جامعة منتوري -قسنطينة-
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير
قسم LMD

السنة الجامعية 2012/2011
السنة الأولى
السداسي الأول

المراقبة الأولى في مقياس الرياضيات

المجموعات: F،E،D

المدة: ساعة ونصف.

التمرين الأول(5 نقاط): أدرس طبيعة المتتالية المعرفة بحدها العام:

$$1)\ U_n = \sqrt{n^2+1} - n,$$

$$2)\ U_n = \frac{n^2}{n+2},$$

$$3)\ U_n = \frac{3+n(-1)^n}{n+1}.$$

التمرين الثاني(5 نقاط): لتكن التابع f حيث $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

1. أوجد مجموعة التعريف التابع f .
2. بين أن f يقبل تمديد باستمرار عند 0، و ليكن $\hat{f}$ هو تمديد التابع f على المجموعة IR .
3. أكتب العبارة التحليلية للتابع $\hat{f}$ و حدد مجموعة تعريفه.
4. أدرس قابلية اشتقاق التابع $\hat{f}$ عند 0، ثم أوجد التابع المشتق $\hat{f}'$.
5. هل $\hat{f}'$ مستمر عند 0 ؟ ماذا تستنتج ؟

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالخاصية التالية: إذا كان h محدودة و كانت $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ فإن

$$\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$$

التمرين الثالث(5 نقاط):

1) أعط نص نظرية التزيدات المنتهية.
2) باستعمال هذه النظرية برهن صحة المتراجحة التالية:

$$\forall x > 0;\ x < \frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} < x+1.$$

التمرين الرابع(5 نقاط):

1) أكتب النشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة 3 للتابع: $f(x) = \ln(x+1)$.
2) أكتب النشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة 1 للتابع: $g(x) = \sin x$.
3) استنتج النهاية التالية: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)^3}{\ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}}$.
4) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}.$$

بالتوفيق

التصحيح النموذجي للمراقبة الاولى في مقياس الرياضيات

التمرين الاول:

1) دراسة طبيعة متتالية المعرفة بحدها العام

$$U_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

من الواضح أن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = +\infty - \infty$$ 0.5

وهي حالة من حالات عد التعيين و لإزالتها نستعمل طريقة الضرب في المرافق:

$$U_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$$ 0.5

$$U_n = \frac{1}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = 0$$ 0.5

أي أن المتتالية متقاربة نحو 0 .

---

2) دراسة طبيعة متتالية المعرفة بحدها العام

$$U_n = \frac{n^2}{n+2},$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty}\frac{n^2}{n+2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

أي أن المتتالية متباعدة.

---

2) دراسة طبيعة متتالية المعرفة بحدها العام

$$U_n = \frac{3+n(-1)^n}{n+1}$$

لدينا حالتان:

الحالة الأولى إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$U_n = \frac{3+n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n} = 1$$

الحالة الثانية إذا كان n عدد فردي فإن:

$$U_n = \frac{3-n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{n} = -1$$

ومنه نلاحظ أن للمتتالية نهايتان مختلفتان و بالتالي النهاية غير موجودة مما يعني أن المتتالية متباعدة.

التمرين الثاني:

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) مجموعة التعريف: 0.5

$$D_f = \{x \in IR / x \neq 0\} = IR^*.$$

2) تبيان أن التابع يقبل التمديد بالاستمرار:

ندرس نهاية التابع عند النقطة 0 ومن أجل هذا نستعمل الملاحظة المذكورة أدناه أي نضع:

$$h(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ g(x)=x^2$$

نعلم أن التابع الأول يحقق العلاقة التالية:

$$\forall x\in IR^{*}: -1\le \sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$$ 0.5

أي أنه تابع محدود والتابع الثاني يحقق العلاقة:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

وحسب الملاحظة السابقة فإن:

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$ 0.5

النهاية موجودة ومنتهية إذن التابع يقبل التمديد بالاستمرار.

3) عبارة التابع الممدد:

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right); & x\neq 0\\ 0; & x=0.\end{cases}$$

مجموعة تعريفه هي:

$$D_{\hat{f}}=IR.$$

4) دراسة قابلية اشتقاق التابع $\hat{f}$ عند 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\hat{f}(x)-\hat{f}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

وهذا حسب الملاحظة المذكورة في أخر التمرين أي أن جداء تابعين أحدهما محدود و الأخر يؤول إلى الصفر يؤول إلى الصفر.

و منه التابع الممدد يقبل الاشتقاق عند النقطة 0 و لدينا:

$$\hat{f}'(0)=0$$

إيجاد التابع المشتق:

$$\hat{f}'(x)=\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{f}'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه يكون لدينا:

$$\hat{f}'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right); & x\neq 0\\ 0; & x=0.\end{cases}$$

5) دراسة الاستمرار عند النقطة 0 :

$$\lim_{x\to 0}\hat{f}'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

من الواضح حسب الملاحظة المذكورة في التمرين أن:

$$\lim_{x\to 0}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

لكن التابع $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ليست له نهاية عند الصفر ومنه 0.5

$$\lim_{x\to 0} \hat{f}'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

غير موجودة وبالتالي التابع غير مستمر عند النقطة الصفر.

نتيجة: التابع يقبل الاشتقاق عند نقطة معينة فإن التابع المشتق ليس بالضرورة مستمرا عندها. 0.5

التمرين الثالث:

1) نص نظرية التزيدات المنتهية:

ليكن التابع f معرف على المجال $[a,b]$ حيث: 0.5

- التابع f مستمر على المجال $[a,b]$

- التابع f يقبل الاشتقاق على المجال $]a,b[$ فإنه: 0.5

$$\exists c \in]a,b[/ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$ 0.5

2) البرهان على صحة المتراجحة التالية:

$$\forall x > 0;\ x < \frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} < x+1.$$

نضع:

$$f(x) = \ln(x)$$
$$[a,b] = [x, x+1];\ x > 0$$

التابع $\ln$ هو تابع معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و بالتالي فهو قابل للاشتقاق عل أي مجال $]0,+\infty[$ ومنه نلاحظ أن: $[a,b] \subset]0,+\infty[$

- التابع f مستمر على المجال $[x, x+1]$ مع $x > 0$

- التابع $\ln$ يقبل الاشتقاق على المجال $]x, x+1[$ مع $x > 0$.

ومنه حسب نظرية التزايدات المنتهية فإن:

$$\exists c \in]x, x+1[/ f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in]x, x+1[/ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$$

لان:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$$

وبما أن:

$$c \in]x, x+1[;\ (x>0) \Leftrightarrow x < c < x+1;\ (x>0) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x};\ (x>0)$$

بالتعويض نجد:

$$\forall x > 0;\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} < x+1;\ x > 0$$

التمرين الرابع:

1) النشر المنتهي في جوار الصفر من الرتبة 3 للتابع $\ln(1+x)$ هو:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$ 0.5

2) النشر المنتهي في جوار الصفر من الرتبة 1 للتابع $\sin x$ هو:

$$\sin x = x + o(x)$$ 0.5

3) حساب النهاية باستعمال النشر المحدود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^3}{\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^3}{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x+\frac{x^2}{2}}$$ 0.5

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{1}{3}x^3}=3$$ 0.5

ومنه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^3}{\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}}=3.$$ 0.5

4) باستعمال قاعدة لوبيتال نحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\frac{0}{0}$$ 0.5

وهي حالة عدم تعيين و بما أن التوابع $\sin(3x)$, $(5x)$ هي توابع قابلة للاشتقاق فيمكن تطبيق قاعدة لوبيتال ولدينا: 0.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{5}=\frac{3}{5}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{5x}=\frac{3}{5}.$$ 0.5