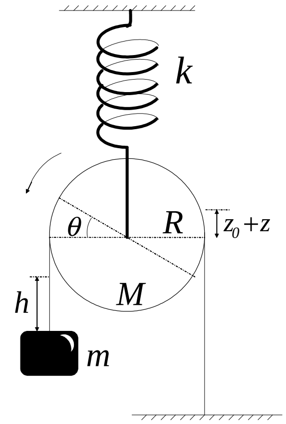
SÉRIE DE TD N° **3** DE PHYS. 3

Exercice 1. Lagrangien et Équation de Lagrange.



Une masse m est suspendue par un fil inextensible et non glissant enroulé autour d'un disque de masse M. Le disque, pouvant tourner librement autour de son centre, est suspendu par un ressort de raideur k.

1. Calculer l'énergie potentielle U du système en fonction de z.

2. Déduire l'allongement z_0 du ressort à l'équilibre puis simplifier U.

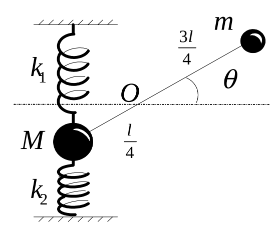
3. Trouver l'énergie cinétique T du système.

4. Trouver le Lagrangien $\mathcal{L}$ et déduire l'équation du mouvement.

5. Trouver la pulsation propre ω_0. (A.N: m=**1**kg, k=**44**N/m, M=**1**kg)

Rappel: $\mathcal{L} = T - U$. *L'équation de Lagrange est:* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$.

Exercice résolu* **Oscillation d'un Levier.**



La tige de longueur l (masse négligeable) peut tourner sans frottement autour de son axe en O. À l'équilibre la tige était horizontale. Les boules sont ponctuelles.

1. *Remplacer les deux ressorts par un seul ressort équivalent de raideur k, puis trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.* (*Pour* $\theta \ll 1$.)

2. *Écrire la condition d'équilibre et déduire l'allongement z_0 à l'équilibre du ressort équivalent. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.*

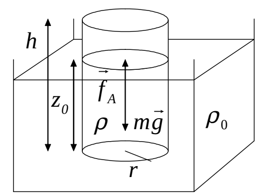
3. *Trouver l'énergie cinétique T du système.*

4. *Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.*

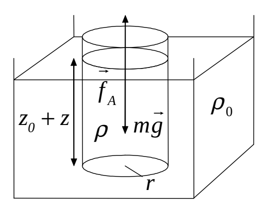
5. *Trouver la pulsation propre* ω_0. (A.N: m=**1**kg, k=**20**N/m, M=**1**kg)

Rappel: Pour $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$.

Exercice résolu ** **Oscillation à la Surface d'un Liquide.**



Au repos.



En mouvement.

Un cylindre de densité ρ flotte à la surface d'un liquide de densité ρ_0. À l'équilibre, sous l'effet de son poids, une partie du cylindre est immergée sous la surface du liquide d'une distance z_0. (Frottement visqueux négligé)

1. *Trouver à l'aide du PFD la distance d'immersion z_0.*

2. *Trouver à l'aide du PFD l'équation du mouvement.*

3. *Trouver la pulsation propre ω_0.*

4. *Lorsque le cylindre oscille, la période mesurée des oscillations est T=**2**s. Déduire dans quel liquide flotte le cylindre.*

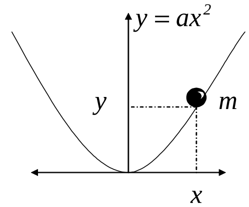
Données: ρ = **1024,5**kg/m^3. h=**90**cm. g=**10**m/s^2.

Liquide	**Densité** ρ_0(kg/m^3)
Eau de mer	1028
Huile d'olive	910
Alcool	789

Rappel: La force d'Archimède f_A agissant sur un corps est égale au poids du liquide déplacé par la partie immergée du corps: $f_A = \rho_0 V_{immergé} \cdot g$

Pour plus d'exercices résolus, aller sur **http://sites.google.com/site/exerev**

Exercice résolu$^{\overset{*}{**}}$ **Boule sur une Surface Concave**.



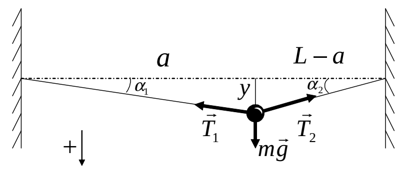
Une masse m roulant sans frottement le long d'une courbe d'équation $y{=}ax^2$.

1. *Trouver l'énergie potentielle U de la masse en fonction de x et a.*

2. *Trouver l'énergie cinétique T de la masse.*

3. *Trouver le Lagrangien pour de faibles écartements par rapport à l'origine* ($x \ll 1$) *et déduire l'équation du mouvement.*

Exercice résolu$^{\overset{**}{**}}$ **Corde Portant une Masse.**



Une masse m suspendue à une corde de longueur L et de tension T. On suppose que la corde est inextensible ($T_1 \approx T_2 \approx T$) *et qu'elle reste approximativement horizontale* ($\alpha_1 \approx \alpha_2 \ll 1.$)

$(\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1. \quad \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2)$

Trouver à l'aide du PFD l'équation du mouvement, puis déduire la pulsation propre ω_0 *en fonction de T, L, m et a.*

Solution*

1. Le ressort équivalent est $k{=}k_1{+}k_2$: $U = U_m + U_M + U_{ressort} = mgh - MgH + \frac{1}{2}k(z+z_0)^2$

$U \approx mg\frac{3l}{4}\sin\theta - Mg\frac{l}{4}\sin\theta + \frac{1}{2}k(\frac{l}{4}\sin\theta + z_0)^2 \approx mg\frac{3l}{4}\theta - Mg\frac{l}{4}\theta + k\frac{l^2}{32}\theta^2 + k\frac{l}{4}\theta z_0 + \mathrm{C}^{te}$.

2. La condition d'équilibre est $\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow mg\frac{3l}{4} - Mg\frac{l}{4} + k\frac{l}{4}z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{Mg-3mg}{k}$.

L'énergie potentielle se simplifie grâce à la condition d'équilibre en : $U \approx k\frac{l^2}{32}\theta^2 + \mathrm{C}^{te}$.

3. $T{=}T_m{+}T_M = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}m(\frac{3l}{4}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{l}{4}\dot{\theta})^2 = \frac{9m+M}{32}l^2\,\dot{\theta}^2$.

4. $\mathcal{L} = T - U = \frac{9m+M}{32}l^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{k}{32}l^2\theta^2 + \mathrm{C}^{te}$. L'équation du mouvement est:

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{9m+M}\theta = 0. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{9m+M}}$ A.N: $\omega_0 = \sqrt{2}\,\mathbf{rad/s}$.

Solution**

1. À l'équilibre: $\sum\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_A = \overrightarrow{0}$. Par projection: $mg - f_A = 0$.

$f_A = \rho_0 V_{immergé}\,g = \rho_0\pi r^2 z_0 g$. D'où: $mg - \rho_0\pi r^2 z_0 g = 0 \Longrightarrow z_0 = \frac{m}{\rho_0\pi r^2} = \frac{\rho\pi r^2 h}{\rho_0\pi r^2} = \frac{\rho h}{\rho_0}$.

2. En mouvement: $\sum\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_A = m\overrightarrow{a}$. Par projection: $mg - f_A = m\ddot{z}$.

$f_A = \rho_0 V_{immergé}\,g = \rho_0\pi r^2(z_0+z)g$. D'où: $mg - \rho_0\pi r^2(z_0+z)g = m\ddot{z} \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_0\pi r^2 g}{m}z = 0$.

3. La pulsation propre est: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0\pi r^2 g}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_0\pi r^2 g}{\rho\pi r^2 h}} = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}$.

4. Nous avons $\rho_0 = \omega_0^2\frac{\rho h}{g} = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{\rho h}{g} \approx \mathbf{910}\,\mathrm{kg/m^3}$. Le liquide est donc l'huile d'olive.

Solution***

1. $U{=}mgh{=}mgy{=}mgax^2$. **2.** $T{=}\frac{1}{2}mv^2{=}\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$. $\left[\dot{y}{=}\frac{dy}{dt}{=}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}{=}2ax\dot{x}\right] \Rightarrow T{=}\frac{1}{2}m(1+4a^2x^2)\dot{x}^2$

2. $\mathcal{L}{=}T{-}U{=}\frac{1}{2}m(1+4a^2x^2)\dot{x}^2 - mgax^2 \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgax^2$. $\quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + 2gax = 0$.

Solution****

$\sum\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow \overrightarrow{T}_1 + \overrightarrow{T}_2 + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}$. Par projection: $-T_1\sin\alpha_1 - T_2\sin\alpha_2 + mg = m\ddot{y}$.

Puisque $T_1 \approx T_2 \approx T$, $\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1$, $\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2$: l'équation du mouvement devient

$-T\tan\alpha_1 - T\tan\alpha_2 + mg = m\ddot{y} \Longrightarrow -T\frac{y}{a} - T\frac{y}{L-a} + mg = m\ddot{y} \Longrightarrow \ddot{y} + \frac{TL}{ma(L-a)}y = g. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{TL}{ma(L-a)}}$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE N°3 DE PHYS. 3

1. L'énergie potentielle est:

$U = U_M + U_m + U_{ressort} = -Mg(z+z_0) - mgh + \frac{1}{2}k(z+z_0)^2.$

Le disque tourne tout en descendant, donc: $h{=}z{+}R\theta$.

(La hauteur de descente peut être prise à partir de la position d'équilibre sans ajouter z_0)

Comme le fil est inextensible et non glissant, on a $R\theta = z$. Donc, $h = z + R\theta = 2z$.

$U = -Mg(z+z_0) - 2mgz + \frac{1}{2}kz^2 + kzz_0 + \mathrm{C}^{te}.$

2. Pour trouver l'allongement z_0 du ressort à l'équilibre, utilisons la condition d'équilibre :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \Longrightarrow -Mg - 2mg + kz + kz_0\big|_{z=0} = 0 \Longrightarrow -Mg - 2mg + kz_0 = 0 \Longrightarrow z_0 = \frac{(\mathrm{M}{+}2m)g}{k}.$$

L'énergie potentielle se simplifie alors en $U = \frac{1}{2}kz^2 + \mathrm{C}^{te}$.

3. L'énergie cinétique est: $T = T_{(M)Translation+Rotation} + T_{(m)Translation}$

$$= \tfrac{1}{2}M(\dot{z})^2 + \tfrac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m(2\dot{z})^2.$$

$$= \tfrac{1}{2}M\,\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\,\dot{\theta}^2 + 2m\dot{z}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}M\,\dot{z}^2 + \tfrac{1}{4}M\,\dot{z}^2 + 2m\,\dot{z}^2 \qquad (\text{Car } z = R\theta \Longrightarrow \dot{z} = R\dot{\theta}.)$$

$$= \tfrac{1}{4}(3M+8m)\,\dot{z}^2.$$

4. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(3M{+}8m)\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2.$

(La constante C^{te} n'a pas d'importance pour le Lagrangien.)

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \Longrightarrow$

$\ddot{z} + \frac{2k}{3M+8m}z = 0.$ La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M+8m}}$. A.N: $\omega_0 = \sqrt{8}\,\mathbf{rad/s}$.