L2 MATH MASS INFO

2009/2010

Gloria Faccanoni

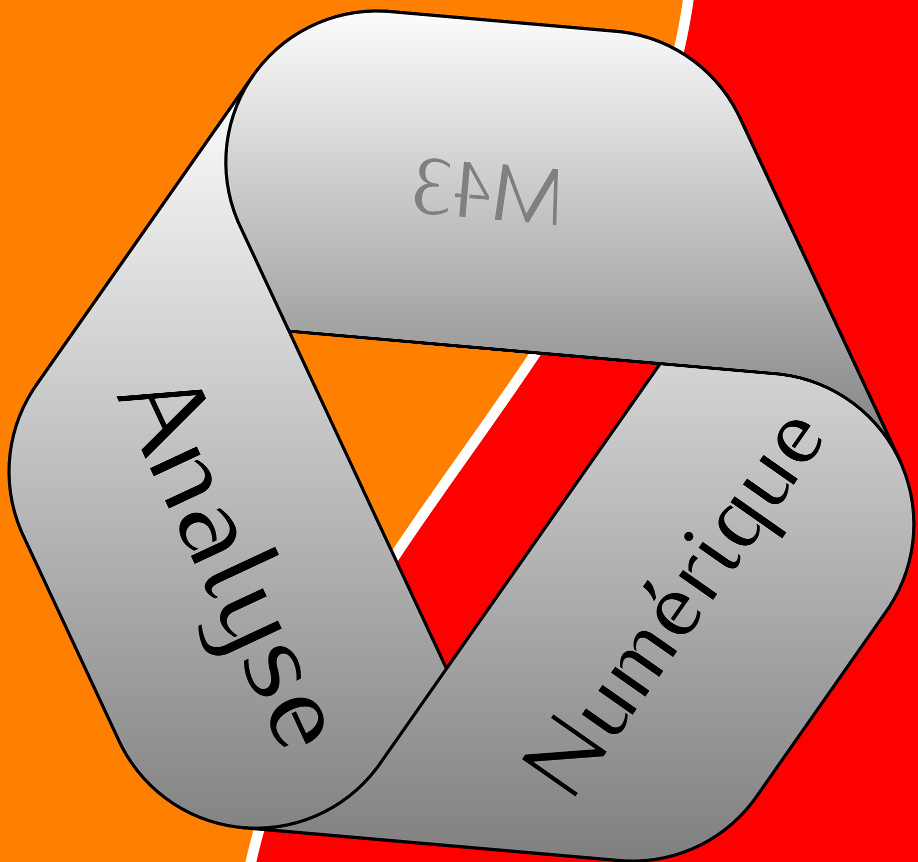


Table des matières

Partiel d'Analyse Numérique

(Durée : 1 heure 30)
(Tout document interdit, calculatrice autorisée)

Exercice ❶ : interpolation de Lagrange [3 pt]

[3 pt] Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Exercice ❷ : interpolation polynomiale [2 pt]

[2 pt] Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $\mathrm{Vec}\{1+x^2, x^4\}$ qui interpole les points $(0,1)$ et $(1,3)$.

Exercice ❸ : résolution d'équations non linéaires [15 pt]

Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$ ($a > 0$ fixé).

1. [3 pt] Faire l'étude complète de la fonction g.
2. [2 pt] Comparer g à l'identité.
3. [2 pt] Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad x_0 > 0.$$

   À l'aide des graphe de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
4. [2 pt] Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
5. [2 pt] Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. [2 pt] Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer $\sqrt[3]{a}$ à une précision de 10^{-6}.
7. [2 pt] Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - a$. Que remarque-t-on ?

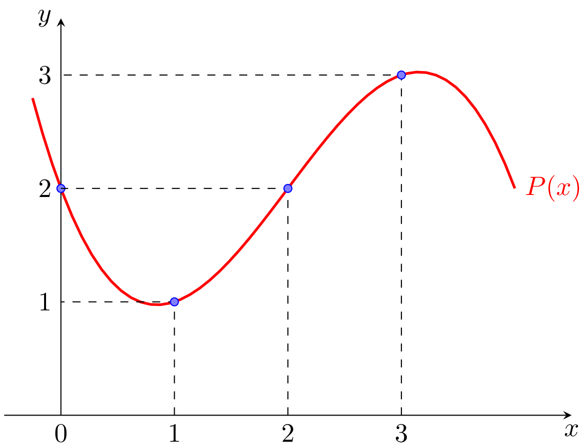
Solution de l'exercice ❶

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

Ici $n = 3$ donc on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
&+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =\\
&= 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}\\
&+ 2\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 3\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} =\\
&= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-3} + \frac{x(x-2)(x-3)}{2}\\
&- x(x-1)(x-3) + \frac{x(x-1)(x-2)}{2}\\
&= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x + 2.
\end{aligned}$$

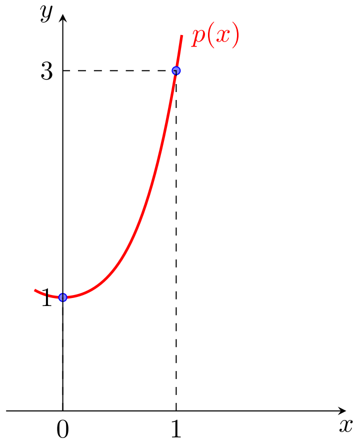


Solution de l'exercice ❷

Il s'agit de trouver un polynôme $p(x)$ qui soit combinaison linéaire des deux polynômes assignés (*i.e.* $p(x) = \alpha(1+x^2)+\beta(x^4)$) et qui interpole les deux points $(0,1)$ et $(1,3)$:

$$\begin{cases} p(0)=1, \\ p(1)=3, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha(1+0^2)+\beta(0^4)=1, \\ \alpha(1+1^2)+\beta(1^4)=3, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Le polynôme cherché est donc le polynôme $p(x) = 1 + x^2 + x^4$.

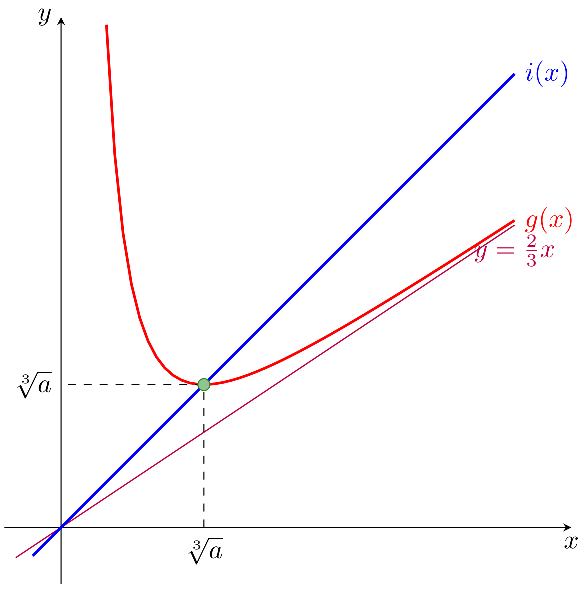


Solution de l'exercice ❸

1. Étude de la fonction $g\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$:
   - ⋆ $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$;
   - ⋆ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
     $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - \frac{2}{3}x = 0$ donc $y = \frac{2}{3}x$ est un asymptote ;
   - ⋆ $g'(x) = \frac{2}{3x^3}(x^3 - a)$;
   - ⋆ g est croissante sur $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$, décroissante sur $[0, \sqrt[3]{a}]$;
   - ⋆ $x = \sqrt[3]{a}$ est un minimum absolu et $g(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$.

x	0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

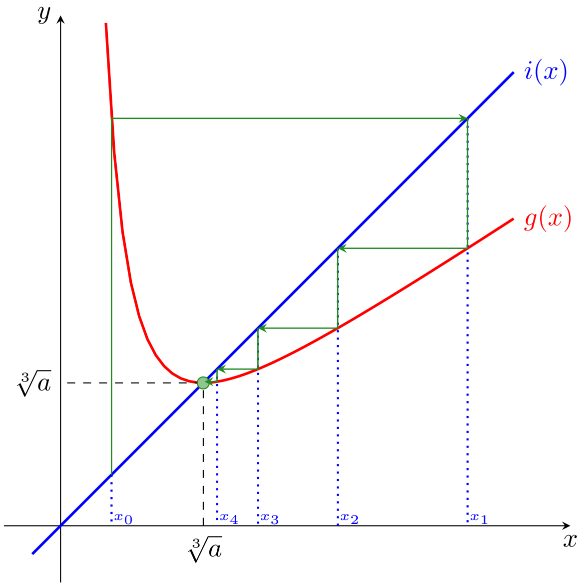
2. Le graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$ est le suivant



   On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$:

$$g(x) = x \quad\iff\quad \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} = x \quad\iff\quad x^3 = a.$$

3. Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe :



4. On en déduit que pour tout $x > 0$ on a $g(x) \geq \sqrt[3]{a}$. Donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geq \sqrt[3]{a}$. Pour étudier la convergence de la méthode on procède alors par deux étapes :
   4.1. on vérifie d'abord la CN pour tout $\alpha \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$:
   $$\alpha = g(\alpha) \iff \alpha = \sqrt[3]{a};$$
   4.2. vérifions maintenant les CS :
      4.2.1. pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a
      $$g(x) > \sqrt[3]{a}$$
      donc $g\colon [\sqrt[3]{a}, +\infty[\to [\sqrt[3]{a}, +\infty[$;
      4.2.2. $g \in \mathscr{C}^1([\sqrt[3]{a}, +\infty[)$;
      4.2.3. pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a
      $$|g'(x)| = \left|\frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right)\right| < 1$$
      donc g est contractante.

   Alors la méthode converge vers α point fixe de g (et racine cubique de a).
5. Étant donné que
   $$g'(\alpha) = 0, \qquad g''(\alpha) = \frac{2a}{\alpha^4} \neq 0$$
   la méthode de point fixe converge à l'ordre 2.
6. Algorithme de point fixe :

Algorithm 1 Calcul de $x = g(x)$

Require: $x_0 > 0$
  while $|x_{k+1} - x_k| > 10^{-6}$ **do**
    $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  end while

Quelques remarques à propos du critère d'arrêt basé sur le contrôle de l'incrément. Les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$; on se demande si cela garantît-t-il que l'erreur absolue e_{k+1} est elle aussi inférieur à ε. L'erreur absolue à l'itération $(k+1)$ peut être évaluée par un développement de Taylor au premier ordre

$$\mathrm{e}_{k+1} = |g(\alpha) - g(x_k)| = |g'(z_k)\mathrm{e}_k|$$

avec z_k compris entre α et x_k. Donc

$$|x_{k+1} - x_k| = |\mathrm{e}_{k+1} - \mathrm{e}_k| = |g'(z_k) - 1|\mathrm{e}_k \simeq |g'(\alpha) - 1|\mathrm{e}_k.$$

Puisque $g'(\alpha) = 0$, on a bien $|x_{k+1} - x_k| \simeq \mathrm{e}_k$.

7. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2}$$

autrement dit la méthode de point fixe assignée est la méthode de Newton (qu'on sait être d'ordre de convergence égale à 2 lorsque la racine est simple).

Contrôle ①

▷ Durée : 1 heure
▷ Le sujet comporte 2 exercices indépendants.
▷ Les documents et portables sont strictement interdits, les calculatrices sont autorisées.
▷ On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.
▶ *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.*

Exercice ❶ : interpolation polynomiale [5 pt]

1. [3 pt] Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les trois points $(-1, e)$, $(0, 1)$ et $(1, e)$.
2. [1 pt] Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$.
3. [1 pt] Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $\mathrm{Vec}\{1, x, x^2\}$ qui interpole les trois points $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$.

Exercice ❷ : résolution d'équations non linéaires [15 pt]

1. [4 pt] Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1, 3]$ et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.
   2.1. [2 pt] Situer les 4 racines de f (*i.e.* indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).
   2.2. [1 pt] Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.
   2.3. [5 pt] Soit la méthode de point fixe
   $$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k), \\ x_0 \in]0, 1[, \end{cases} \tag{1}$$
   avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$. Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.
   2.4. [2 pt] Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.
   2.5. [1 pt] Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

⋆ Combien de pas de dichotomie on doit effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?

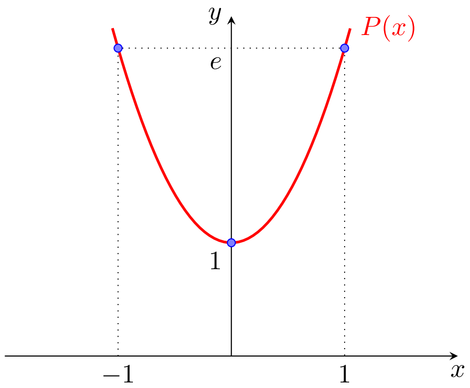
Solution de l'exercice ❶

1. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

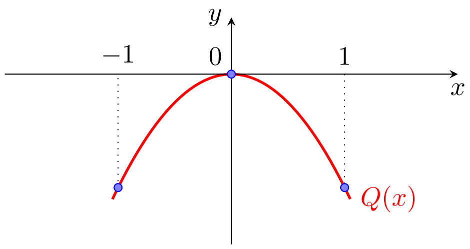
Ici $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= e\frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + e\frac{(x+1)x}{2} = \\ &= (e-1)x^2 + 1. \end{aligned}$$



2. Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précédente :

$$Q(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2.$$



3. Il s'agit de trouver un polynôme $p(x)$ qui soit combinaison linéaire des deux polynômes assignés (*i.e.* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$) et qui interpole les trois points $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$:

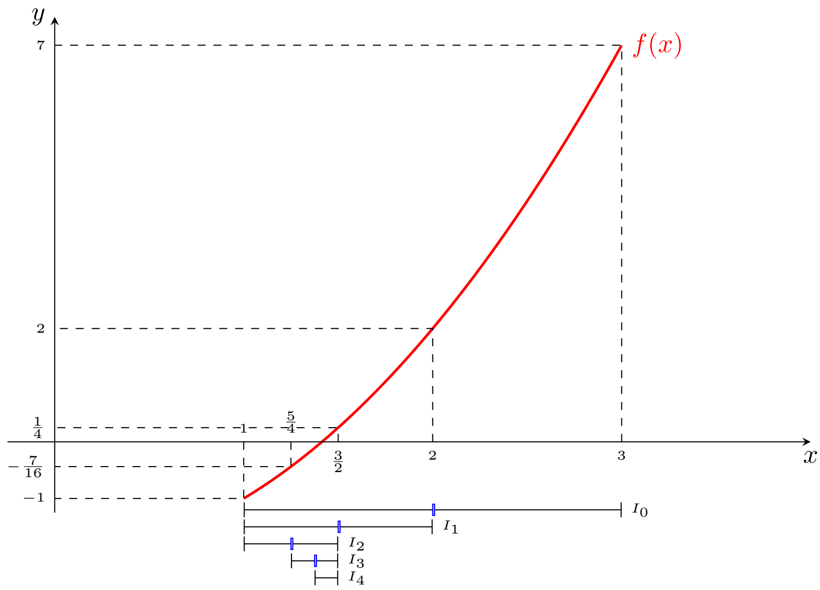
$$\begin{cases} p(-1) = 1, \\ p(0) = 0, \\ p(1) = -1, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = -1, \\ \alpha = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = -1, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = -1$. Le polynôme cherché est donc le polynôme $p(x) = -x^2$.

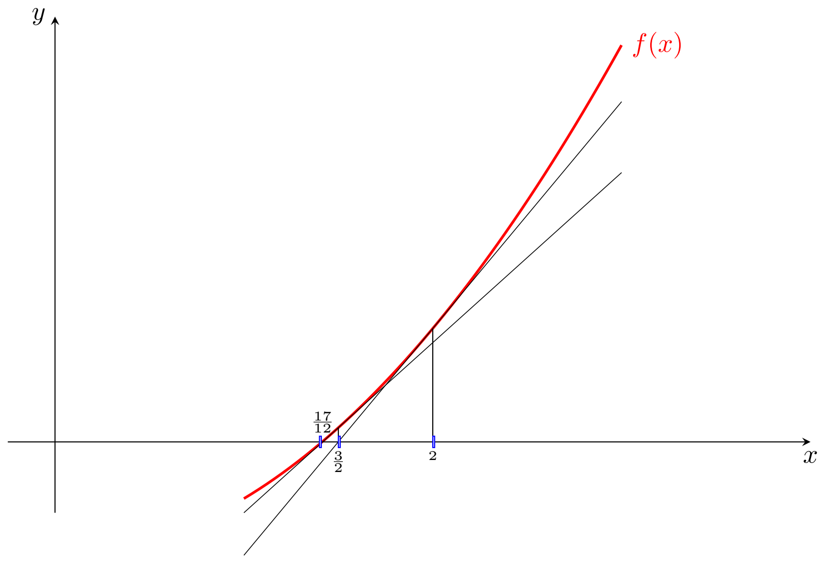
Solution de l'exercice ❷

1. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

   Méthode de la dichotomie : en partant de $I_0 = [a, b]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$ avec $I_{k+1} \subset I_k$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$. Plus précisément
   - on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
   - pour $k \geq 0$
     - si $f(a_k)f(x_k) < 0$ on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ sinon on pose $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
     - et on pose $x_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$.



   Méthode de Newton :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{x_k}.$$



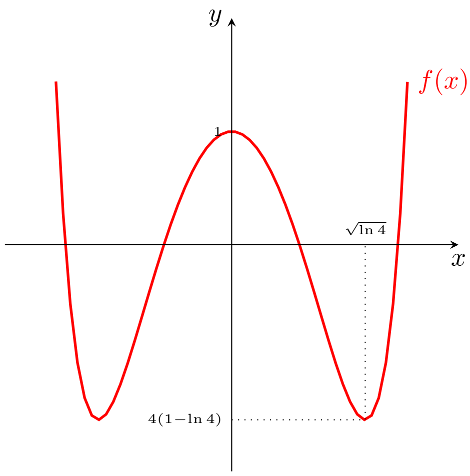
Donc on a le tableau suivant

	Dichotomie	Newton
x_0	2	2
x_1	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
x_2	$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{17}{12} = 1{,}41\bar{6}$
x_3	$\frac{11}{8} = 1{,}375$	$\frac{17}{24} + \frac{12}{17} \simeq 1{,}4142156$

2. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$.

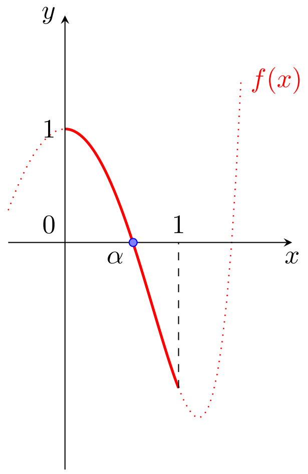
2.1. On remarque que $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire. On fait donc une brève étude sur $[0, +\infty[$:
- $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
- $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \sqrt{\ln 4}$ et on a $f(0) = 1$ et $f(\sqrt{\ln 4}) = 4(1 - \ln 4) < 0$; f est croissante pour $x > \sqrt{\ln 4}$ et décroissante pour $0 < x < \sqrt{\ln 4}$.

Le graphe de f sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant



On a
- une racine dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\ln 4}[$,
- une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{\ln 4}, 0[$,
- une racine dans l'intervalle $]0, \sqrt{\ln 4}[$,
- une racine dans l'intervalle $]\sqrt{\ln 4}, \infty[$.

2.2. Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 4 < 0$, pour le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Puisque $f'(x) = 2x\exp(x^2) - 8x = 2x(\exp(x^2) - 2^2) < 2x(e - 4) < 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, ce α est unique.



2.3. Étude de la convergence de la méthode (1) :

2.3.1. on vérifie d'abord la CN pour tout $\alpha \in \,]0,1[$:

$$\alpha = \phi(\alpha) \iff 2\alpha = \sqrt{\exp(\alpha^2)} \iff 4\alpha^2 = \exp(\alpha^2) \iff f(\alpha) = 0;$$

2.3.2. vérifions maintenant les CS :

2.3.2.1. pour tout x dans $]0,1[$ on a

$$0 < \sqrt{\frac{\exp(x^2)}{4}} < \sqrt{\frac{e}{4}} < 1$$

donc $\phi\colon\,]0,1[\to]0,1[$;

2.3.2.2. $\phi \in \mathscr{C}^1(]0,1[)$;

2.3.2.3. pour tout x dans $]0,1[$ on a

$$|\phi'(x)| = \left|\frac{x\sqrt{\exp(x^2)}}{2}\right| = |x\phi(x)| < |x| < 1$$

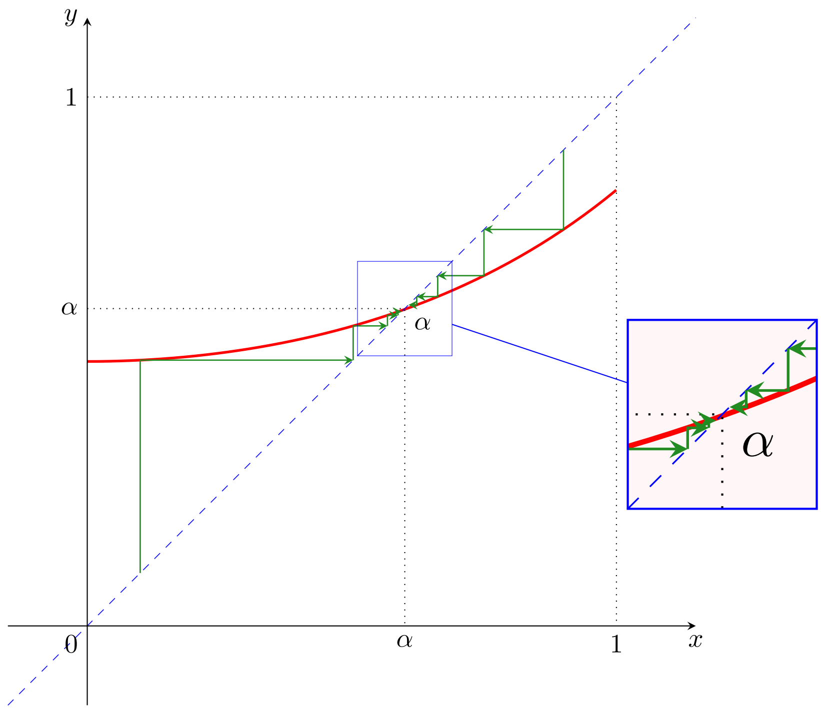
donc ϕ est contractante.

Alors la méthode (1) converge vers α point fixe de ϕ et zéro de f.

De plus, étant donné que

$$\phi'(\alpha) = \alpha\phi(\alpha) = \alpha^2 \neq 0$$

la méthode de point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1.



2.4. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k \exp(x_k^2) - 8x_k} = x_k - \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k(\exp(x_k^2) - 4)}.$$

2.5. Puisque α est une racine simple de f, la méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode de point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.

[$\star$] On rappelle qu'avec la méthode de la dichotomie, les itération s'achèvent à la m-ème étape quand $|x_m - \alpha| \le |I_m| < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle I_m. Clairement $I_k = \frac{b-a}{2^k}$, donc pour avoir $|x_m - \alpha| < \varepsilon$ on doit prendre

$$m \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1.$$

Améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine signifie avoir

$$|x_k - \alpha| = \frac{|x_j - \alpha|}{10}$$

donc on doit effectuer $k - j = \log_2(10) \simeq 3{,}3$ itérations de dichotomie.

Contrôle ② [28 pt]

▷ Durée : 1 heure
▷ Le sujet comporte 3 exercices indépendants.
▷ Les documents et portables sont strictement interdits, les calculatrices sont autorisées.
▷ On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.
▶ ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *(Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.)*

Exercice ❶ : méthode des trapèzes [8 pt]

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. [1 pt] Calculer la valeur exacte de I.
2. [2 pt] Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.
3. [2 pt] Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $\ln(2)$? Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)
4. [3 pt] Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur de quadrature associée s'écrit, si $f \in \mathscr{C}^2([a;b])$,

$$|E_n| = \left|\frac{(b-a)^4}{12n^2} f''(\xi)\right|, \qquad \xi \in]a;b[.$$

Exercice ❷ : méthode des trapèzes-Hermite [10 pt]

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1([-1,1])$ et p le polynôme interpolateur d'Hermite (de degré ≤ 3) de f vérifiant

$$p(-1) = f(-1), \qquad p'(-1) = f'(-1), \qquad p(1) = f(1), \qquad p'(1) = f'(1).$$

1. [3 pt] Écrire le polynôme p.
2. [3 pt] En déduire la méthode d'intégration numérique élémentaire

$$\int_{-1}^1 f(s)\,\mathrm{d}s \approx f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}\left(f'(-1) - f'(1)\right).$$

3. [4 pt] Connaissant la formule sur $[-1;1]$, en déduire la formule de quadrature des trapèzes-Hermite sur l'intervalle $[a;b]$ par exemple grâce au changement de variable $y = a + (x+1)\frac{b-a}{2}$.

Exercice ❸ : résolution d'EDO [10 pt]

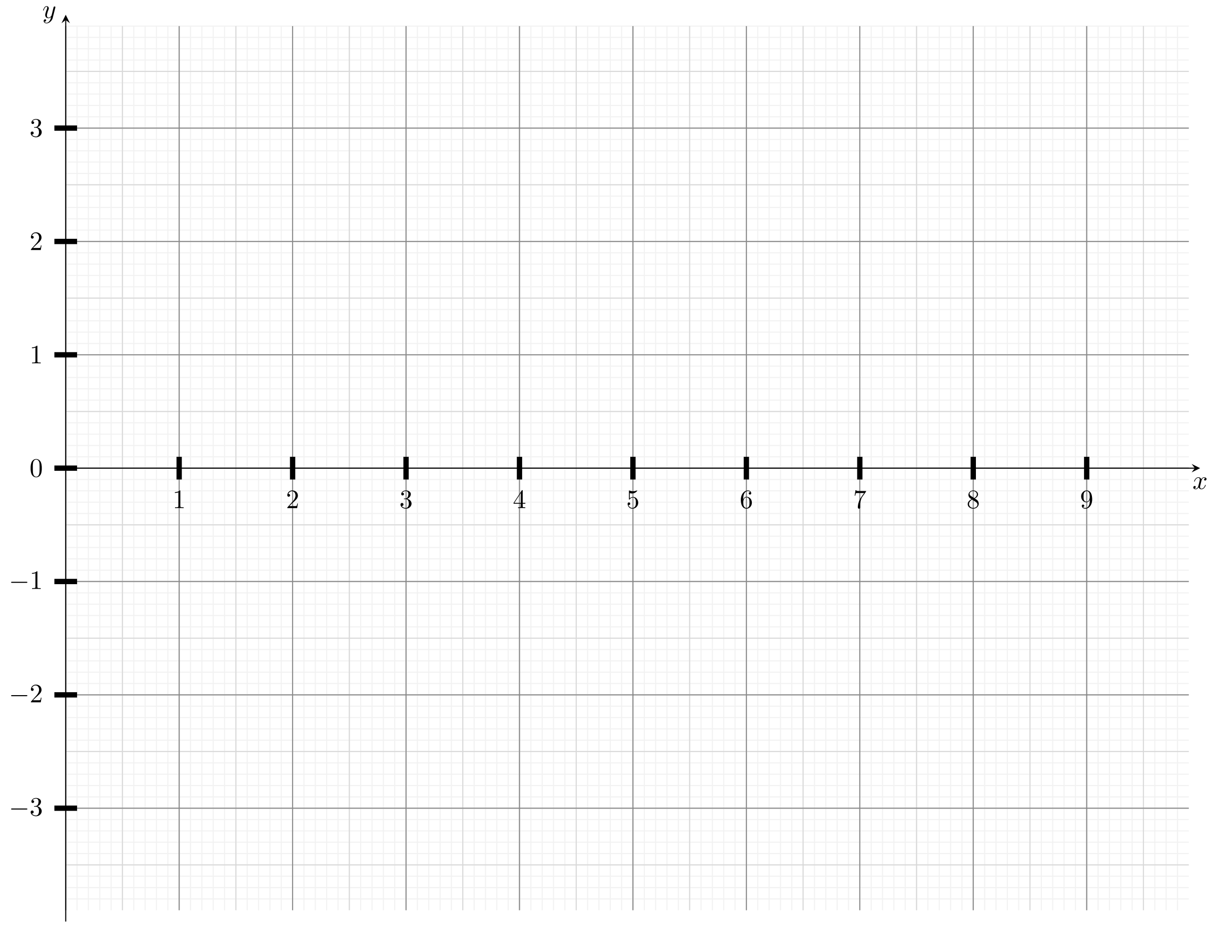
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

sur l'intervalle $[0;10]$.

1. [1 pt] Calculer la solution exacte du problème de Cauchy.
2. [1 pt] Soit Δt le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO).

3. [2 pt] En déduire une forme du type
$$y_{k+1} = g(\Delta t, k)$$
avec $g(\Delta t, k)$ à préciser (autrement dit, l'itérée en t_k ne dépend que de Δt et k et ne dépend pas de y_k).
4. [4 pt] Utiliser la formulation ainsi obtenue pour dessiner sur le plan suivant les solutions
   - exacte,
   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $\Delta t = 2.5$,
   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $\Delta t = 1.5$,
   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $\Delta t = 0.5$.



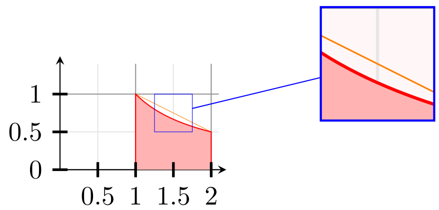
5. [2 pt] Que peut-on en déduire sur la stabilité de la méthode ?

Solution de l'exercice ❶

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$$

1. La valeur exacte est $I = \Big[\ln(x)\Big]_{x=1}^{x=2} = \ln(2)$.
2. La méthode des trapèzes composite à n points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ s'écrit
$$\int_a^b f(t)dt \simeq h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right) \qquad \text{avec } h = \frac{b-a}{n}.$$
Ici on a $f(x) = \frac{1}{x}$, $a=1$, $b=2$, $n=3$ d'où $h = \frac{1}{3}$ et on obtient
$$I \simeq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}f(1) + f(1+1/3) + f(1+2/3) + \frac{1}{2}f(2)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{30} = 0{,}7.$$
3. La valeur numérique obtenue à la question précédente est supérieure à $\ln(2)$ car la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est convexe. On peut se convaincre à l'aide d'un dessin que les trapèzes sont au-dessus de la courbe $y = 1/x$, l'aire sous les trapèzes sera donc supérieure à l'aire sous la courbe. Pour bien visualiser la construction considérons $n = 1$:



Cela reste vrai quelque soit le pas h choisi car la fonction est convexe ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe $y = 1/x$ sera toujours au-dessus de la courbe et par le raisonnement précédant l'aire sous les trapèzes sera supérieure à l'aire exacte.
4. L'erreur est majorée par
$$|E| \le \frac{(b-a)^4}{12n^2} \sup_{\xi\in]a;b[} |f''(\xi)|.$$
Donc ici on a
$$|E| \le \frac{1}{12n^2} \max_{\xi\in]1;2[} \frac{2}{\xi^3} = \frac{1}{6n^2}.$$
Pour que $|E| < 10^{-4}$ il faut que
$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$$
i.e. $n > 10^2/\sqrt{6} \approx 40{,}8$. À partir de 41 sous-intervalles, l'erreur de quadrature est inférieure à 10^{-4}.

Solution de l'exercice ❷

1. On a deux méthodes pour calculer le polynôme interpolateur d'Hermite :
   Première méthode : le polynôme interpolateur d'Hermite s'écrit

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + y_i' B_i(x)$$

où

$$\begin{aligned}
A_i(x) &= (1 - 2(x - x_i)c_i)(L_i(x))^2,\\
B_i(x) &= (x - x_i)(L_i(x))^2,\\
L_i(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\\
c_i &= \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$ on a alors

$$\begin{aligned}
p(x) = y_0 &\left(1 - 2(x - x_0)\left(\frac{1}{x_0 - x_1}\right)\right)\left(\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\right)^2 + y_0'(x - x_0)\left(\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\right)^2\\
+ y_1 &\left(1 - 2(x - x_1)\left(\frac{1}{x_1 - x_0}\right)\right)\left(\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\right)^2 + y_1'(x - x_1)\left(\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dans notre cas $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $y_0 = f(-1)$, $y_1 = f(1)$, $y_0' = f'(-1)$, $y_1' = f'(1)$ donc

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{4}\left[f(-1)(x+2)(x-1)^2 + f'(-1)(x+1)(x-1)^2 + f(1)(2-x)(x+1)^2 + f'(1)(x-1)(x+1)^2\right]\\
&= \frac{1}{4}\Big[f(-1)(x^3 - 3x + 2) + f'(-1)(x^3 - x^2 - x + 1) + f(1)(-x^3 + 3x + 2) + f'(1)(x^3 + x^2 - x - 1)\Big]\\
&= \frac{2f(-1) + f'(-1) + 2f(1) - f'(1)}{4} + \frac{3f(1) - 3f(-1) - f'(-1) - f'(1)}{4}x\\
&+ \frac{f'(1) - f'(-1)}{4}x^2 + \frac{f(-1) + f'(-1) - f(1) + f'(1)}{4}x^3.
\end{aligned}$$

Le polynôme interpolateur d'Hermite est donc le polynôme

$$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2f(-1) + 2f(1) + f'(-1) - f'(1)}{4}, & \beta &= \frac{-3f(-1) + 3f(1) - f'(-1) - f'(1)}{4},\\
\gamma &= \frac{-f'(-1) + f'(1)}{4}, & \delta &= \frac{f(-1) - f(1) + f'(-1) + f'(1)}{4}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : le polynôme interpolateur d'Hermite est un polynôme de degré $2n+1$. On cherche donc un polynôme

$$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

tel que

$$p(-1) = f(-1), \qquad p'(-1) = f'(-1), \qquad p(1) = f(1), \qquad p'(1) = f'(1),$$

c'est-à-dire tel que

$$\begin{cases}
\alpha - \beta + \gamma - \delta = f(-1),\\
\alpha + \beta + \gamma + \delta = f(1),\\
\beta - 2\gamma + 3\delta = f'(-1),\\
\beta + 2\gamma + 3\delta = f'(1).
\end{cases}$$

On obtient

$$\alpha = \frac{2f(-1) + 2f(1) + f'(-1) - f'(1)}{4}, \qquad \beta = \frac{-3f(-1) + 3f(1) - f'(-1) - f'(1)}{4},$$
$$\gamma = \frac{-f'(-1) + f'(1)}{4}, \qquad \delta = \frac{f(-1) - f(1) + f'(-1) + f'(1)}{4}.$$

2. En intégrant le polynôme ainsi trouvé on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\alpha x + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\gamma}{3}x^3 + \frac{\delta}{4}x^4\right]_{-1}^{1} \\
&= 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\
&= \frac{2f(-1) + 2f(1) + f'(-1) - f'(1)}{2} + \frac{-f'(-1) + f'(1)}{6} \\
&= \frac{6f(-1) + 6f(1) + 3f'(-1) - 3f'(1) - f'(-1) + f'(1)}{6} \\
&= f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1)).
\end{aligned}$$

Remarque : la formule est au moins exacte de degré 3 par construction. Elle n'est pas exacte de degré supérieure à 3 car si $f(x) = x^4$ alors

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$
$$\neq$$
$$f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1)) = 1 + 1 + \frac{1}{3}(4+4) = \frac{14}{3} = \frac{70}{15}$$

3. Connaissant la formule sur $[-1;1]$, on en déduit la formule sur un intervalle $[a;b]$ quelconque par le changement de variable $y = a + (x+1)\frac{b-a}{2}$ qui donne[1]

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(y)\mathrm{d}y &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(a + (x+1)\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) + \frac{b-a}{6}(f'(a) - f'(b))\right] \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a) - f'(b)).
\end{aligned}$$

1. Rappel : si $y = a + (x+1)\frac{b-a}{2}$ alors $\mathrm{d}y = \frac{b-a}{2}\mathrm{d}x$ et $f'(y) = \frac{b-a}{2}f'(x)$.

Solution de l'exercice ❸

1. Il s'agit d'une EDO à variables séparables. L'unique solution constante est $y(t) \equiv 0$, toutes les autres solutions sont du type $y(t) = Ce^{-t}$. Donc l'unique solution du problème de Cauchy est $y(t) = e^{-t}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. La méthode d'Euler est une méthode d'intégration numérique d'EDO du premier ordre de la forme $y'(t) = F(t, y(t))$ C'est une méthode itérative : la valeur y à l'instant $t + \Delta t$ de déduisant de la valeur de y à l'instant t par l'approximation linéaire

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + y'(t)\Delta t = y(t) + F(t, y(t))\Delta t.$$

En choisissant un pas de discrétisation Δt, nous obtenons une suite de valeurs (t_k, y_k) qui peuvent être une excellente approximation de la fonction $y(t)$ avec

$$\begin{cases} t_k = t_0 + k\Delta t, \\ y_k = y_{k-1} + F(t_{k-1}, y_{k-1})\Delta t. \end{cases}$$

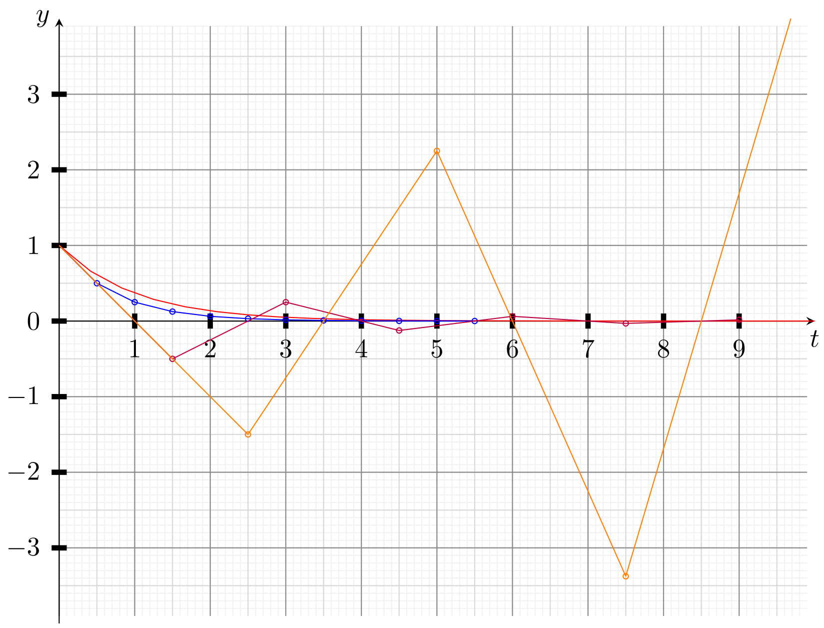
La méthode d'Euler explicite pour cette EDO s'écrit donc

$$y_{k+1} = (1 - \Delta t)y_k.$$

3. En procédant par récurrence sur k, on obtient

$$y_{k+1} = (1 - \Delta t)^{k+1}.$$

4. On a donc
   - si $\Delta t = 2.5$ alors $y_k = \left(-\frac{3}{2}\right)^k$,
   - si $\Delta t = 1.5$ alors $y_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$,
   - si $\Delta t = 0.5$ alors $y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.



NB : les trois premières itérées ont la même pente (se rappeler de la construction géométrique de la méthode d'Euler).

5. De la formule $y_{k+1} = (1 - \Delta t)^{k+1}$ on déduit que
   - si $0 < \Delta t < 1$ alors la solution numérique est stable et convergente,
   - si $1 < \Delta t < 2$ alors la solution numérique oscille mais reste convergente,

– si $\Delta t > 2$ alors la solution numérique oscille et divergente.

En effet, on sait que la méthode est absolument stable si et seulement si $|1 - \Delta t| < 1$.

Remarque : la suite obtenue est une suite géométrique de raison $q = 1 - \Delta t$. On sait que une telle suite

– diverge si $|q| > 1$ ou $q = -1$,
– est stationnaire si $q = 1$,
– converge vers 0 $|q| < 1$.

Examen d'Analyse Numérique

(Durée : 3 heures)
(Tout document interdit, calculatrice autorisée)

Exercice ❶ [2,5 pt]

1. [1,5 pt] Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$ et $(2,3)$.
2. [1 pt] Soit Q le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :
$$Q(x) - P(x) = \lambda(x+1)x(x-1).$$

Exercice ❷ [10,5 pt]

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{i=2n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{2n}$.

Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature à $2n+1$ basée sur la formule de Simpson pour approcher
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$
On propose dans un premier temps (question 1 à 5) de construire la formule de quadrature à 3 points de Simpson :
$$\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha g(-1) + \beta g(0) + \alpha g(1), \tag{3}$$
où les réels α et β sont à déterminer.

1. [0,5 pt] Sous quelle condition (portant sur α et β) la formule de quadrature (3) est exacte pour une fonction g constante ?
2. [1 pt] Sous quelle condition (portant sur α et β) la formule de quadrature (3) est exacte pour une fonction g polynomiale de degré au plus 2 ?
3. [1 pt] En déduire le choix de α et β rendant la formule de quadrature (3) exacte pour une fonction g polynomiale de degré au plus 2.
4. [1 pt] La formule de quadrature est-elle exacte pour tout polynôme de degré 3 ? La formule de quadrature est-elle exacte pour tout polynôme de degré 4 ?
5. [1,5 pt] À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature exacte sur l'espace des polynôme de degré au plus 3 pour l'intégrale suivante :
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
6. [1,5 pt] En déduire une formule de quadrature à $2n$ points, notée F, pour le calcul approché de (2). Cette formule de quadrature est-elle stable ?
7. [1 pt] Écrire l'algorithme du calcul de F.
8. [1 pt] Soit x un élément de $[x_i;x_{i+1}]$. Écrire une formule de Taylor à l'ordre 3 pour f en x :
$$f(x) = P_i(x) + R_i(x),$$
avec $P_i \in \mathbb{P}_3$. Majorer R_i sur $[x_i;x_{i+1}]$ en fonction de h.
9. [2 pt] En déduire une estimation d'erreur entre (2) et F.

Exercice ❸ [7,5 pt]

L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $-2 < f'(x) < -1$ sur $\mathbb{R}$. On définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par la récurrence suivante

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha f(x_n),$$

où $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1. [1 pt] Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. [1 pt] En déduire qu'il existe un unique ℓ élément de $\mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = 0$.
3. [1 pt] Montrer que si $0 < \alpha < 1$, la fonction g définie par $g(x) = x + \alpha f(x)$ vérifie
$$-1 < 1-2\alpha < g'(x) < 1-\alpha \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$
4. [1 pt] En déduire la convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $0 < \alpha < 1$.
5. [0,5 pt] La suite converge-t-elle pour $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$?
6. [1 pt] Donner l'ordre de convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour $0 < \alpha < 1$ en distinguant le cas $\alpha = \frac{1}{f'(\ell)}$.
7. [0,5 pt] Peut-on choisir $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$ d'un point de vue pratique ?
8. [1,5 pt] On choisit alors d'approcher $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$ par $\alpha_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$ et la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha_n f(x_n).$$
Quel est le nom de cette méthode itérative ? Montrer que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $x_0 \in R$.

Exercice ❹ [7 pt]

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) + 10u(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases} \tag{4}$$

1. [1 pt] Montrer qu'il existe une unique solution globale $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que vous préciserez explicitement.
2. [1 pt] Soit le schéma numérique de Cranck-Nicholson défini par la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t} + 5(u_{n+1}+u_n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
pour $\Delta t > 0$ fixé.
Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez la raison.
3. [1 pt] Montrer que la raison r de la suite vérifie pour tout $\Delta t > 0$
$$|r| < 1.$$
Ce schéma est-il inconditionnellement A-stable ?
4. [0,5 pt] Sous quelle condition sur $\Delta t > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ?
5. [0,5 pt] Donner l'expression de u_n en fonction de n.
6. [1 pt] Soit $T > 0$ fixé, soit $n^* = n^*(\Delta t)$ tel que $T - \Delta t < n^*\Delta t \le T$. Montrer que
$$\lim_{\Delta t\to 0} u_{n^*} = u_0 e^{-10T}.$$
7. [2 pt] Soit $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définissant le schéma d'Euler explicite pour l'équation différentielle (4). Montrer que
$$\lim_{\Delta t\to 0} v_{n^*} = u_0 e^{-10T}.$$
Montrer que la suite u_{n^*} converge plus vite que v_{n^*} lorsque $\Delta t \to 0$.

Solution de l'exercice ❶

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

1. Ici $n = 3$ donc on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\
&= \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - (x+1)x(x-2) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2} = \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.
\end{aligned}$$

2. Par construction

$$\begin{aligned}
Q(-1) &= P(-1),\\
Q(0) &= P(0),\\
Q(1) &= P(1),
\end{aligned}$$

donc le polynôme $Q(x) - P(x)$ s'annule en -1, en 0 et en 1, ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$Q(x) - P(x) = R(x)(x+1)x(x-1).$$

Puisque $P(x)$ a degré 3 et $Q(x)$ a degré 2, le polynôme $Q(x) - P(x)$ a degré 3, donc le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 0 (*i.e.* $R(x)$ est une constante).

Si on n'a pas remarqué ça, on peut tout de même faire tous les calculs : dans ce cas $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned}
Q(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + (x+1)x \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.
\end{aligned}$$

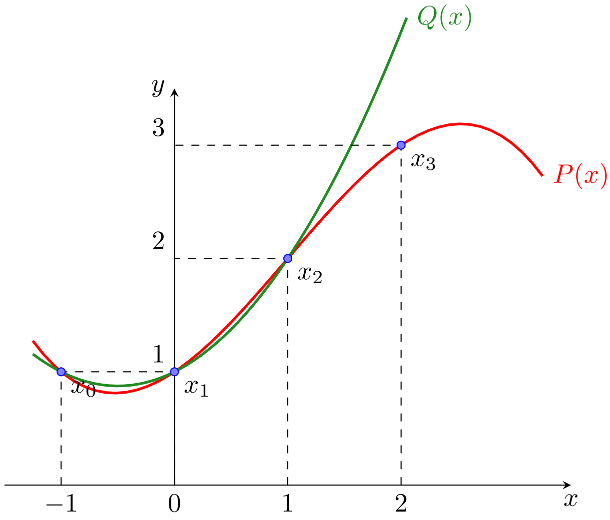
Ainsi

$$\begin{aligned}
Q(x) - P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right] + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right] \\
&+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right] - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= -y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&- y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= -\left[\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \right. \\
&+ \left. \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \right] (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= \frac{(x+1)x(x-1)}{6}
\end{aligned}$$

et $\lambda = \frac{1}{6}$. Sinon directement

$$Q(x) - P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x^2-1) = \lambda x(x+1)(x-1)$$

avec $\lambda = \frac{1}{6}$.



Solution de l'exercice ❷

1. Soit $g(x)=c$ alors on a

$$\begin{array}{ccc}
\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & \alpha g(-1)+\beta g(0)+\alpha g(1)\\
\| & & \|\\
c\,[x]_{-1}^{1} & & \alpha c+\beta c+\alpha c\\
\| & & \|\\
2c & & (2\alpha+\beta)c
\end{array}$$

d'où la relation
$$2=2\alpha+\beta.$$

2. Soit $g(x)=c+dx+ex^2$ alors on a

$$\begin{array}{ccc}
\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & \alpha g(-1)+\beta g(0)+\alpha g(1)\\
\| & & \|\\
\left[cx+d\frac{x^2}{2}+e\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} & & \alpha(c-d+e)+\beta(c)+\alpha(c+d+e)\\
\| & & \|\\
2c+\frac{2}{3}e & & (2\alpha+\beta)c+2\alpha e
\end{array}$$

d'où les relations
$$\begin{cases}2=2\alpha+\beta,\\ \frac{2}{3}=2\alpha.\end{cases}$$

3. On dispose de 2 équations et 2 inconnues. Si on résout le système linéaire
$$\begin{cases}2=2\alpha+\beta,\\ \frac{2}{3}=2\alpha,\end{cases}$$
on obtient l'unique solution
$$\alpha=\frac{1}{3},\qquad \beta=\frac{4}{3}.$$
On a retrouvé la formule de Simpson :
$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{3}\left[g(-1)+4g(0)+g(1)\right].$$
On sait (cf. cours) que cette formule est exacte pour les polynômes de degré au plus 3 comme on va vérifier ci-dessous.

4. Soit $g(x)=c+dx+ex^2+fx^3$ alors on a
$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x=\left[cx+d\frac{x^2}{2}+e\frac{x^3}{3}+f\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=2c+\frac{2}{3}e$$
et
$$\frac{1}{3}\left[g(-1)+4g(0)+g(1)\right]=\frac{1}{3}\left[(c-d+e-f)+4(c)+(c+d+e+f)\right]=2c+\frac{2}{3}e$$
donc la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré 3.
On vérifie qu'elle n'est pas exacte pour les polynômes de degré 4 : soit $g(x)=x^4$, alors
$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$$

et
$$\frac{1}{3}\left[g(-1)+4g(0)+g(1)\right]=\frac{1}{3}\left[1+1\right]=\frac{2}{3}$$
donc la formule de quadrature n'est pas exacte pour les polynômes de degré 4.

5. Par le changement de variable $y=x_i+(x+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$ on déduit la formule de quadrature (exacte sur l'espace des polynôme de degré au plus 3)
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_i+(x+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\,\mathrm{d}x\approx\frac{x_{i+1}-x_i}{6}\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)+f(x_{i+1})\right].$$

6. On trouve ainsi la formule de quadrature composite (*i.e.* sur n sous-intervalles)
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{6}\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)+f(x_{i+1})\right].$$
Si $H=x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$ (*i.e.* si on considère une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ équirépartie) alors on a
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\approx\frac{H}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+4f\left(x_i+\frac{H}{2}\right)+f(x_{i+1})\right]\\&=\frac{H}{6}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_i+\frac{H}{2}\right)\right]\\&=\frac{H}{6}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+iH)+4\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+\frac{(i+1)}{2}H\right)\right].\end{aligned}$$
On peut changer de variables et réécrire la formule de quadrature sous la forme
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2n-1}f(a+2kh)+4\sum_{k=0}^{2n-1}f(a+(k+1)h)\right]\qquad\text{avec } h=\frac{b-a}{2n}.$$
Cette formule de quadrature est stable puisque tous les coefficients sont positifs et on a
$$\begin{aligned}\frac{H}{6}\left[1+1+2\sum_{k=1}^{n-1}1+4\sum_{k=0}^{n-1}1\right]&=\frac{b-a}{6n}\left[2+2(n-1)+4n\right]\\&=\frac{b-a}{6n}6n=(b-a).\end{aligned}$$

7. [1 pt] Algorithme du calcul de F :

Algorithm 2 Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Require: f
Require: a
Require: $b>a$
Require: $n>0$
  $H\leftarrow\frac{b-a}{n}$
  for $i=1$ to $n-1$ **do**
    $s_1\leftarrow s_1+f(a+iH)$
  end for
  for $i=0$ to $n-1$ **do**
    $s_2\leftarrow s_2+f(a+(i+1)H/2)$
  end for
  return $I\leftarrow\frac{H}{6}\left[f(a)+f(b)+2s_1+4s_2\right]$

8. Soit x un élément de $[x_i;x_{i+1}]$. Une formule de Taylor à l'ordre 3 pour f en x s'écrit
$$f(x)=P_i(x)+R_i(x),$$

avec
$$P_i(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + (x - x_i)^2 \frac{f''(x_i)}{2} + (x - x_i)^3 \frac{f'''(x_i)}{6} \qquad \in \mathbb{P}_3$$
et le reste de Lagrange
$$R_i(x) = (x - x_i)^4 \frac{f^{IV}(\xi)}{24} \qquad \text{avec} \quad \xi \in]x_i; x_{i+1}[.$$
On peut majorer R_i sur $[x_i; x_{i+1}]$ en fonction de $H = x_{i+1} - x_i$:
$$|R_i(x)| \le \frac{H^4}{24} \max |f^{IV}(\xi)| = \frac{b-a}{n} \frac{H^3}{24} \max |f^{IV}(\xi)|.$$

9. On en déduit l'estimation d'erreur entre (2) et F suivante [2]
$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - F \right| &\le \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)\,\mathrm{d}x - F \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_i(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\le nH\,|R_i(x_{i+1})| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_i(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\le nH \frac{b-a}{n} \frac{H^3}{24} \max |f^{IV}(\xi)| + nH \frac{b-a}{n} \frac{H^3}{24} \max |f^{IV}(\xi)| \\
&= (b-a) \frac{H^4}{12} \sup |f^{IV}(\xi)|.
\end{aligned}$$

2. N.B. : le polynôme P_i n'est pas le polynôme d'interpolation en x_i, x_{i+1} et $(x_i + x_{i+1})/2$ donc $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)\,\mathrm{d}x - F \neq 0$.

Solution de l'exercice ❸

On définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par la récurrence suivante

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha f(x_n),$$

où $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ alors f est monotone décroissante. De plus, $f'(x) < -1$ sur $\mathbb{R}$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
NB : seul la condition $f'(x) < -1$ permet de conclure car une fonction peut être monotone décroissante mais avoir une limite finie ! En effet, la condition $f'(x) < -1$ garantie que la fonction décroit plus vite qu'une droite comme on peut facilement vérifier :
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{1} \le -1.$$
2. Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < 0$, pour le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = 0$. Puisque $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce ℓ est unique.
3. Considérons la fonction g définie par $g(x) = x + \alpha f(x)$ alors g est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et
$$g'(x) = 1 + \alpha f'(x) \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$
Puisque $f'(x) < -1$ et $0 < \alpha < 1$ on a
$$g'(x) < 1 - \alpha < 1 \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$
et puisque $f'(x) > -2$ et $0 < \alpha < 1$ alors
$$g'(x) > 1 - 2\alpha > -1 \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$
Autrement dit
$$|g'(x)| < 1 \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$
4. Soit $0 < \alpha < 1$. On étudie la suite
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
et on va vérifier qu'il s'agit d'une méthode de point fixe pour le calcul du zéro ℓ de f.
   4.1. On vérifie d'abord que, si la suite converge vers un point fixe de g, ce point est bien un zéro de f (ici le réciproque est vrai aussi) : soit $\ell \in \mathbb{R}$, alors
$$\ell = g(\ell) \iff \ell = \ell + \alpha f(\ell) \iff 0 = \alpha f(\ell) \iff f(\ell) = 0;$$
   4.2. vérifions maintenant que la suite converge vers un point fixe de g (et donc, grâce à ce qu'on a vu au point précédant, elle converge vers l'unique zéro de f) :
      4.2.1. on a évidemment que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
      4.2.2. on a déjà remarqué que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$;
      4.2.3. pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a prouvé que
$$|g'(x)| < 1,$$
i.e. que g est contractante.

   Alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ℓ point fixe de g et zéro de f.
5. Si $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$ alors
$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\ell)},$$
qui converge car $-2 < f'(\ell) < -1$ ssi $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et donc on rentre dans le cas de $0 < \alpha < 1$.
6. Étant donné que
$$g'(\ell) = 1 + \alpha f'(\ell)$$
   - la méthode de point fixe converge à l'ordre 2 si $\alpha f'(\ell) = -1$,

- la méthode de point fixe converge à l'ordre 1 si $-2 < \alpha f'(\ell) < 0$ mais $\alpha f'(\ell) \neq -1$,
- la méthode de point fixe ne converge pas si $\alpha f'(\ell) < -2$ ou $\alpha f'(\ell) > 0$.

Étant donné que $-2 < f'(\ell) < -1$ et que $0 < \alpha < 1$ on peut conclure que
- la méthode de point fixe converge à l'ordre 2 si $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$,
- la méthode de point fixe converge à l'ordre 1 si $\alpha \neq -\frac{1}{f'(\ell)}$.

7. D'un point de vue pratique on ne peut pas choisir $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$ pour avoir la meilleure convergence car on ne connaît pas ℓ.
8. Si on choisit d'approcher $\alpha = -\frac{1}{f'(\ell)}$ par $\alpha_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$ et on considère la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha_n f(x_n),$$
on obtient la méthode de Newton (qui est d'ordre 2).
De plus, étant donné que $-2 < f'(x) < -1$ on rentre dans le cas $0 < \alpha < 1$ donc la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $x_0 \in R$.

Solution de l'exercice ❹

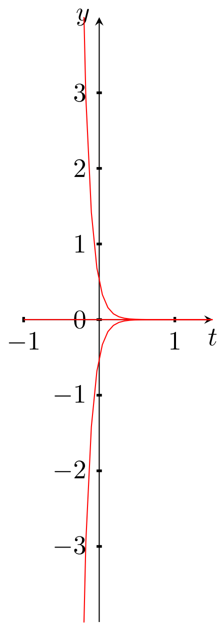
C'est un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

avec $f(t, u(t)) = g(u(t)) = -10u(t)$.

1. Comme $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, d'après Cauchy-Lipschitz, il existe $T > 0$ et une unique solution $u \in \mathscr{C}^1([-T, T], \mathbb{R})$. Par récurrence, en exploitant l'EDO et la régularité de g, on grimpe en régularité sur u et $u \in \mathscr{C}^\infty([-T, T], \mathbb{R})$. La fonctionne nulle est solution de l'équation différentielle $f(t, 0) = 0$, par l'unicité de la solution du problème de Cauchy, pour tout $t \in [-T, T]$, $u(t) > 0$ si $u_0 > 0$ et $u(t) < 0$ si $u_0 > 0$ (autrement dit, deux trajectoires ne peuvent pas se croiser). De plus, u est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$. On en déduit par le théorème des extrémités que la solution u admet un prolongement sur $\mathbb{R}$ solution de l'EDO.

   Pour en calculer la solution, on remarque qu'il s'agit d'une EDO à variables séparables. L'unique solution constante est $u(t) \equiv 0$, toutes les autres solutions sont du type $u(t) = Ce^{-10t}$. En prenant en compte la condition initiale on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy est $u(t) = u_0 e^{-10t}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.



2. Soit le schéma numérique de Cranck-Nicholson défini par la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + 5(u_{n+1} + u_n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

   pour $\Delta t > 0$ fixé. On obtient une formule de récurrence rendue explicite par un calcul élémentaire :

$$u_{n+1} = -5\Delta t u_{n+1} - 5\Delta t u_n + u_n$$

   d'où

$$u_{n+1} = \frac{1 - 5\Delta t}{1 + 5\Delta t} u_n.$$

   Il s'agit d'une suite géométrique de raison

$$r = \frac{1 - 5\Delta t}{1 + 5\Delta t}.$$

3. Pour tout $\Delta t > 0$ on a

$$r = \frac{1 - 5\Delta t}{1 + 5\Delta t} = 1 - \frac{10\Delta t}{1 + 5\Delta t}$$

   et

$$-1 < 1 - \frac{10\Delta t}{1 + 5\Delta t} < 1.$$

   Ce schéma est donc inconditionnellement A-stable car $|u_{n+1}| = |r^{n+1} u_0| \le |u_0|$.

4. Le schéma génère une suite positive ssi
$$1-\frac{10\Delta t}{1+5\Delta t}>0$$
i.e. ssi
$$\Delta t<\frac{1}{5}.$$

5. Par récurrence on obtient
$$u_n=\left(\frac{1-5\Delta t}{1+5\Delta t}\right)^n u_0.$$

6. Soit $T>0$ fixé et considérons $n^*=n^*(\Delta t)$ tel que $T-\Delta t<n^*\Delta t\le T$. En se rappelant que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{\alpha x}=1$$
et en observant que
$$\begin{array}{ccccc}
\left(\frac{1-5\Delta t}{1+5\Delta t}\right)^{\frac{T}{\Delta t}-1} & \le & \left(\frac{1-5\Delta t}{1+5\Delta t}\right)^{n^*} & \le & \left(\frac{1-5\Delta t}{1+5\Delta t}\right)^{\frac{T}{\Delta t}}\\
\| & & & & \|\\
e^{(T-\Delta t)\frac{\ln(1-5\Delta t)-\ln(1+5\Delta t)}{\Delta t}} & & & & e^{T\frac{\ln(1-5\Delta t)-\ln(1+5\Delta t)}{\Delta t}}\\
\| & & & & \|\\
e^{(T-\Delta t)\frac{-5\ln(1-5\Delta t)-5\ln(1+5\Delta t)}{5\Delta t}} & & & & e^{T\frac{-5\ln(1-5\Delta t)-5\ln(1+5\Delta t)}{5\Delta t}}\\
\downarrow & & & & \downarrow\\
e^{-10T} & & & & e^{-10T}
\end{array}$$
on conclut que
$$\lim_{\Delta t\to 0}u_{n^*}=u_0\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1-5\Delta t}{1+5\Delta t}\right)^{n^*}=u_0e^{-10T}.$$

7. La suite définissant le schéma d'Euler explicite pour l'EDO assignée s'écrit
$$\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t}=f(t_n,u_n)$$
i.e.
$$v_{n+1}=v_n-10\Delta t v_n=(1-10\Delta t)v_n=(1-10\Delta t)^{n+1}v_0.$$
Il s'agit à nouveau d'une suite géométrique de raison
$$r_e=1-10\Delta t$$
qui converge ssi $|r_e|<1$, *i.e.* ssi $\Delta t<0{,}2$ (le schéma d'Euler pour cette EDO est conditionnellement stable). Soit $T>0$ fixé et considérons $n^*=n^*(\Delta t)$ tel que $T-\Delta t<n^*\Delta t\le T$. Alors
$$\begin{array}{ccccc}
(1-10\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}-1} & \le & (1-10\Delta t)^{n^*} & \le & (1-10\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}}\\
\| & & & & \|\\
e^{(T-\Delta t)\frac{\ln(1-10\Delta t)}{\Delta t}} & & & & e^{T\frac{\ln(1-10\Delta t)}{\Delta t}}\\
\| & & & & \|\\
e^{-10(T-\Delta t)\frac{\ln(1-10\Delta t)}{-10\Delta t}} & & & & e^{-10T\frac{\ln(1-10\Delta t)}{-10\Delta t}}\\
\downarrow & & & & \downarrow\\
e^{-10T} & & & & e^{-10T}
\end{array}$$
d'où
$$\lim_{\Delta t\to 0}v_{n^*}=u_0\lim_{\Delta t\to 0}(1-10\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}}=u_0e^{-10T}.$$
De plus, on sait (cf. cours) que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 tandis que la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge à l'ordre 1.

Rattrapage d'Analyse Numérique

(Durée : 2 heures)
(Tout document interdit, calculatrice autorisée)
Le barême excédant très largement 20, il est inutile de chercher à tout faire.

Exercice ❶ [11,5 pt]

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}.$$

1. [2 pt] Faire l'étude complète de la fonction g. (On admettra que $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ admet comme unique solution $m \approx 1{,}36$ et que $g(m) = m$.)
2. [1,5 pt] Comparer g à l'identité.
3. [2 pt] Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad x_0 > 0.$$

   À l'aide des graphe de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
4. [1,5 pt] Expliciter (sans la vérifier) la condition nécessaire pour la convergence observée graphiquement.
5. [2 pt] Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer le point fixe à une précision de ε.
6. [1,5 pt] Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Que remarque-t-on ?
7. [1 pt] Donner l'ordre de convergence de la suite.

Exercice ❷ [3 pt]

L'espérance de vie dans un pays a évoluée dans le temps selon le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990
Espérance	72,8	74,2	75,2	76,4

Utiliser l'interpolation de Lagrange pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.

Exercice ❸ [8,5 pt]

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature à n points pour approcher

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

On propose dans un premier temps (question 1 à 2) de construire la formule de quadrature à deux points :

$$\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{4}{3}g(-\frac{w}{2}) + \frac{2}{3}g(w), \tag{7}$$

où $0 < w \leq 1$ est à déterminer.

1. [1,5 pt] Montrer que cette méthode est toujours exacte pour toute fonction g polynomiale de degré 1.

2. [2 pt] Déterminer w pour que la formule de quadrature (7) soit exacte pour toute fonction g polynomiale de degré $m > 1$ et donner la plus grande valeur de m.
3. [2 pt] À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale suivante :
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. [1,5 pt] En déduire une formule de quadrature à $2n$ points, notée F, pour le calcul approché de (6). Cette formule de quadrature est-elle stable ?
5. [1,5 pt] Écrire l'algorithme du calcul de F.

Exercice ❹ [7 pt]

Un modèle pour la diffusion d'une épidémie se base sur l'hypothèse que sa vitesse de propagation est proportionnelle au nombre d'individus infectés et au nombre d'individus sains.

Si on note $I(t) \geq 0$ le nombre d'individus infectés à l'instant $t \geq 0$ et $A > 0$ le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}^+$ telle que $I'(t) = kI(t)(A - I(t))$.

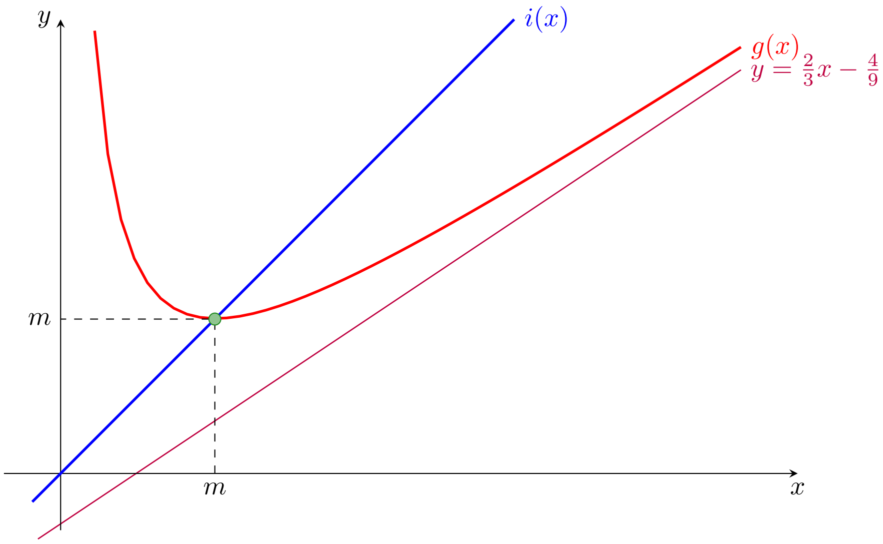
1. [2 pt] Montrer qu'il existe $T > 0$ et une unique solution $I \in \mathscr{C}^\infty([0,T])$ au problème de Cauchy :
$$\begin{cases} I'(t) = kI(t)(A - I(t)), \\ I(0) = I_0 > 0. \end{cases}$$
2. [1,5 pt] Montrer que si $0 < I_0 < A$ alors $0 < I(t) < A$ pour tout $t > 0$.
3. [1 pt] Montrer que si $0 < I_0 < A$ alors $I(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. [2,5 pt] Soit $0 < I_0 < A$. On considère le schéma semi-implicite
$$\frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta t} = kI_n(A - I_{n+1}).$$
Montrer que ce schéma est inconditionnellement A-stable.

Solution de l'exercice ❶

1. Étude de la fonction $g\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x^3+4x^2+10}{3x^2+8x}$:
   - ⋆ $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$;
   - ⋆ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
     $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - \frac{2}{3}x = -\frac{4}{9}$ donc $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}$ est un asymptote ;
   - ⋆ $g'(x) = \frac{2(3x+4)(x^3+4x^2-10)}{x^2(3x+8)^2}$;
   - ⋆ g est croissante sur $[m, +\infty[$, décroissante sur $[0, m]$ où $m \approx 1{,}36$;
   - ⋆ $x = m$ est un minimum absolu et $g(m) = m$.

x	0		m		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

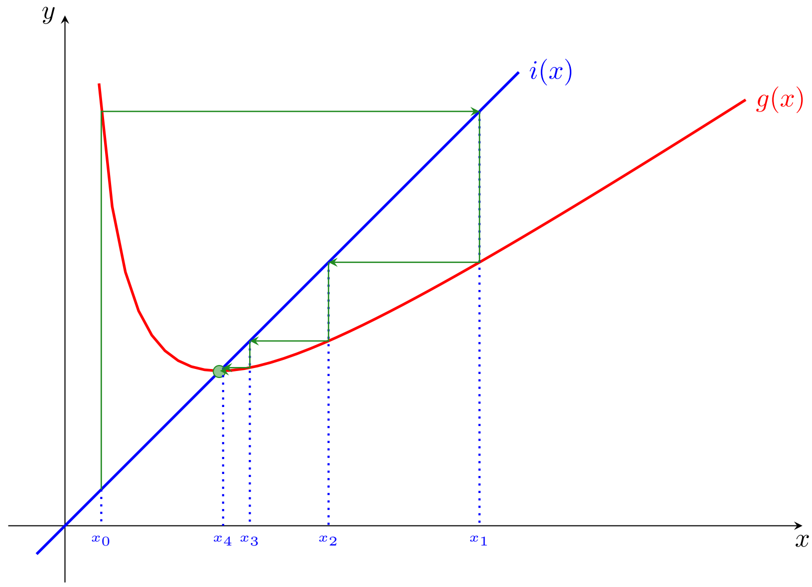
2. Le graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$ est le suivant



On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$:

$$g(x) = x \iff \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x} = x \iff x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \iff x = m \iff f(x) = 0.$$

3. Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe :



4. On en déduit que pour tout $x > 0$ on a $g(x) \geq m$. Donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geq m$. Pour étudier la convergence de la méthode on procède alors par deux étapes :
   4.1. on vérifie d'abord la CN pour tout $\alpha \in [m, +\infty[$:
   $$\alpha = g(\alpha) \iff \alpha = m;$$
   4.2. vérifions maintenant les CS :
      4.2.1. pour tout x dans $[m, +\infty[$ on a
      $$g(x) > m$$
      donc $g\colon [m, +\infty[\to [m, +\infty[$;
      4.2.2. $g \in \mathscr{C}^1([m, +\infty[)$;
      4.2.3. pour tout x dans $[m, +\infty[$, si
      $$|g'(x)| = \left| \frac{(6x^2 + 8x) - g(x)(6x + 8)}{3x^2 + 8x} \right| < 1$$
      alors g est contractante.

   Si les conditions précédentes sont vérifiées alors la méthode converge vers m point fixe de g (et racine de f).
5. Algorithme de point fixe :

Algorithm 3 Calcul de $x = g(x)$

Require: $x_0 > 0$
Require: $g\colon x \mapsto g(x)$
  while $|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon$ **do**
    $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  end while

6. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 + 4x_k^2 - 10}{3x_k^2 + 8x_k} = g(x_k)$$
   autrement dit la méthode de point fixe assignée est la méthode de Newton.
7. Étant donné que la méthode de point fixe donnée est la méthode de Newton et que la racine m de f est simple, elle converge à l'ordre 2.

Quelques remarques à propos du critère d'arrêt basé sur le contrôle de l'incrément. Les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$; on se demande si cela garantît-t-il que l'erreur absolue e_{k+1} est elle aussi inférieur à ε. L'erreur absolue à l'itération $(k+1)$ peut être évaluée par un développement de Taylor au premier ordre

$$\mathrm{e}_{k+1} = |g(\alpha) - g(x_k)| = |g'(z_k)\mathrm{e}_k|$$

avec z_k compris entre m et x_k. Donc

$$|x_{k+1} - x_k| = |\mathrm{e}_{k+1} - \mathrm{e}_k| = |g'(z_k) - 1|\mathrm{e}_k \simeq |g'(m) - 1|\mathrm{e}_k.$$

Puisque $g'(x) = 2\frac{3x+4}{x^2(3x+8)^2}f(x)$, alors $g'(m) = 0$ donc on a bien $|x_{k+1} - x_k| \simeq \mathrm{e}_k$.

Solution de l'exercice ❷

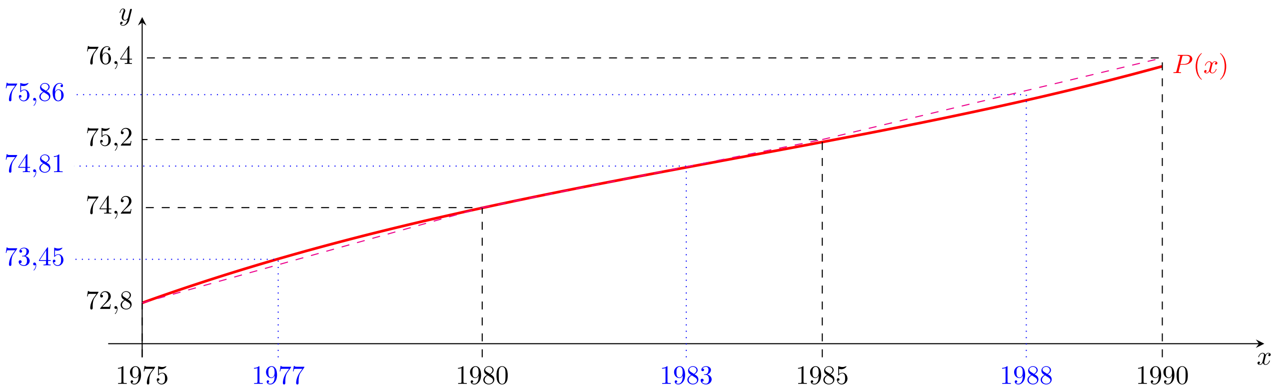
Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right).$$

Ici $n=3$ et si on choisit de poser $x_0=0$ pour l'année 1975, $x_1=5$ pour l'année 1980 etc., on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
&\quad + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =\\
&= 72{,}8\frac{(x-5)(x-10)(x-15)}{(0-5)(0-10)(0-15)} + 74{,}2\frac{(x-0)(x-10)(x-15)}{(5-0)(5-10)(5-15)}\\
&\quad + 75{,}2\frac{(x-0)(x-5)(x-15)}{(10-0)(10-5)(10-15)} + 76{,}4\frac{(x-0)(x-5)(x-10)}{(15-0)(15-5)(15-10)} =\\
&= \frac{-72{,}8(x-5)(x-10)(x-15) + 3\times 74{,}2x(x-10)(x-15) - 3\times 75{,}2x(x-5)(x-15) + 76{,}4x(x-5)(x-10)}{750}
\end{aligned}$$

On a alors que
- l'espérance de vie en 1977 correspond à $P(2)=73{,}45$,
- l'espérance de vie en 1983 correspond à $P(8)=74{,}81$,
- l'espérance de vie en 1988 correspond à $P(13)=75{,}86$.



Remarque : il est intéressant de considérer une interpolation linéaire par morceaux (splines de degré 1) ; on note que l'espérance de vie est sous-estimé en 1977 et sur-estimé en 1988 par rapport à l'interpolation précédente car
- l'espérance de vie en 1977 correspond à $\frac{74{,}2-72{,}8}{5-0}2+72{,}8 = 73{,}36 < P(2)$,
- l'espérance de vie en 1983 correspond à $\frac{75{,}2-74{,}2}{10-5}8+73{,}2 = 74{,}8 \sim P(8)$,
- l'espérance de vie en 1988 correspond à $\frac{76{,}4-74{,}2}{15-10}13+72{,}8 = 75{,}92 > P(13)$.

Solution de l'exercice ❸

1. Soit $g(x) = c + dx$ alors on a

$$\begin{array}{ccc}
\int\limits_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & \frac{2}{3}g(w) + \frac{4}{3}g(-\frac{w}{2}) \\
\| & & \| \\
\left[cx + d\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} & & (\frac{2}{3}+\frac{4}{3})c + (\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{2})dw \\
\| & & \| \\
2c & & 2c
\end{array}$$

donc la méthode est exacte pour tout polynôme de degré au moins 1.

2. Soit $g(x) = c + dx + ex^2$ alors on a

$$\begin{array}{ccc}
\int\limits_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & \frac{2}{3}g(w) + \frac{4}{3}g(-\frac{w}{2}) \\
\| & & \| \\
\left[cx + d\frac{x^2}{2} + e\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} & & (\frac{2}{3}+\frac{4}{3})c + (\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{2})dw + (\frac{2}{3}+\frac{1}{3})ew^2 \\
\| & & \| \\
2c + \frac{2}{3}e & & 2c + ew^2
\end{array}$$

Pour que la méthode soit exacte pour tout polynôme de degré au moins 2 il faut choisir w tel que

$$\frac{2}{3} = w^2.$$

On obtient les deux solutions

$$w = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad w = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

L'hypothèse $0 < w \le 1$ impose alors le choix

$$w = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Soit maintenant $g(x) = c + dx + ex^2 + fx^3$. On a

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \left[cx + d\frac{x^2}{2} + e\frac{x^3}{3} + f\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 2c + \frac{2}{3}e$$

et, si $w^2 = \frac{2}{3}$, alors

$$\frac{2}{3}\left[g(w) + 2g(-w/2)\right] = 2c + \frac{2}{3}e + \frac{1}{2}f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3$$

donc la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré 2 mais n'est pas exacte pour les polynômes de degré 3.

3. Par le changement de variable $y = x_i + (x+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$ on déduit la formule de quadrature

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_i + (x+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&\approx \frac{x_{i+1}-x_i}{3}\left[f\left(x_i + (1+\sqrt{\frac{2}{3}})\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) + 2f\left(x_i + (1-\sqrt{\frac{1}{6}})\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

4. Si $H = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ (*i.e.* si on considère une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ équirépartie) alors on trouve la formule de quadrature composite (*i.e.* sur n sous-intervalles et à $2n$ points)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{H}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i + H\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) + 2f\left(x_i + H\left(1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{H}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(a + H\left(i+1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) + 2f\left(a + H\left(i+1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\right)\right].$$

Cette formule de quadrature est stable puisque tous les coefficients sont positifs.

5. [1 pt] Algorithme du calcul de F :

Algorithm 4 Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Require: f
Require: a
Require: $b > a$
Require: $n > 0$
  $H \leftarrow \frac{b-a}{n}$
  $\alpha_1 \leftarrow a + H\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
  $\alpha_2 \leftarrow a + H\left(1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$
  for $i = 0$ to $n-1$ **do**
    $s \leftarrow s + f(\alpha_1 + iH) + 2f(\alpha_2 + iH)$
  end for
  return $I \leftarrow \frac{H}{3}s$

Solution de l'exercice ❹

C'est un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} I'(t) = f(t, I(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ I(0) = I_0 > 0, \end{cases} \tag{8}$$

avec $f(t, I(t)) = g(I(t)) = kI(t)(A - I(t))$.

1. Comme $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, d'après Cauchy-Lipschitz, il existe $T > 0$ et une unique $I \in \mathscr{C}^1([0,T], \mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy. Par récurrence, en exploitant l'EDO et la régularité de g, on grimpe en régularité sur I et $I \in \mathscr{C}^\infty([0,T], \mathbb{R})$.
2. Puisque la fonction nulle et la fonction constante $I(t) = A$ sont solutions de l'équation différentielle, si $0 < I_0 < A$ alors $0 < I(t) < A$ pour tout $t \in [0, T]$ (car, par l'unicité de la solution du problème de Cauchy, deux trajectoires ne peuvent pas se croiser).
3. Puisque $I'(t) = kI(t)(A - I(t))$, si $0 < I_0 < A$ alors I est croissante pour tout $t \in [0, T]$. On en déduit par le théorème des extrémités que la solution I admet un prolongement sur $\mathbb{R}^+$ solution de l'EDO et que I est croissante pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
4. Soit $0 < I_0 < A$. On considère le schéma semi-implicite
$$\frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta t} = kI_n(A - I_{n+1})$$
pour $\Delta t > 0$ fixé. On obtient une formule de récurrence rendue explicite par un calcul élémentaire :
$$I_{n+1} = \frac{1 + kA\Delta t}{1 + kI_n\Delta t} I_n.$$
Si $0 < I_0 < A$ alors
– $I_n > 0$ quelque soit n ;
– I_n est majorée par A car
$$I_{n+1} \le A \quad \iff \quad (1 + kA\Delta t)I_n \le (1 + kI_n\Delta t)A \quad \iff \quad I_n \le A$$
donc par récurrence $I_{n+1} \le A$ quelque soit n ;
– I_n est une suite monotone croissante (encore par récurrence on montre que $|I_{n+1}| \ge |I_n| \ge \dots \ge |I_0|$) ;
donc ce schéma est inconditionnellement A-stable.

Calcul analytique de toutes les solutions :
On a déjà observé qu'il y a deux solutions constantes de l'EDO : la fonction $I(t) \equiv 0$ et la fonction $I(t) \equiv A$.
Pour chercher toutes les solutions non constantes on remarque qu'il s'agit d'une EDO à variables séparables donc on a

$$I(t) = \frac{A}{De^{-Akt} + 1}$$

La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$D = \frac{A - I_0}{I_0}$$

Exemple avec $A = 5000$, $I_0 = 160$, $k = \frac{\ln(363/38)}{35000}$ et $\Delta t = 1$: