الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Technologie

جامعة الجلفة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم علوم التكنولوجيا

Examen Math1- Février 2016. Durée : 90 Minutes

Exercice 01 (05pts) :

1. *On considère les ensembles :* نعتبر المجموعات التالية :

$$A = \{a; b; c; d\}, \quad B = \{e; d; c; f\} \quad et \quad C = \{b; c; f; g\}$$

Déterminer $A\Delta(B \cup C)$ *puis* $(A\Delta B) \cup (A\Delta C)$ اوجد :

2. *même question avec les ensembles :* نفس السوال مع المجموعات :

$$A = \{a; b; c; d\}, \quad B = \{e; b; d; c; f\} \quad et \quad C = \{b; c; d; f; g\}$$

3. *Soient* X, Y, Z *trois ensembles. Démontrer la proposition suivante :*
لتكن X, Y, Z ثلاث مجموعات. برهن الفرضية التالية :

$$X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$$

Exercice 02 (04pts) :

Soit R *une relation binaire sur un ensemble* E *à la fois réflexive et transitive.*

لتكن R علاقة ثنائية في المجموعة E انعكاسية ومتعدية في نفس الوقت

On définit les nouvelles relations S *et* T *par :* نعرف العلاقات الجديدة S و T ب :

$$x\ S\ y \Leftrightarrow (x\ R\ y\ \ et\ \ y\ R\ x)\ et\ \ x\ T\ y \Leftrightarrow (x\ R\ y\ \ ou\ \ y\ R\ x)$$

Les relations S *et* T *sont-elles des relations d'équivalences ?* هل العلاقات S و T علاقات تكافؤ.

Exercice 03 (07pts) :

1. *Calculer la dérivée* n^{ieme} *de la fonction :* احسب المشتق النوني للدالة :

$$xe^{2x}$$

2. *Montrer que la dérivée* n^{ieme} *de la fonction :* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ برهن ان المشتق النوني للدالة :

S'écrit $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in]-1, 1[$ يكتب من الشكل :

Avec $P_n(x)$ *est un polynôme de degré n* بحيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n

Exercice 04 (04pts) : *étudier la fonction (domaine de définition, limites, sens de variation...)*

$$f(x) = arctg(2x + 1) - x$$

ادرس الدالة (مجموعة التعريف، النهايات، اتجاه التغير...)

Bon Courage

Corrigé type de L'examen Math I :

exercice 01 :

1. $B \cup C = \{b; c; d; e; f; g\}$ (0,5)

donc : $A \Delta (B \cup C) = \{a; e; f; g\}$ (0,5)

(0,25) $A \Delta B = \{a; b; e; f\}$

(0,25) $A \Delta C = \{a; d; f; g\}$ (0,5)

$\Rightarrow (A \Delta B) \cup (A \Delta C) = \{a; b; d; e; f; g\}$

2. $B \cup C = \{b; c; d; e; f; g\}$ donc $A \Delta (B \cup C) = \{a; e; f; g\}$

(0,25) $A \Delta B = \{a; e; f\}$ (0,5) (0,5)

(0,25) $A \Delta C = \{a; f; g\}$

$\Rightarrow (A \Delta B) \cup (A \Delta C) = \{a; e; f; g\}$ (0,5)

③ $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$?

- $X \cap (Y - Z) = X \cap (Y \cap \overline{Z})$ (0,25)

$= X \cap Y \cap \overline{Z}$ … ① (0,25)

- $(X \cap Y) - (X \cap Z) = (X \cap Y) \cap \overline{(X \cap Z)}$ (0,25)

$= (X \cap Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Z})$ (0,25)

$= \underbrace{[(X \cap Y) \cap \overline{X}]}_{\emptyset} \cup [(X \cap Y) \cap \overline{Z}]$ (0,25)

$= X \cap Y \cap \overline{Z}$ … ② (0,25)

① = ② $\Rightarrow X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$

exercice 02 :

relation d'equivalence $\Rightarrow$ $\begin{cases} \cdot \text{ reflexive} \\ \cdot \text{ symétrique} \\ \cdot \text{ transitive} \end{cases}$

1. S, T relations d'équivalence ?

- $\mathcal{R}$ reflexive $\Rightarrow x \mathcal{R} x$

$\Rightarrow x S x$ et $x T x$

$\Rightarrow S, T$ reflexives ✓ 01

- symétrie ?

$x S y \Leftrightarrow (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Leftrightarrow ((y \mathcal{R} x) \text{ et } (x \mathcal{R} y))$

$\Leftrightarrow y S x$ ✓ 01

$x T y \Leftrightarrow (x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x) \Leftrightarrow ((y \mathcal{R} x) \text{ ou } (x \mathcal{R} y))$

$\Leftrightarrow y T x$ ✓

- transitivité ?

- supposons $x S y$ et $y S z$

$\Rightarrow x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

01 $\Rightarrow x \mathcal{R} z$ (S transitive)

- Le raisonnement n'est plus valable avec T.

$\Rightarrow \begin{cases} S \text{ relation d'equivalence} \\ T \text{ n'est pas une relation d'equi} \end{cases}$ 01

ص

ex03

1. $(x e^{2x})^{(n)} = ?$

$$(x e^{2x})^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^0 \cdot (e^{2x})^{(n-p)} \cdot (x)^{(p)}$$

$f(x) = e^{2x}$ $g(x) = x$

$f' = 2 \cdot e^{2x}$ $g' = 1$

1 $f'' = 4 e^{2x}$ $g'' = 0$ 1

$f''' = 8 e^{2x}$ $\vdots$

$\vdots$

$f^{(n)} = 2^n e^{2x}$

1 $\Rightarrow (x e^{2x})^{(n)} = C_n^0 (e^{2x})^{(n)} \cdot (x) + C_n^1 (e^{2x})^{(n-1)}$

$\cdot (x)' + C_n^2 (e^{2x})^{(n-2)} \cdot (x)''$

$x e^{2x} = 2^n x e^{2x} + 2^{n-1} e^{2x}.$ 0,5

2. $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}$?

. initilisation: $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-1/2}\right)'$ 0,5

$= -\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{x}{(1-x^2)^{1/2+1}} = \frac{P_1(x)}{(1-x^2)^{1+1/2}}$ 0,5

P(1) verifier ✓

ص

03

· Heridité :

Supposons $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}$

Montrons : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+1/2}}$? 0,5

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'$

0,5 $= \dfrac{P_{n-1}(x)\cdot(1-x^2)^{n+1/2} - (n+1/2)(-2x)(1-x^2)^{n+1/2-1}\cdot P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}\cdot(1-x^2)^{n+1/2}}$

01 $= \dfrac{\cancel{(1-x^2)^{n-1/2}}\left[P_{n-1}(x)\cdot(1-x^2) - (n+1/2)(-2x)\,P_n(x)\right]}{\cancel{(1-x^2)^{n-1/2}}\,(1-x^2)\,(1-x^2)^{n+1/2}}$

On a : $P_{n-1}(x)\cdot x^2 = P_{n+1}(x)$ 0,5

$P_n(x)\cdot x = P_{n+1}(x)$

Finalement :

$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+1/2}}$

0,5

$\Rightarrow$ $P(n)$ verifier $\forall n \in \mathbb{N}$

04

exo4

Variation de $f(x) = \operatorname{arctg}(2x+1) - x$

1. $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ 0,5

2. Limites :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - (+\infty) = -\infty$$ 0,5

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - (-\infty) = +\infty$$ 0,5

3. derivée :

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x+1)^2} - 1$$

$$= \frac{-4x(x+1)}{1+(2x+1)^2}$$ 01

4. tableau de variation: 1,5

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$-\frac{\pi}{4}+1$	↗	$\frac{\pi}{4}$	↘	$-\infty$