# Séries Réelles

## Chapitre I

## Séries Numériques

# EXERCICES DE RÉVISIONS: SÉRIES RÉELLES-CHAPITRE I

## Série Numérique

Une série numérique est la somme d'une suite de valeurs numériques constantes $u_n$. ($n$=1,2,3,...)
Une série est souvent désignée par $\sum u_n$. ($u_n$ est appelé le terme général de la série.)
Une série $\sum u_n$ est dite **absolument** convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

## Condition Nécessaire de Convergence

La condition **nécessaire** de convergence d'une série numérique est $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

## Règles pour quelques Séries Usuelles

**Séries Géométriques:** $\sum r^n$ est convergente si $|r| <1$, divergente si $|r| \geqslant 1$.

**Série de Riemann:** $\sum \dfrac{1}{n^p}$ est convergente si $p >1$, divergente si $p \leqslant 1$.

**Séries Alternées:** $\sum (-1)^n u_n$ est convergente si $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

## Quelques Testes de Convergence

Si la série donnée n'est pas une série usuelle, effectuer l'un des testes suivants:

**Comparaison avec une série:** Si $|u_n| \leqslant |v_n|$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est convergente.
(* $u_n$ de signe constant) *Si $|u_n| \geqslant |v_n|$ et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ est divergente.

**Approximation par une série:** Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

**Teste de d'Alembert:** Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$: $\sum u_n$ est convergente. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$: divergente.
**Teste de Cauchy:** Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$: $\sum u_n$ est convergente. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$: divergente.

**Teste du $n^p$:** Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^p.u_n$ est finie et $p > 1$: $\sum u_n$ converge. Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^p.u_n \neq 0$ et $p \leqslant 1$: diverge.

**Teste de l'intégrale:** $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n \longrightarrow \int_m^\infty f(x)dx$. Si $\int_m^\infty f(x)dx$ est finie alors $\sum u_n$ converge.
($u_n$ *monotone décroissante*) Si $\int_m^\infty f(x)dx$ est infinie alors $\sum u_n$ diverge.

## Somme de la Série Géométrique

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Lorsque $|r| <1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - r}$.

## Formules d'Approximation

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{2n^2}. \qquad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}. \qquad \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^q \underset{n\to\infty}{\sim} 1 \pm \frac{q}{n}. \qquad \ln\left(1 \pm \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pm 1}{n}.$$

## Règle de L'Hôpital pour les limites

$$\lim_{n\to n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to n_0} \frac{f'(n)}{g'(n)}. \qquad (g'(n_0) \neq 0)$$

## 1) CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE

**Étudier la nature des séries numériques suivantes dont on donne le terme général.**

**1)** $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. **2)** $u_n = \cos\left(\dfrac{n+1}{n}\pi\right)$. **3)** $u_n = \dfrac{2^n + n\sqrt{n}}{n^2-1}$.

**4)** $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}$ **5)** $u_n = \dfrac{n^2}{n^a+n+1}$. $(a \leqslant 2)$ **6)** $u_n = \ln(ne+1) - \ln n$.

**7)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sin n}$ **8)** $u_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sin\frac{1}{n}}$. **9)** $u_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n \cos^{2n}(\frac{\pi}{n})$.

**10)** $1-1+1-1+1...$ **11)** $1+1,2+1,3+1,4+...$ **12)** $1-0,1+0,15-0,155+...$

**Solution** : Vérifions pour chaque cas la condition nécessaire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ de convergence.

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \cos(0) = 1$. La série est donc divergente.

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n}\pi\right) = \cos(\pi) = -1$. La série est donc divergente.

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+n\sqrt{n}}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2^n+n\sqrt{n})'}{(n^2-1)'} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n2^{n-1}+\frac{3}{2}\sqrt{n}}{2n} = \infty$. La série est donc divergente.

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}} \sim \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{n\sqrt{n}}{n^2}\right) = 1$. La série est donc divergente.

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^a+n+1} = 1$ ou $\infty$ suivant que $a=2$ ou $a<2$. La série est donc divergente pour $a \leqslant 2$.

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} [\ln(ne+1) - \ln n] = \lim\limits_{n\to\infty} [\ln\frac{ne+1}{n}] = \ln e = 1$. La série est donc divergente.

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sin n} \neq 0$ car $\sin n \leqslant 1\ \forall n$. La série est donc divergente.

**8)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sin\frac{1}{n}} \sim \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. La série est donc divergente.

**9)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cos^{2n}(\frac{\pi}{n}) \sim \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left[1-\frac{\pi^2}{2n^2}\right]^{2n} \sim \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left[1-\frac{2n\pi^2}{2n^2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

**Attention**: pour calculer cette dernière limite, la méthode $\frac{(n+2)^n}{(n+1)^n} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{1+\frac{2n}{n}}{1+\frac{n}{n}} \longrightarrow 1$, ne donnera pas un résultat juste car $\frac{1}{n}$ ne devient pas faible assez rapidement devant la rapidité de la puissance $n$. Pour découvrir plus précisément la limite qui est de la forme $1^\infty$, nous calculons la limite de son logarithme:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[n\ln\frac{n+2}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln\frac{n+2}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln\frac{n+2}{n+1}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{(n+1)^2}}{\frac{-1}{n^2}.\frac{n+2}{n+1}} = 1.$$

Puisque $\ln e = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = e \neq 0$: La série est donc divergente.

**10)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$. La série est donc divergente.

(L'argument d'une série alternée est aussi juste car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 1 \neq 0$.)

**11)** Les termes $u_n$ de la série sont croissants: ils ne tendent pas vers 0. La série est donc divergente.

**12)** Les termes $|u_n|$ de la série alternée sont croissants: ne tendent pas vers 0. La série est donc divergente.

## 2) CONVERGENCE DES SÉRIES USUELLES

**Étudier la nature des séries numériques suivantes.**

**1)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

**5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$. **6)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}$. **7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\ln(n+1)-\ln n]$.

**9)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. **10)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n}{1+n\sqrt{n}}$. **11)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n/3}}{\sin^n\frac{\pi}{4}}$. **12)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{e^n}$.

**13)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\cos n}}$. **14)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(\frac{1}{3^n})$. **15)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n^2+1}$. **16)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\sin(\frac{1}{n})$.

**17)** $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}...$ **18)** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}...$ **19)** $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}...$ **20)** $1+\frac{1}{2^{-1,5}}+\frac{1}{4^{-1,5}}+\frac{1}{8^{-1,5}}..$

**Solution** :

**1)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}<1$. La série est donc convergente.

**2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann avec $p=3>1$. La série est donc convergente.

**3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. La série est donc convergente.

**4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $p=1$. La série est donc divergente.

**5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ est une série alernée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sin n}=0$. La série est donc convergente.

**6)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{e}<1$. La série est donc convergente.

**7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann avec $p=\frac{1}{2}<1$. La série est donc divergente.

**8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\ln(n+1)-\ln n]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ est une série alternée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0$.
La série est donc convergente.

**9)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann avec $p=\frac{3}{2}>1$. La série est donc convergente.

**10)** **Attention:** la série n'est pas alternée car le cosinus aussi change de signe. Elle converge car $\left|\frac{(-1)^n\cos n}{1+n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

**11)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n/3}}{\sin^n\frac{\pi}{4}}$ est une série géométrique de raison $\frac{e^{1/3}}{\sqrt{2}/2}>1$. La série est donc divergente.

**12)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{e^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{e}<1$. La série est donc convergente.

**13)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\cos n}}$ est une série alernée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\cos n}}\geqslant\frac{1}{e}\neq 0$. La série est donc divergente.

**14)** (**Attention**: La série n'est pas géométrique.) La série diverge car $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{1}{3^n})=1\neq 0$.

**15)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n^2+1}$ est une série alternée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3^n)'}{(n^2+1)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n3^{n-1}}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{2}=\infty$.
La série est donc divergente.

**16)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ n\sin(\frac{1}{n})$ est une série alternée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(\frac{1}{n})\sim\lim\limits_{n\to\infty}n.(\frac{1}{n})=1\neq 0$.
La série est donc divergente.

**17)** $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+...$ est une série de Riemann $\sum\frac{1}{n^3}$ $(p=3>1)$. La série est donc convergente.

**18)** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ est une série alternée avec $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. La série est donc convergente.

**19)** $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+...$ est une série géométrique de raison $\frac{3}{2}>1$. La série est donc divergente.

**20)** Les termes $u_n$ de la série sont croissants: ils ne tendent pas vers 0. La série est donc divergente.

### 3) TESTES DE CONVERGENCE

**Étudier la nature des séries numériques suivantes.**

**1)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\pi n)}{3^n}$. **2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+|\cos n|}$. **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n^2}$. **4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\sin n}$.

**5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3-1}}$. **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n(n+1)}$. **7)** $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\cos(\frac{1}{n})]$. **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n\sqrt{n}}$.

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$. **10)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3^n+2}}{4^n}$. **11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **12)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+n}$.

**13)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ **14)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(\ln n)^n}}$. **15)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$. **16)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3e^{\sqrt{n}}}$.

**17)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$. **18)** $\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$. **19)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$ **20)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

**21)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. **22)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. **23)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$. **24)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

*<u>Testes Divers</u>*

**25)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{n^2}\right]^{\sqrt{n}}$ **26)** $\sum_{n=1}^{\infty}[1+\cos\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)]$. **27)** $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ **28)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

**29)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$. **30)** $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ **31)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$. **32)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$.

**33)** $\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-1/n})$. **34)** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n\tan^{-1}(1/n^3)}$ **35)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n}$. **36)** $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}\cdots$

**37)** $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n}{3n+1})^{2n+1}$. **38)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n+1}}$ **39)** $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ **40)** $\sum_{n=0}^{\infty}\ln(1+a^n)$

**41)** $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{a^n}\right]$ **42)** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ $(a,b>0)$ **43)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^{2n}(a)}{n^3+1}$ **44)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{a\ln n}$.

**45)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{(-1)^n}{n}$.

**Solution** :

**1)** $\left|\frac{\sin(\pi n)}{3^n}\right|\leqslant\frac{1}{3^n}$ et $\sum\frac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente donc la série $\sum\frac{\sin(\pi n)}{3^n}$ est convergente.

**2)** $\left|\frac{1}{n^2+|\cos n|}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ et $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum\frac{1}{n^2+|\cos n|}$ est convergente.

**3)** $\left|(\frac{1}{2})^{n^2}\right|\leqslant(\frac{1}{2})^n$ et $\sum\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente donc la série $\sum(\frac{1}{2})^{n^2}$ est convergente.

**4)** $\left|\frac{1}{n-\sin n}\right|\geqslant\frac{1}{n+1}$ et $\sum\frac{1}{n+1}$ diverge (Car $\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ et $\sum\frac{1}{n}$ diverge) donc la série $\sum\frac{1}{n-\sin n}$ diverge.

**5)** $\frac{n}{\sqrt{n^3-1}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente donc la série $\sum\frac{n}{\sqrt{n^3-1}}$ diverge.

**6)** $\sin\frac{1}{n(n+1)}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n(n+1)}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ et $\sum\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) donc la série $\sum\sin\frac{1}{n(n+1)}$ converge.

**7)** $1-\cos(\frac{1}{n})\underset{n\to\infty}{\sim}1-1+\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2n^2}$ et $\sum\frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann) donc la série $\sum[1-\cos(\frac{1}{n})]$ converge.

**8)** $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{5/2}}$ et $\sum\frac{1}{n^{5/2}}$ converge (série de Riemann) donc la série $\sum\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n\sqrt{n}}$ converge.

**9)** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}<1$. Donc la série $\sum\frac{2^n n!}{n^n}$ converge.

$(\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{e}$ car $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln\frac{n}{n+1})'}{(\frac{1}{n})'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{-1}{n^2}\cdot\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}=-1.)$

**10)** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^{n+1}+2}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{\sqrt{3^n+2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}<1$. Donc la série $\sum\frac{\sqrt{3^n+2}}{4^n}$ est convergente.

**11)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$. Donc la série $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ est convergente.

**12)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+n+1}.\frac{3^n+n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$. Donc la série $\sum\frac{n^2}{3^n+n}$ est convergente.

**13)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2} < 1$. Donc la série $\sum\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ est convergente.

**14)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n}} = 0 < 1$. Donc la série $\sum\frac{1}{\sqrt{(\ln n)^n}}$ est convergente.

**15)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Donc la série $\sum\frac{n^2}{2^n}$ est convergente.

$(\lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} = 1$ car $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n^{2/n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\ln n = 0.)$

**16)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^{3/n}e^{1/\sqrt{n}}} = 2 > 1$. Donc la série $\sum\frac{2^n}{n^3e^{\sqrt{n}}}$ est divergente.

**17)** $\lim\limits_{n\to\infty} n.u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n.\frac{1}{(\ln n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n)'}{[(\ln n)^2]'} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\frac{1}{n}.\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2\ln n} = \infty \neq 0$. Donc $\sum\frac{1}{\ln^2 n}$ diverge.

**18)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2.u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^4e^{-\sqrt{n}} = 0$. Donc la série $\sum n^2e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.

**19)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2}.u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = e \neq 0$. Donc la série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$ diverge.

$(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = e$ car $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n] = \lim\limits_{n\to\infty}[n\ln\frac{n+3}{n+2}] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+3}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln\frac{n+3}{n+2})'}{(\frac{1}{n})'} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{(n+2)^2}}{\frac{-1}{n^2}\cdot\frac{n+3}{n+2}} = 1.)$

**20)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}.u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$. Donc la série $\sum\frac{\ln n}{n^2}$ est convergente.

**21)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \longrightarrow \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = [\ln(\ln x)]_2^{\infty} = \infty$. Donc la série $\sum\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

**22)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n} \longrightarrow \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$. Donc la série $\sum\frac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

**23)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \longrightarrow \int_1^{\infty}\frac{\ln x dx}{x\sqrt{x}} = \left[\frac{-2\ln x}{\sqrt{x}}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{2dx}{x\sqrt{x}} = 0 + \left[\frac{-4}{\sqrt{x}}\right]_1^{\infty} = 4$. Donc la série $\sum\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ converge.

**24)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n} \longrightarrow \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^3} = \left[\frac{-1}{2(\ln x)^2}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$. Donc la série $\sum\frac{1}{n\ln^3 n}$ converge.

**25)** $\left|\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{n^2}\right]^{\sqrt{n}}\right| \leqslant \left(\frac{2}{n^2}\right)^{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{n^2}$ et $\sum\frac{2}{n^2}$ converge (Riemann) donc la série $\sum\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{n^2}\right]^{\sqrt{n}}$ converge.

**26)** $1+\cos\left(\frac{n+1}{n}\pi\right) = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Pour $n \ggg 1$ : $1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$ et $\sum\frac{\pi^2}{2n^2}$ converge$\Rightarrow \sum[1+\cos\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)]$ converge.

**27)** $\sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n}\right) = \sin\pi n\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\pi n\sin\frac{\pi}{2n} = (-1)^n\sin\frac{\pi}{2n} \sim (-1)^n\frac{\pi}{2n}$.

$\sum(-1)^n\frac{\pi}{2n}$ étant une série alternée convergente, la série $\sum\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est donc convergente.

**28)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \longrightarrow \int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = -\int_1^{\infty}2\mathrm{d}(e^{-\sqrt{x}}) = \left[-2(e^{-\sqrt{x}})\right]_1^{\infty} = \frac{2}{e} < 1$. Donc la série $\sum\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

**29)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2.u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}} = 0$. Donc la série $\sum\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

**30)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}.u_n = \lim\limits_{n\to\infty} ne^{-\sqrt{n}}\ln(n)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0\times e = 0$. Donc la série $\sum e^{-\sqrt{n}}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ converge.

**31)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2}.u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty \neq 0$. Donc la série $\sum\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ diverge. (Ou $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge)

**32)** $\frac{1}{a^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln(a^{\ln n})}} = \frac{1}{e^{(\ln n).\ln a}} = \frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln a}} = \frac{1}{n^{\ln a}}$. Si $\ln a > 1$ la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{\ln a}}$ converge.

Si $\ln a \leqslant 1$ la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{\ln a}}$ diverge.

(*Avec $a>0$. Pour $a<0$ la série n'est plus définie car $a^{\ln n}$ n'est pas défini.*)

**33)** $(1-e^{-1/n}) \underset{n\to\infty}{\sim} (1-(1-\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann) donc la série $\sum(1-e^{-1/n})$ diverge.

**34)** $\sqrt{n\tan^{-1}(\frac{1}{n^3})} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n.\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann) donc le série $\sum \sqrt{n\tan^{-1}(\frac{1}{n^3})}$ diverge.

**35)** $\frac{\tan^{-1} n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{n}$ et $\sum \frac{\pi/2}{n}$ diverge (Riemann) donc la série $\sum \frac{\tan^{-1} n}{n}$ diverge.

**36)** $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} ... = \sum \frac{1}{n(n+1)}$. $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}...$ converge.

**37)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{3n+1})^{\frac{2n+1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1$, donc la série $\sum(\frac{n}{3n+1})^{2n+1}$ converge.

**38)** $\frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(-1)^n\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge(alternée) $\Rightarrow \sum \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n+1}}$ converge.

**39)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2}.u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 2 \neq 0$. Donc la série $\sum \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ diverge.

**40)** Si $a > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+a^n) = \infty \neq 0$. La série diverge.
Si $a = 1$: $\ln(1+a^n) = \ln(2)$ et $\sum \ln(2)$ diverge. La série diverge.
Si $0 < a < 1$: $\ln(1+a^n) \underset{n\to\infty}{\sim} a^n$ et $\sum a^n$ est géométrique convergente. La série converge.
Si $a \leqslant -1$: La série n'est pas définie.
Si $-1 < a < 0$: $\ln(1+a^n) \underset{n\to\infty}{\sim} a^n$ et $\sum a^n$ est géométrique convergente. La série converge.

**41)** Si $a > 1$: $\ln(1+\frac{(-1)^n}{a^n}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{a^n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{a^n}$ converge (car alternée avec $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$). La série converge.
Si $0 < a \leqslant 1$: $\ln(1+\frac{(-1)^n}{a^n})$ n'est plus défini. La série diverge.
Si $-1 < a < 0$: $\ln(1+\frac{(-1)^n}{a^n}) = \ln(1+\frac{(-1)^n}{(-1)^n|a|^n}) = \ln(1+\frac{1}{|a|^n})$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{|a|^n}) = \infty \neq 0$. La série diverge.
Si $a = -1$: $\ln(1+\frac{(-1)^n}{a^n}) = \ln(1+\frac{(-1)^n}{(-1)^n}) = \ln(2)$ et $\sum \ln(2)$ diverge. La série diverge.
Si $a < -1$: $\ln(1+\frac{(-1)^n}{a^n}) = \ln(1+\frac{(-1)^n}{(-1)^n|a|^n}) = \ln(1+\frac{1}{|a|^n}) \sim \frac{1}{|a|^n}$ et $\sum \frac{1}{|a|^n}$ est géométrique convergente.
La série converge.

**42)** Si $a < b$ : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{a-b} < 1$, la série $\sum \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ converge.
Si $a > b$ : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{a-b} > 1$, la série $\sum \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ diverge.
Si $a = b$ : $\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = 1$, la série devient $\sum 1$ et elle diverge.
$(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{a-b}$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n+a}{n+b} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{n+a}{n+b}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln\frac{n+a}{n+b})'}{(\frac{1}{n})'} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{b-a}{(n+b)^2}}{\frac{-1}{n^2}\cdot\frac{n+a}{n+b}} = a-b.)$

**43)** $\frac{2^n\sin^{2n}(a)}{n^3+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^n\sin^{2n}(a)}{n^3} = v_n$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|v_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sin^2(a)}{n^{3/n}} = 2\sin^2 a$. Si $\sin a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ la série $\sum v_n$ converge et aussi $\sum \frac{2^n\sin^{2n}(a)}{n^3+1}$.
Si $\sin a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ la série $\sum v_n$ diverge et aussi $\sum \frac{2^n\sin^{2n}(a)}{n^3+1}$.
Si $\sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ la série $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^3}$ converge et aussi $\sum \frac{2^n\sin^{2n}(a)}{n^3+1}$.

**44)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{a\ln n} = \frac{1}{3^{a\ln n}} = \frac{1}{e^{(a\ln n).\ln 3}} = \frac{1}{(e^{\ln n^a})^{\ln 3}} = \frac{1}{n^{a\ln 3}}$.
La série (de Riemann) converge pour $a\ln 3 > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{\ln 3}$.

**45)** **Attention**: la série n'est pas alternée, car $\tan\frac{(-1)^n}{n}$ change aussi de signe en même temps que $(-1)^n$.
$(-1)^n\tan\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \frac{1}{n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann), donc la série $\sum(-1)^n\tan\frac{(-1)^n}{n}$ diverge aussi.

## 4) CONVERGENCE ET SOMME DES SÉRIES

**Étudiez la convergence de chacune des séries numériques suivantes puis vérifiez votre résultat en calculant la somme partielle de la série puis sa somme totale.**

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}$. **2)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **3)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)(3n+1)}$.

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}})$ **5)** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n$. **6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$.

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+m)}$. **8)** $\sum_{n=0}^{\infty} \tan^{-1}(\frac{1}{1+n+n^2})$.

Indications pour les séries **7)** et **8)**:

$$\frac{1}{n(n+1)...(n+m)} = \frac{1}{m}[\frac{1}{n(n+1)...(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+m)}]$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) = \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(b).$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

**Solution** :

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc convergente.

En effet, sa somme partielle est $2\sum_{n=0}^{k} \frac{2^n}{3^n} = 2\frac{1-(\frac{2}{3})^{k+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6(1-(\frac{2}{3})^{k+1})$. Sa somme totale est $\lim_{k\to\infty} 6(1-(\frac{2}{3})^{k+1}) = 6$.

**2)** $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et $\sum \frac{1}{4n^2}$ converge (série de Riemann) donc $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge.

En effet, sa somme partielle est
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})\\ &= \frac{1}{2}[(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1}) + (\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})... + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1})]\\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{-1} - \frac{1}{2k+1}].\end{aligned}$$

Sa somme totale est finie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}[\frac{1}{-1} - \frac{1}{2k+1}] = -\frac{1}{2}$.

**3)** $\frac{1}{(3n+4)(3n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{9n^2}$ et $\sum \frac{1}{9n^2}$ converge (série de Riemann) donc $\sum \frac{1}{(3n+4)(3n+1)}$ converge.

En effet, sa somme partielle est
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(3n+4)(3n+1)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{k}(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4})\\ &= \frac{1}{3}[(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{10})... + (\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4})]\\ &= \frac{1}{3}[(\frac{1}{1} - \frac{1}{3k+4}].\end{aligned}$$

Sa somme totale est finie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)(3n+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}[\frac{1}{1} - \frac{1}{3k+4}] = \frac{1}{3}$.

**4)** $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}(1-\frac{1}{2n}) - \frac{1}{\sqrt{n}}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$,

et $\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ converge (Riemann) donc la série $\sum(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}})$ converge.

En effet, sa somme partielle est
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k}(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}) &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + ... + (\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}})\\ &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}).\end{aligned}$$

Sa somme totale est finie: $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}) = \lim_{k\to\infty}(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}) = 1$.

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\, n \neq 0$, donc la série $\sum \cos\, n$ diverge.

En effet, sa somme partielle est $\sum\limits_{n=0}^{k} \cos\, n = \text{Re} \sum\limits_{n=0}^{k} e^{in} = \text{Re}\, \frac{1-e^{i(k+1)}}{1-e^{i}}$

$$= \text{Re}\, \frac{e^{-i(k+1)/2} - e^{i(k+1)/2}}{e^{-i/2} - e^{i/2}} e^{ik/2}$$
$$= \text{Re}\, \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} (\cos\frac{k}{2} + i \sin\frac{k}{2})$$
$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \cos\frac{k}{2}.$$

Sa somme totale n'est pas déterminée car $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \cos\frac{k}{2}$, n'est pas déterminée.

**6)** $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann) donc $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

En effet, sa somme partielle est: $\sum\limits_{n=1}^{k} \ln(1+\frac{1}{n}) = \sum\limits_{n=1}^{k} \ln(\frac{n+1}{n})$

$$= \sum_{n=1}^{k} (\ln(n+1) - \ln n)$$
$$= (\ln 2 - 0) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) ... + (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(k+1).$$

Sa somme totale est infinie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{k\to\infty} \ln(k+1) = \infty$.

**7)** $\frac{1}{n(n+1)...(n+m)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{m+1}}$ et $\sum \frac{1}{n^{m+1}}$ converge (Riemann) donc $\sum \frac{1}{n(n+1)...(n+m)}$ converge.

En effet, sa somme partielle est:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)...(n+m)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{k} [\frac{1}{n(n+1)...(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+m)}]$$
$$= \frac{1}{m} \{[\frac{1}{1.2...m} - \frac{1}{2.3...(1+m)}] + [\frac{1}{2.3...(1+m)} - \frac{1}{3.4...(2+m)}] ... + [\frac{1}{k.(k+1)3...(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1).(k+2)...(k+m)}]\}$$
$$= \frac{1}{m} [\frac{1}{1.2...m} - \frac{1}{(k+1).(k+2)...(k+m)}].$$

Sa somme totale est finie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+m)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{m} [\frac{1}{1.2...m} - \frac{1}{(k+1).(k+2)...(k+m)}] = \frac{1}{m} \frac{1}{1.2...m} = \frac{1}{m.m!}$.

**8)** $\tan^{-1} \frac{1}{(1+n+n^2)} \underset{n\to\infty}{\sim} \tan^{-1} \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \tan^{-1} \frac{1}{(1+n+n^2)}$ converge.

En effet, sa somme est partielle est:

$$\sum_{n=0}^{k} \tan^{-1}(\frac{1}{1+n+n^2}) = \sum_{n=0}^{k} \tan^{-1}(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}) = \sum_{n=0}^{k} [\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n]$$
$$= [\tan^{-1}(1) - 0] + [\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1)] + [\tan^{-1}(3) - \tan^{-1}(2)] ... + [\tan^{-1}(k+1) - \tan^{-1}(k)]$$
$$= \tan^{-1}(k+1).$$

Sa somme totale est finie: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tan^{-1}(\frac{1}{1+n+n^2}) = \lim\limits_{k\to\infty} \tan^{-1}(k+1) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

## 5) CONVERGENCE SIMPLE ET CONVERGENCE ABSOLUE

**Étudier la convergence simple et absolue de chacune des séries numériques suivantes.**

**1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. **3)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos \pi n}{n^2+1}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

**5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{n} \sin^2(\frac{1}{n})$. **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. **7)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3-1)^{4/3}}$. **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

**9)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{n} \sin^2(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

**Solution** :

**1)** • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann).

Donc la série converge simplement mais pas absolument.

**2)** • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est une série alternée convergente car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).

Donc la série converge simplement et absolument.

**3)** • $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos\pi n}{n^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$ est une série alternée convergente car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

• $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n|\cos\pi n|}{n^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge car $\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann).

Donc la série converge simplement mais pas absolument.

**4)** • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \to \int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x} = \int_1^{\infty} \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\infty} = \infty$. Donc $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

• Comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ : la série ne converge ni simplement ni absolument.

**5)** • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{n})$ est une série alternée convergente car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{n}) \sim \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}.\frac{1}{n^2} = 0$.

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{n})$. $\sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann)$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge.

Donc la série converge simplement et absolument.

**6)** • $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ converge: par conséquent $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument.

La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge donc absolument **et** simplement. (Car convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple.)

**7)** • $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3-1)^{4/3}}$ est une série alternée convergente car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n^3-1)^{4/3}} \sim \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

• $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n^3}{(n^3-1)^{4/3}}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(n^3-1)^{4/3}}$ diverge car $\left|\frac{n^3}{(n^3-1)^{4/3}}\right| > \frac{n^3}{(n^3)^{4/3}} = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann).

La série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3-1)^{4/3}}$ converge donc simplement mais pas absolument.

**8)** • $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}.u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$. Donc la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

Comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ : la série converge simplement et absolument.

**9)** • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est une série alternée convergente car $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}.\frac{1}{n} = 0$

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Mais $\sqrt{n}\sin^2(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann)$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge.

Donc la série converge simplement mais pas absolument.

## SUPPLÉMENT

Afin de ne pas surcharger les exercices proposés, j'ai omis le teste de Dirichlet (appelé aussi théorème d'Abel) pour exposer séparément les cas pour lesquels il est souvent utilisé. Ce teste peut être utilisé si aucun des testes exposés précédemment ne marche.

**Teste de Dirichlet (appelé parfois théorème d'Abel)**

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ converge si

- $a_n$ est une suite monotone décroissante avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- et $\sum_{n=0}^{k} u_n$ est bornée $\forall k \in \mathbb{N}$.

## Exemples

Montrer la convergence de chacune des séries suivantes

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$. **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. **3)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{2\sqrt{n}+\cos n}$.

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a\sqrt{n}} \sin n.(a>0)$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{\sin n}{n\sqrt{n}})$.

**Solution**

Comme vous pouvez le vérifier aucun des testes que nous avons exposés ne fonctionne sur ces deux séries. Par conséquent nous allons utiliser le teste de Dirichlet. Pour cela nous remarquons que les cinq séries sont de la forme $\sum a_n u_n$. Pour toutes les cinq, la première condition du teste de Dirichlet est vérifiée, à savoir que $(a_n = \frac{1}{n})$ , $(a_n = \frac{1}{\sqrt{n}})$ , $(a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}+\cos n})$, $(a_n = e^{-a\sqrt{n}})$, $(a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ car pour la dernière série nous avons $\ln(1+\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$), sont toutes des suites monotones décroissantes avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ce qui reste à vérifier c'est que $\sum_{n=0}^{k} u_n = (\sum_{n=1}^{k} \sin n\ ,\ \sum_{n=1}^{k} \cos n\ ,\ \sum_{n=0}^{k} \sin n)$ sont bornées $\forall k$.

Pour cela il existe une astuce, c'est d'utiliser les nombres complexes.

Puisque $\sin n = \operatorname{Im} e^{in}$ alors $\sum_{n=0}^{k} \sin n = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{k} e^{in} = \operatorname{Im} \frac{1-e^{i(k+1)}}{1-e^{i}}$ (car c'est une série géométrique de raison $e^{i}$.)

$$= \operatorname{Im} \frac{e^{-i(k+1)/2}-e^{i(k+1)/2}}{e^{-i/2}-e^{i/2}} e^{ik/2}$$
$$= \operatorname{Im} \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} (\cos\frac{k}{2} + i\sin\frac{k}{2})$$
$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \sin\frac{k}{2}.$$

Comme $\frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \sin\frac{k}{2} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, on conclu que $\sum_{n=0}^{k} \sin n \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\sum_{n=1}^{k} \sin n$ est bornée $\forall k$.

De même, on a $\cos n = \operatorname{Re} e^{in}$ alors $\sum_{n=0}^{k} \cos n = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{k} e^{in} = \operatorname{Re} \frac{1-e^{i(k+1)}}{1-e^{i}}$

$$= \operatorname{Re} \frac{e^{-i(k+1)/2}-e^{i(k+1)/2}}{e^{-i/2}-e^{i/2}} e^{ik/2}$$
$$= \operatorname{Re} \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} (\cos\frac{k}{2} + i\sin\frac{k}{2})$$
$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \cos\frac{k}{2}.$$

Comme $\frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \cos\frac{k}{2} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, on conclu que $\sum_{n=0}^{k} \cos n \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\sum_{n=1}^{k} \cos n$ est bornée $\forall k$.

Les deux conditions du teste de Dirichlet sont réunies, on conclu que les séries $\sum \frac{\sin n}{n}$, $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$, $\sum \frac{\sin n}{2\sqrt{n}+\cos n}$, $\sum e^{-a\sqrt{n}} \sin n$, et $\sum \ln(1+\frac{\sin n}{n\sqrt{n}})$ sont toutes convergentes.

Les séries ne convergent pas absolument car $\sum |\sin n|$ et $\sum |\cos n|$ ne sont pas bornées.

D'une manière générale, les séries de la forme $\sum a_n \sin n$ ou $\sum a_n \cos n$ convergent si $a_n$ est une suite monotone décroissante et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.