'argument du rapport et la différence des deux arguments : $\phi = \arctan\frac{-\mathrm{LC}\omega^2}{2} - \arctan\frac{2\mathrm{RC}\omega}{1}$.

$A = \sqrt{\underline{\mathcal{Z}}\,\underline{\mathcal{Z}}^*} = \sqrt{e^{j(\omega t+\frac{\pi}{4})}e^{-j(\omega t+\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{e^0} = 1.$ $\quad \phi = \frac{\pi}{4}$. (Prendre la partie constante de l'argument)

$$A = \sqrt{\underline{\mathcal{Z}}\,\underline{\mathcal{Z}}^*} = \sqrt{\left(e^{j(\omega t+\frac{\pi}{4})}+e^{j(\omega t+\frac{\pi}{3})}\right)\left(e^{-j(\omega t+\frac{\pi}{4})}+e^{-j(\omega t+\frac{\pi}{3})}\right)} = \sqrt{1+1+e^{j(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}+e^{j(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}}$$
$$= \sqrt{2+e^{-j\frac{\pi}{12}}+e^{j\frac{\pi}{12}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}}.$$

$$\underline{\mathcal{Z}} = e^{j(\omega t+\frac{\pi}{4})}+e^{j(\omega t+\frac{\pi}{3})} = e^{j\omega t}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = e^{j\omega t}\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \tan\phi = \frac{\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}}.$$

Remarque: Il est possible de trouver l'amplitude et la phase à l'aide de la représentation de Fresnel:



L'amplitude est donnée par le théorème de Pythagore appliqué sur le grand triangle:
$\mathrm{A} = \sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^2} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}}$.
La phase est donnée par les cotés du grand triangle aussi: $\tan\varphi = \frac{\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}}$.

5) $5\ddot{x}+3x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\frac{3}{5}x=0$. L'équation est de la forme $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ avec $\omega_0^2=\frac{3}{5}$.
La solution générale de l'équation est donc $x(t)=A\sin(\sqrt{\frac{3}{5}}t+\phi)$.

$3\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\frac{5}{3}\dot{x}+\frac{4}{3}x=0$. L'équation est de la forme $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$ avec $\lambda=\frac{5}{6}$. $\omega_0^2=\frac{4}{3}$.
Puisque $\lambda^2-\omega_0^2 = -\frac{23}{36}<0$, la solution générale de l'équation est $x(t)=Ae^{-\frac{5}{6}t}\cos(\sqrt{\frac{23}{36}}t+\phi)$.

$2\ddot{x}+6\dot{x}+2x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+3\dot{x}+x=0$. L'équation est de la forme $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$ avec $\lambda=\frac{3}{2}$. $\omega_0^2=1$.
Puisque $\lambda^2-\omega_0^2 = \frac{5}{4}>0$, la solution générale de l'équation est $x(t)=e^{-\frac{3}{2}t}(A_1e^{-\sqrt{\frac{5}{4}}t}+A_2e^{\sqrt{\frac{5}{4}}t})$.

$2\ddot{x}+\sqrt{48}\dot{x}+6x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\sqrt{12}\dot{x}+3x=0$. L'équation est de la forme $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$ avec $\lambda=\sqrt{3}$. $\omega_0^2=3$.
Puisque $\lambda^2-\omega_0^2=0$, la solution générale de l'équation est $x(t)=e^{-\sqrt{3}t}(A_1+A_2t)$.