TRAVAUX DIRIGES 3

« Produit de convolution et corrélation »

Exercice 1:

- Démontrer les propriétés suivantes :

1) $x(t) * \delta(t) = x(t)$
2) $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
3) $x(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

Exercice 2:

Soit les deux signaux rectangulaire $x(t)$ et $h(t)$ telle que:

$$\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{t}) = \mathbf{Rect}\left(\frac{\mathbf{t-2}}{\mathbf{4}}\right) \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{t}) = \mathbf{Rect}\left(\frac{\mathbf{t-1}}{\mathbf{2}}\right)$$

1. Représenter les deux signaux.
2. Déterminer le produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$.
3. Représenter le signal $y(t)$.

Exercice 3:

Soit les deux signaux $x(t)$ et $h(t)$:

$$\boldsymbol{x(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{t}} & \boldsymbol{si\ \ t \le 0} \\ \boldsymbol{e^{-t}} & \boldsymbol{si\ \ t \ge 0} \end{cases} \;,\; \boldsymbol{h(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si\ \ 0 \le t \le 1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{si\ non} \end{cases}$$

1. Représenter les deux signaux.
2. Déterminer le produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$.
3. Représenter le signal $y(t)$.
4. Calculer la transformée de Fourier de $y(t)$.

Exercice 4:

Soit un signal défini par :

$$\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{T}}\mathbf{t}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{t}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{t} - \mathbf{T})]$$

1. Représenter ce signal.
2. Calculer sa fonction d'auto-corrélation.
3. Déterminer son énergie à partir de sa fonction d'auto-corrélation.

Corrigé de la Série de TD N° (03)

Ex (01) :

① → $x(t) * \delta(t) = x(t)$?

on a :

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau$$ [Le produit de convolution est commutatif]

d'autre part :

$$x(t-\tau)\,\delta(\tau) = x(t)\,\delta(\tau)$$

dos : $$x(t) * \delta(t) = x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,d\tau}_{''1''}$$

1

$$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

② → $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) = ?$

on a :

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau$$

$$= x(t-t_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,d\tau}_{''1''}$$

$$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t-t_0)}$$

③ → $x(t) * \mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$?

on a:

$$x(t) * \mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \mathcal{E}(t-\tau)\, d\tau$$

d'autre part:

$$x(\tau)\, \mathcal{E}(t-\tau) = \begin{cases} x(\tau) & \text{si } \tau < t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

donc:

$$\boxed{x(t) * \mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau}$$

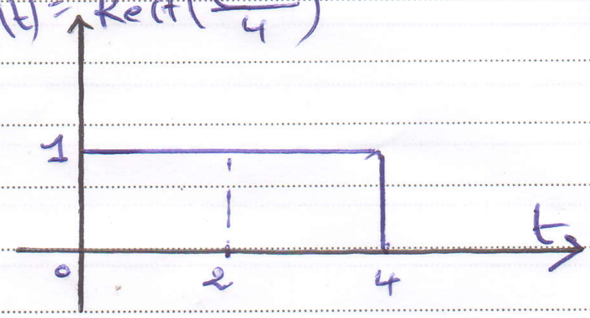
Ex (02):

2

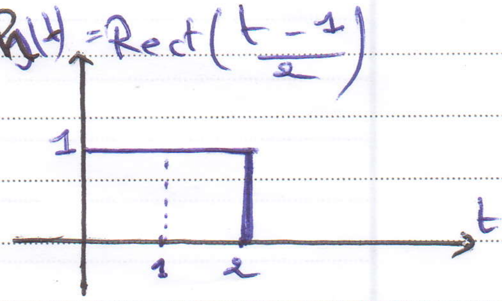
1) → $x(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$; Rectangle d'amplitude "A = 1" centré sur "2" de largeur "4"

$h(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$; Rectangle d'amplitude "A = 1" centré sur "1" de largeur "2"

$x(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$



$h(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$



2) → Le produit de Convolution: $y(t) = x(t) * h(t)$

on a:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

d'autre part:

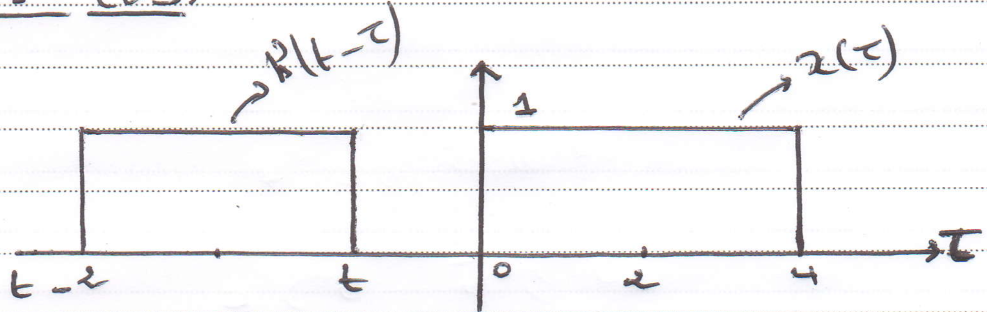
$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \tau \leq 4 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t-\tau \leq 2 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } t-2 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

* **Multiplier $h(t-\tau) \cdot x(\tau)$:**

→ **1ᵉʳ cas :**

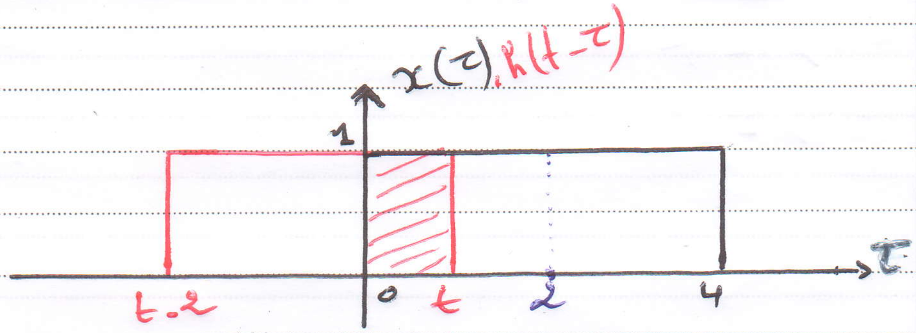


pour $\boxed{t<0}$ → $y(t) = x(t) * h(t) = 0$

3

→ **2ᵉ cas :** $t \geq 0$ et $t-2 \leq 0$ ⇒ $\boxed{0 \leq t \leq 2}$

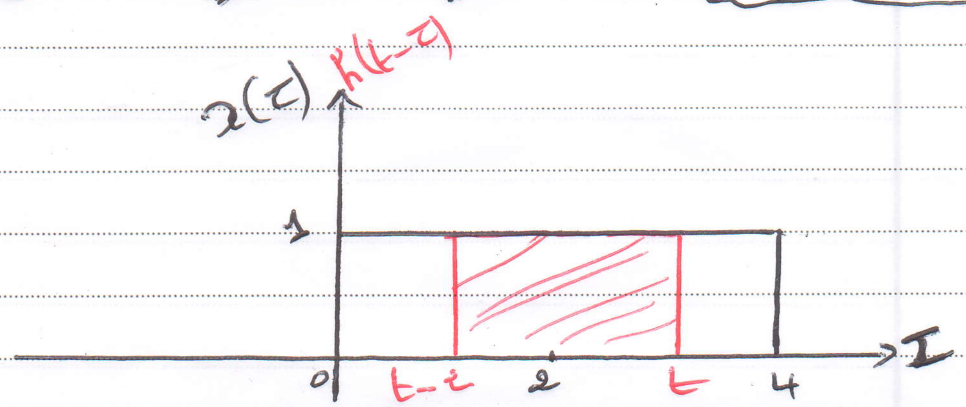
alors :



donc

$$y(t) = \int_0^t d\tau = t \Rightarrow \boxed{y(t) = t} \text{ pour } 0 \leq t \leq 2$$

→ **3ᵉ cas :** $t-2 \geq 0$ et $t \leq 4$ ⇒ $\boxed{2 \leq t \leq 4}$



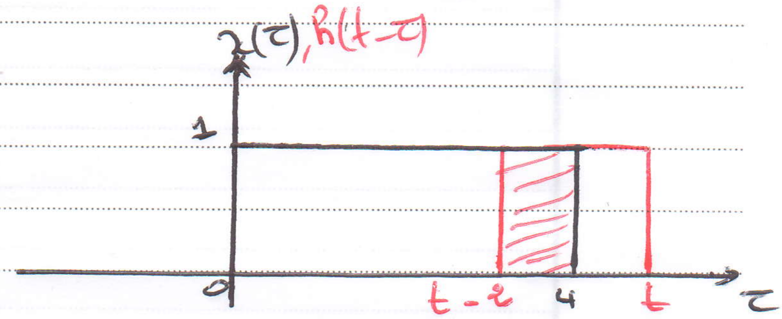
donc:

$$y(t) = \int_{t-2}^{t} d\tau = \left[t\right]_{t-2}^{t} = t-(t-2) = 2$$

$\boxed{y(t) = 2}$ pour $2 \leq t \leq 4$

→ 4ème cas: $t-2 < 4$ et $t > 4 \Rightarrow \boxed{4 \leq t \leq 6}$

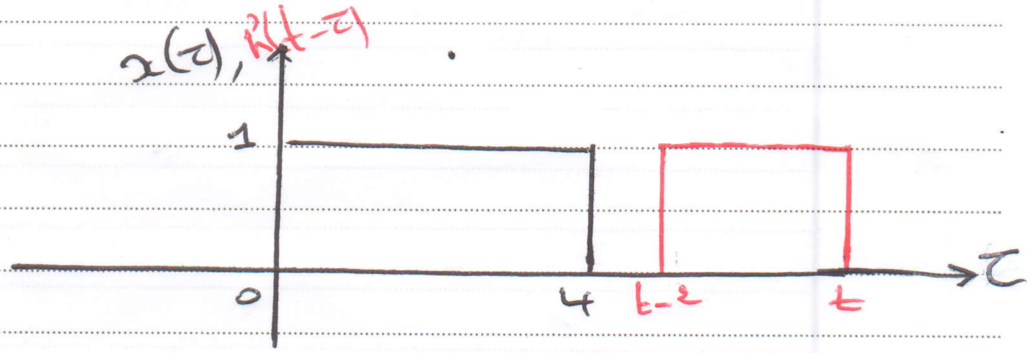
alors: $y(t) = \int_{t-2}^{4} dt$



$$\Rightarrow y(t) = \left[t\right]_{t-2}^{4} = 6-t$$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = 6-t}$ pour $4 \leq t \leq 6$

(4) 5ème cas: $t-2 > 4 \Rightarrow \boxed{t > 6}$

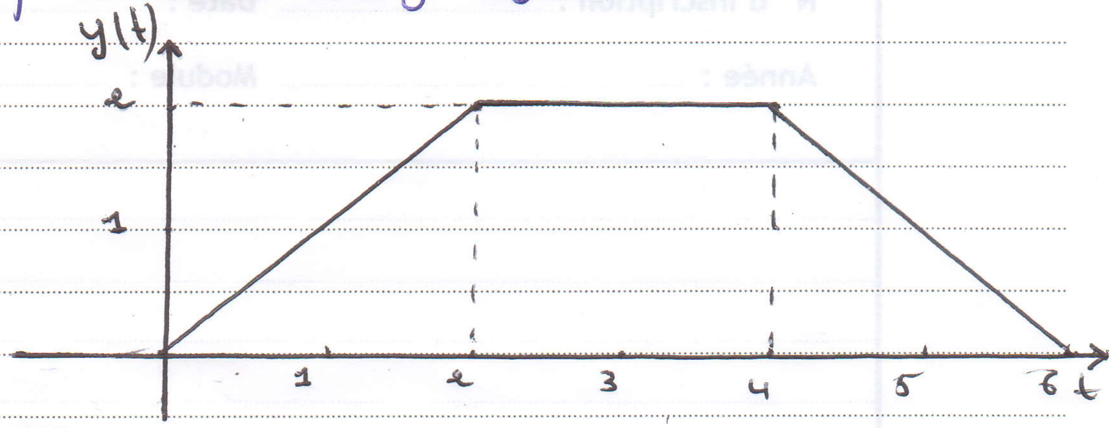


$\boxed{y(t) = 0}$ pour $t > 6$

on peut écrire:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq t \leq 4 \\ 6-t & \text{si } 4 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

3) → Représentation du signal $y(t)$:



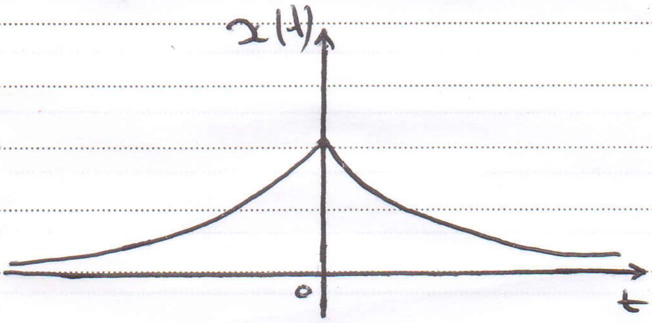
Ex(03) :

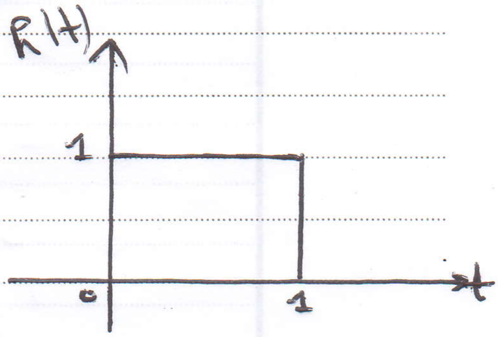
$$x(t) = \begin{cases} e^{t} & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases} = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right)$$

5

① → Représentation des deux signaux :



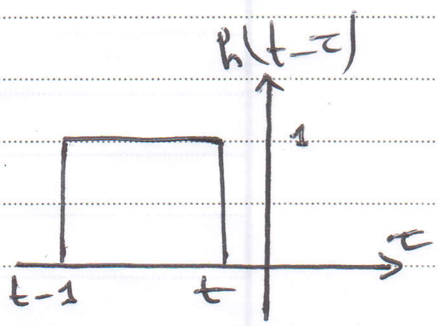


② → Le produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$:

on a :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

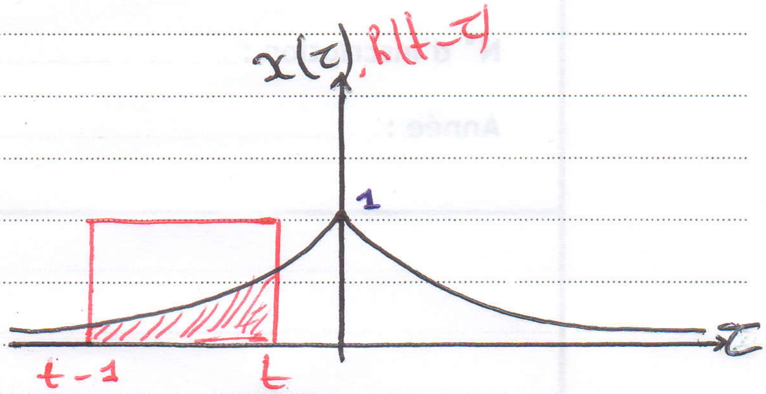
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



d'autre part :

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t-\tau \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t-1 \leq \tau \leq t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

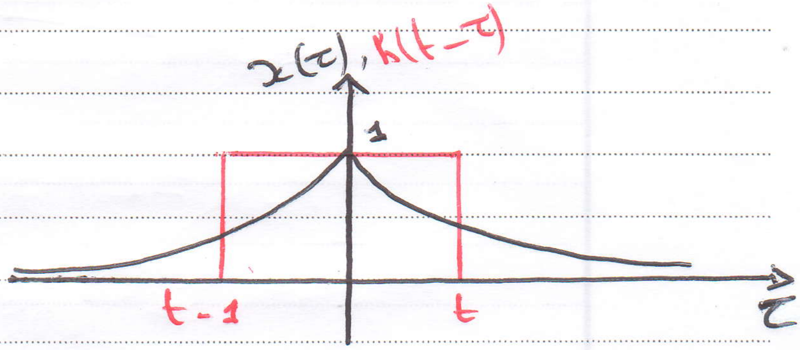
→ 1er cas : $\boxed{t < 0}$



$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{\tau}\, d\tau$$

$$= \left[e^{\tau}\right]_{t-1}^{t} \Rightarrow \boxed{y(t) = e^{t} - e^{t-1}} \text{ pour } t < 0$$

→ 2ème cas : $t - 1 < 0$ et $t > 0 \Rightarrow \boxed{0 < t < 1}$



6

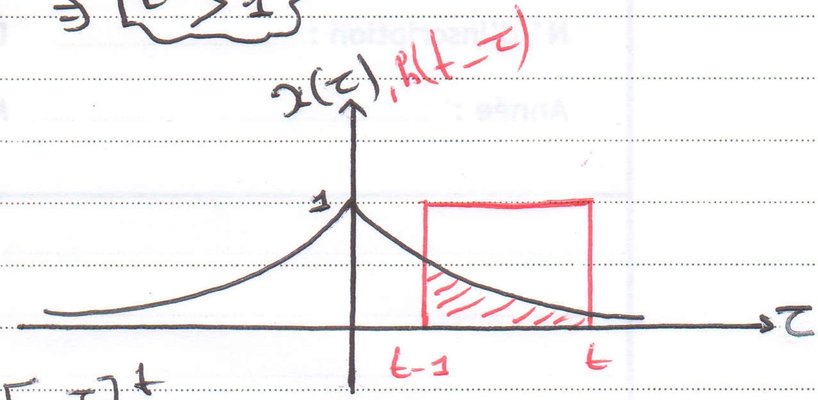
$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t-1}^{0} e^{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau}\, d\tau = \left[e^{\tau}\right]_{t-1}^{0} - \left[e^{-\tau}\right]_{0}^{t}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 - e^{t-1} - e^{-t} + 1 = 2 - e^{-t} - e^{t-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2 - e^{-t} - e^{t-1}} \text{ pour } 0 \leq t \leq 1$$

→ 3ème cas : $t-1>0 \Rightarrow \boxed{t>1}$



$$y(t)=\int_{t-1}^{t} e^{-\tau}\,d\tau=\left[-e^{-\tau}\right]_{t-1}^{t}$$

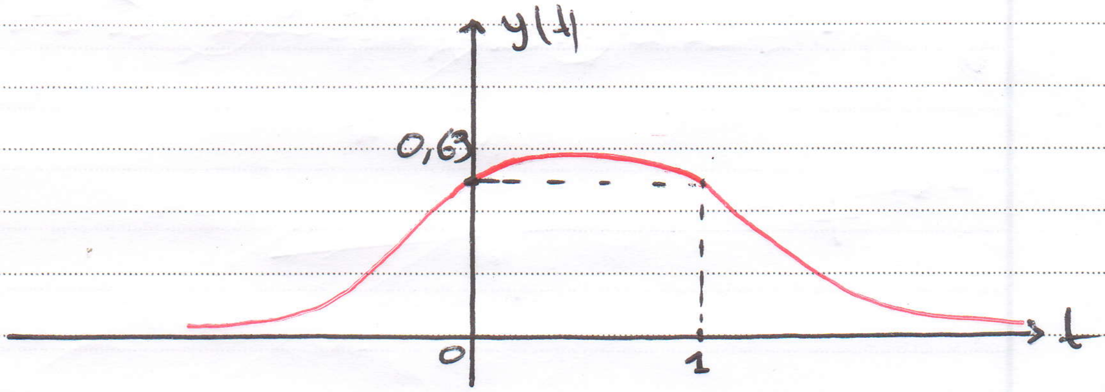
$$\Rightarrow \boxed{y(t)=e^{-t+1}-e^{-t}} \quad \text{pour } t>1$$

alors :

$$y(t)=\begin{cases} e^{t}-e^{t-1} & \text{pour } t<0 \\ 2-e^{-t}-e^{t-1} & \text{pour } 0\leq t\leq 1 \\ e^{-t+1}-e^{-t} & \text{pour } t>1 \end{cases}$$

7

③ → Représentation du signal $y(t)$:



④ → La transformée de Fourier de $y(t)$: $Y(f)=?$

on a : $y(t)=x(t)*h(t)$

$$TF\{y(t)\}=TF\left[x(t)*h(t)\right]$$

$$Y(f)=X(f).H(f)$$

$$x(t) \xrightarrow{TF} \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$ (D'après la table de la TF)

$h(t) = \text{Rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

on a:

$\text{Rect}(t) \xrightarrow{TF} \text{Sinc}(f)$ (d'après la table de la TF)

$\text{Rect}\left(t-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{TF} \text{Sinc}(f)\, e^{-j2\pi\left(\frac{1}{2}\right)f}$ (propriété de translation)

donc: $H(f) = e^{-j\pi f}\, \text{sinc}(f)$

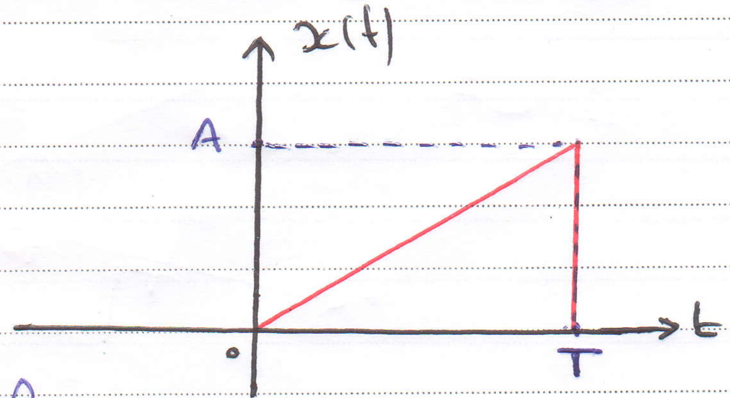
8 alors: $Y(f) = X(f) . H(f)$

$$\boxed{Y(f) = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}\, e^{-j\pi f}\, \text{sinc}(f)}$$

Ex (04):

$$x(t) = \frac{A}{T}\, t \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right]$$

① → Représentation du signal $x(t)$:

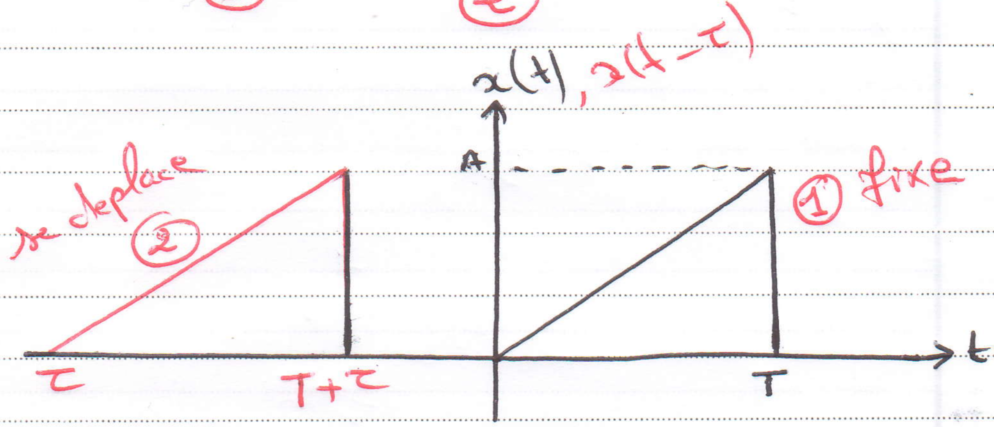


② → la fonction d'auto-corrélation:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{T} t \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right] \cdot \frac{A}{T}(t-\tau) \left[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t-T-\tau)\right] dt$$

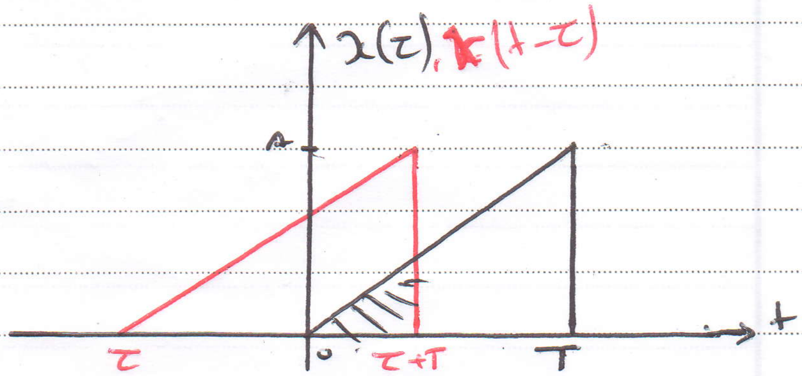
$$= \int_{0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{A}{T} t\right)}_{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{A}{T}(t-\tau)\right)}_{2} dt$$



9 → 1er cas: $t+\tau<0 \Rightarrow \boxed{\tau<-T}$

$\boxed{\varphi_{xx}(\tau)=0}$ pour $\tau<-T$

→ 2ème cas: $\tau<0$ et $\tau+T>0 \Rightarrow \boxed{-T<\tau<0}$



$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{0}^{T+\tau} \frac{A}{T} t \cdot \frac{A}{T}(t-\tau)\, dt$$

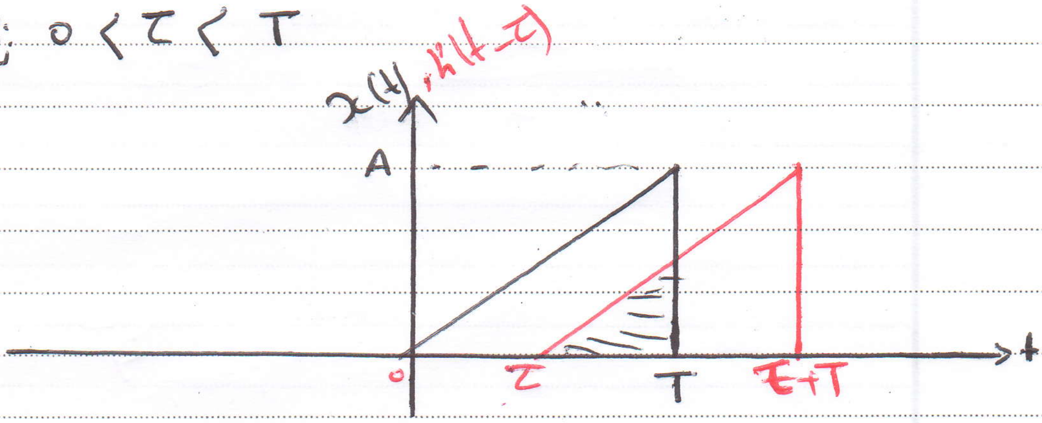
$$= \frac{A^2}{T^2} \int_{0}^{T+\tau} (t^2 - t\tau)\, d\tau$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\tau\right]_0^{T+\tau}$$

$$= \frac{A^2}{T^2}\left[\frac{(T+\tau)^3}{3} - \frac{(T+\tau)^2}{2}\tau\right]$$

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{6T^2}\left(-\tau^3 + 3T^2\tau + 2T^3\right)} \quad \boxed{-T<t<0}$$

3ème Cas: $0 < \tau < T$



10

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_\tau^T \frac{A}{T}t \cdot \frac{A}{T}(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{A^2}{T^2}\int_\tau^T t(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{A^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\tau\right]_\tau^T = \frac{A^2}{T^2}\left[\frac{T^3}{3} - \frac{T^2\tau}{2} - \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^3}{2}\right]$$

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{6T^2}\left[\tau^3 - 3T^2\tau + 2T^3\right]} \quad \text{pour } 0<t<T$$

4ème cas $\tau > T \Rightarrow \boxed{\varphi_{xx}(\tau) = 0}$

donc:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < -T \\ \frac{A^2}{6T^2}\left(-\tau^3 + 3T^2\tau + 2T^3\right) & \text{si } -T < \tau < 0 \\ \frac{A^2}{6T^2}\left(\tau^3 - 3T^2\tau + 2T^3\right) & \text{si } 0 < \tau < T \\ 0 & \text{si } \tau > T \end{cases}$$

③ → L'énergie du signal à partir de sa fonction d'auto-corrélation :

$$E_x = \varphi_{xx}(0)$$

$$= \frac{A^2}{6T^2}\left(2T^3\right)$$

11

$$\boxed{E_x = \frac{A^2 T}{3}}$$