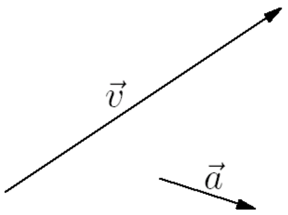
Chapitre 2

Analyse vectorielle

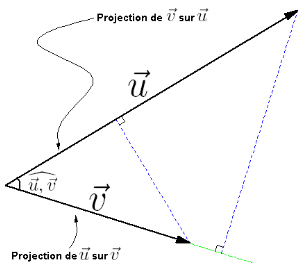
2.1 Vecteurs



Les vecteurs sont des objets mathématiques ayant trois caractéristiques : une norme, une direction et un sens. Dans l'espace de dimensions ≤ 3, ils sont représentés graphiquement par des segments de droites dont la longueur est proportionnelle à leur **norme**, et par une flèche indiquant leur direction et leur sens. Par exemple, la vitesse ou l'accélération d'un point M peuvent être représentées par des vecteurs. Notez cependant que, *bien que toutes les deux soient des vecteurs, ces quantités expriment des grandeurs physiques très différentes l'une de l'autre (la norme de ces vecteurs, respectivement la vitesse et l'accélération n'ont d'ailleurs pas la même unité !)*. Aussi, dans la figure ci-contre, dire que "l'accélération du point M est plus grande que sa vitesse" n'a strictement aucun sens ! Ces deux notions ne pouvant pas être comparées l'une à l'autre, il existe nécessairement une "échelle" différente reliant la longueur géométrique des vecteurs à leur norme pour chaque grandeur physique. L'écriture mathématique des vecteurs dépend de la base (repère) choisie. Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé {Ox, Oy, Oz}, un vecteur quelconque $\vec{v}$ se note : $\vec{v} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$ ou encore $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ici, {x,y et z} sont les coordonnées du vecteur tandis que $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}\}$ sont les vecteurs de base du repère choisi. La norme d'un vecteur $\vec{v}$ se note $||\vec{v}||$. Dans l'espace à 3 dimensions on a : $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. C'est une grandeur toujours positive. Notez que, mathématiquement parlant, un vecteur n'a pas de "point d'accroche" dans l'espace et il serait plus judicieux d'utiliser les notations $\{\Delta x, \Delta y$ et $\Delta z\}$ plutôt que {x,y et z} pour les coordonnées des vecteurs. En mécanique, il n'est pas "nécessaire" de donner à chaque vecteur un point d'accroche, mais ceci peut favoriser la compréhension de certains problèmes (Ex : point d'application des forces).

2.2 Produit scalaire

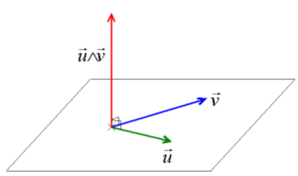


Le produit scalaire est une opération mathématique construite à partir de deux *vecteurs*, et produisant un *scalaire*. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note : $\vec{u}.\vec{v}$. Graphiquement, le produit scalaire correspond au produit de la norme du vecteur $\vec{v}$ avec la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$, ou inversement. Il vient : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$. Le produit scalaire est :

- commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ - distributif : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Le produit scalaire peut aussi être calculé a partir des coordonnées des vecteurs :
soit $\vec{u} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$ et $\vec{v} = d.\vec{e_x} + e.\vec{e_y} + f.\vec{e_z}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = a.d + b.e + c.f$

2.3 Produit vectoriel



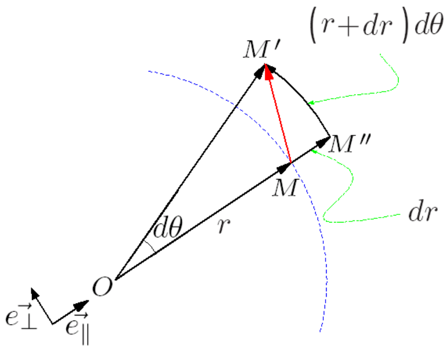
Le produit vectoriel est une opération mathématique en dimension 3 construite à partir de deux *vecteurs*, et produisant un autre *vecteur*. Le vecteur résultant est orthogonal au plan formé par les vecteurs donnés. Graphiquement, le produit vectoriel est construit à l'aide de "la règle de la main droite". On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \times \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{||\vec{u}\wedge\vec{v}||}$. Le produit scalaire est :

- anti-commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ - distributif : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Le produit vectoriel peut aussi être calcule à partir des coordonnées des vecteurs :

soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} b.f - c.e \\ c.d - a.f \\ a.e - b.d \end{pmatrix}$

2.4 Dérivée d'un vecteur par rapport au temps



La dérivée d'un vecteur par rapport au temps est encore un vecteur, et est construite de la même manière que pour une fonction scalaire :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{OM}\right) = \lim_{t'\to t}\left(\frac{\vec{OM'}_{(t')} - \vec{OM}_{(t)}}{dt}\right)$$

où $\vec{OM}$ et $\vec{OM'}$ sont des vecteurs au temps t et t' respectivement, avec $dt = (t'-t) \to 0$. Ici nous considérons le cas général dans lequel le vecteur $\vec{OM}$ a pu, pendant le temps dt, à la fois s'allonger d'une distance dr et "tourner" d'un angle $d\theta$. La quantité dr (dû uniquement au changement de la norme de $\vec{OM}$) est dirigée selon un vecteur unitaire colinéaire au vecteur $\vec{OM}$ - nous notons ce vecteur $\vec{e_\parallel}$. Dans la limite où les temps t et t' sont très voisins, l'arc de cercle $(M''M')$ (dû à la rotation uniquement du vecteur $\vec{OM}$) est égal à $(r+dr)d\theta$, et sa direction pointe selon un vecteur unitaire tangent à l'arc de cercle, donc perpendiculaire à $\vec{OM}$ - nous notons ce vecteur $\vec{e_\perp}$. il vient donc :

$$d(\vec{OM}) = \vec{OM'} - \vec{OM} = \vec{MO} + \vec{OM'} = \vec{MM'} = \vec{MM''} + \vec{M''M'} = dr\ \vec{e_\parallel} + (r+dr)d\theta\ \vec{e_\perp} = dr\ \vec{e_\parallel} + (r.d\theta + \underbrace{drd\theta}_{\textbf{négligeable}})\ \vec{e_\perp}$$

$$\text{Ainsi...}\ \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}\right) = \frac{dr}{dt}.\vec{e_\parallel} + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\perp} \tag{2.1}$$

Dans le cas ou l'on considère la dérivée par rapport au temps d'un vecteur dont la norme ne change jamais (par exemple un vecteur unitaire, de norme 1), on a $dr = 0$ et on montre que le vecteur dérivé par rapport au temps est perpendiculaire au vecteur donné. Une autre démonstration, plus élégante peut être proposée. Soit un vecteur unitaire $\vec{e_T}$, on a :

$||\vec{e_T}|| = 1 \quad \text{soit} \quad \vec{e_T}.\vec{e_T} = 1$

$\frac{d}{dt}(\vec{e_T}.\vec{e_T}) = \frac{d}{dt}(\vec{e_T}).\vec{e_T} + \vec{e_T}.\frac{d}{dt}(\vec{e_T}) = 2\vec{e_T}.\frac{d}{dt}(\vec{e_T}) = 0$

le produit scalaire entre $\vec{e_T}$ et son vecteur dérivé $\frac{d}{dt}(\vec{e_T})$ est nul...

donc $\quad \frac{d}{dt}(\vec{e_T}) \perp \vec{e_T} \qquad$ (c.q.f.d.)

La dérivation d'un vecteur peut aussi être réalisée directement à partir de son expression analytique. Considérons le vecteur suivant : $\vec{v}_{(t)} = A_{(t)}.\vec{e_x} + B_{(t)}.\vec{u}_{(t)}$. Ce vecteur est exprimé dans la base des vecteurs *unitaires* $\{\vec{e_x}, \vec{u}_{(t)}\}$ où $\vec{e_x}$ est "fixe", mais $\vec{u}_{(t)}$ dépend du temps (rotation seulement car le vecteur est unitaire). Les coordonnées $A_{(t)}$ et $B_{(t)}$ dépendent elles aussi du temps, par exemple $A(t) = t^2$ et $B(t) = 4t$. Les "règles" relatives à la dérivation d'éléments vectoriels sont les mêmes que celles d'une fonction scalaire :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{(t)}\right) &= \left(\frac{dA_{(t)}}{dt}.\vec{e_x} + A_{(t)}.\frac{d}{dt}\left(\vec{e_x}\right)\right) + \left(\frac{dB_{(t)}}{dt}.\vec{u}_{(t)} + B_{(t)}.\frac{d}{dt}\left(\vec{u}_{(t)}\right)\right) \\
&= \left(\frac{dA_{(t)}}{dt}.\vec{e_x} + \vec{0}\right) + \left(\frac{dB_{(t)}}{dt}.\vec{u}_{(t)} + B_{(t)}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}^{\perp}_{(t)}\right) \\
&= 2t.\vec{e_x} + 4.\vec{u}_{(t)} + 4t.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}^{\perp}_{(t)}
\end{aligned}$$

où $\vec{u}^{\perp}_{(t)}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}_{(t)}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire du vecteur tournant $\vec{u}_{(t)}$

2.5 Homogénéité des relations vectorielles

Les objets mathématiques de base de la mécanique (position, vitesse, accélération, forces, moments etc...) sont quasiment tous vectoriel. Vous allez donc devoir vous habituer au formalisme vectoriel pour effectuer les différents calculs demandés. Aussi, chaque fois que vous obtiendrez un résultat, une relation, une équation, *posez-vous toujours la question de savoir si votre résultat est "homogène"*. Une quantité vectorielle doit être égale à un vecteur, une quantité scalaire doit être égale à un scalaire !

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}.\vec{e_N}$ *CORRECT* $\qquad ||\vec{a}|| = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}.\vec{e_N}$ *INCORRECT*

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}$ *INCORRECT* $\qquad a = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}.\vec{e_N}$ *INCORRECT*