Chapitre I . "Rappel mathematique"

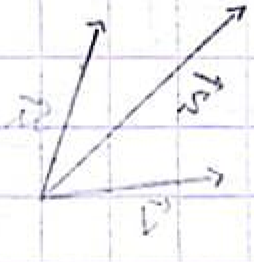
I / 1- notions de vecteur (شعاع)

- Un Vecteur $\vec{AB}$ est un segmment de droite caracteriser par :
  - L'origine
  - La norme
  - Un sens
  - Une direction

2- Opération sur les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$$



$$\vec{S} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$$

+ Différence :

$$D = \vec{u} - \vec{v} = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k}$$

* La norme (module) d'un vecteur =

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

* Le vecteur unitaire : (شعاع الوحدة)

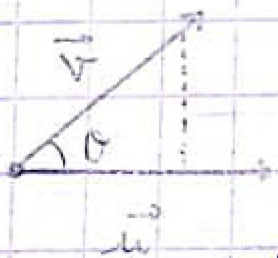
$AB = \vec{u} = \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \qquad \vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

* Un Produit scalaire (الجداء السلمي)

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. on appelle PS et on note : $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos\theta$ (expression géometrique)



C'est le produit du module de $\|\vec{u}\|$ par la projection (إسقاط) du modul de $\|\vec{v}\|$ sur $\vec{u}$.

+ expression géamétrique du PS
(العبارة الهندسية للجداء السلمي)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$

+ expression analytique PS : (ع . ت . م . س)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$

$= (xx'\,\vec{i}\cdot\vec{i} + yy'\,\vec{j}\cdot\vec{j} + zz'\,\vec{k}\cdot\vec{k})(xy'\,\vec{i}\cdot\vec{j} + xz'\,\vec{i}\cdot\vec{k} + yx'\,\vec{j}\cdot\vec{i} + yy'\,\vec{j}\cdot\vec{j} + yz'\,\vec{j}\cdot\vec{k} + zx'\,\vec{i}\cdot\vec{k} + zy'\,\vec{k}\cdot\vec{j} + zz'\,\vec{k}\cdot\vec{k})$

$\vec{i}\cdot\vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos 0$ (صفر)

$= 1 \times 1 \cdot 1 = 1$

- $\vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$
- $\vec{i}\cdot\vec{j} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos 90 = 0$
- $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

$$u\cdot v = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'$$

Application :

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}\\ \vec{v} = 2\vec{i} + 1\vec{k}\end{cases}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \times 1 = 7$$

I - 4 - Produit vectoriel (الجداء الشعاعي)

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta \cdot \vec{n}$: ش. ج. م. ع
- expression analytique PV = ش. ج. ت. ع

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xx'\,\vec{i} \wedge \vec{i} + xy'\,\vec{i} \wedge \vec{j} + xz'\,\vec{i} \wedge \vec{k} + yx'\,\vec{j} \wedge \vec{i}$$
$$+ yy'\,\vec{j} \wedge \vec{j} + yz'\,\vec{j} \wedge \vec{k} + zx'\,\vec{k} \wedge \vec{i} + zy'\,\vec{k} \wedge \vec{j} + zz'\,\vec{k} \wedge \vec{k}$$

- $\vec{i} \wedge \vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \sin\theta \cdot \vec{n} = 1 \times 1 \times 0 \times \vec{n} = 0$
- $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$
- $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$
- $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$
- $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xy'\vec{k} + xz'(-\vec{j}) + yx'(-\vec{k}) + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} + zy'(-\vec{i})$$
$$= (yz' - zy')\vec{i} - \vec{j}(xz' - zx') + \vec{k}(xy' - yx')$$

(4)

methode matriciel :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(yz' - zy') - \vec{j}\,(xz' - zx') + \vec{k}\,(xy' - yx')$$

exemple : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{CD} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

الإحداثيات الديكارتية

I. Coordonnées cartésiennes :

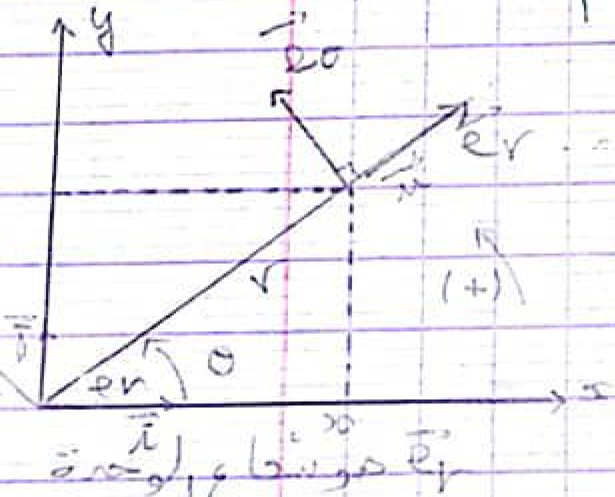
$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$|\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

II. Coordonnées polaires : الإحداثيات القطبية



$\vec{e_r}$ موجه ع الوحدة

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow M(r, \theta)$

$(\vec{i}, \vec{j}) \longrightarrow (\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

$r = \|\vec{OM}\|$

$\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$

* La relation entre cc et cp

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

Application :

soit : $M\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \cdot (\vec{i}, \vec{j})$

$M(r, \theta)$

$CP = ?$ 1,B

$- r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \Leftarrow CP$

$tg\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad M\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ 2,B

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

من الدائرة نجد :

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$CC = ? \times C.P$

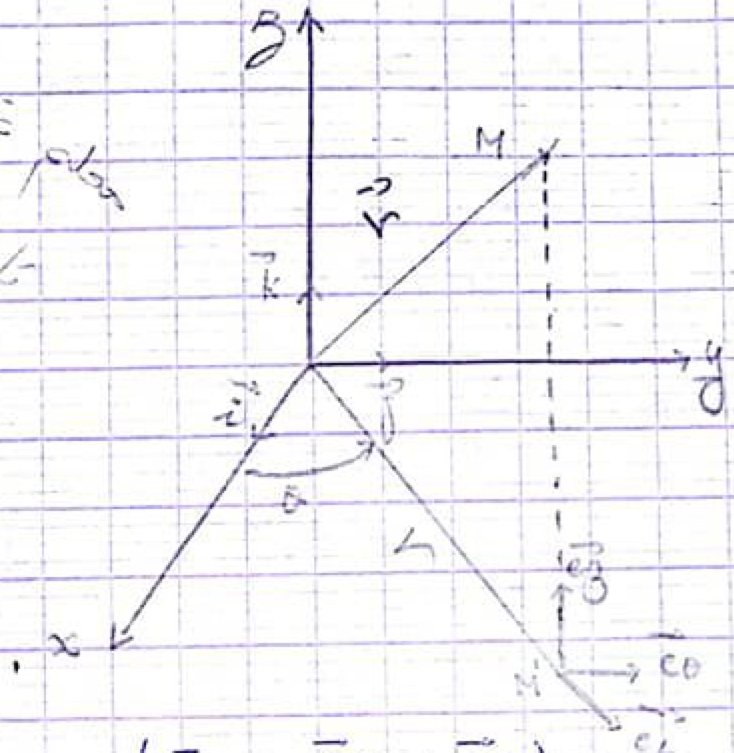
$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{OM} = r \cdot \vec{e_r}$

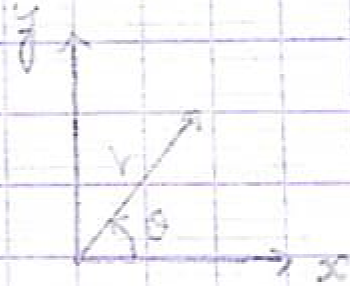
$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

III - Coordonnées cylindrique :



$M \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$ $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$

$= r\,\vec{e_r} + z\,\vec{k}$

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{r^2 + z^2}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

ex - 01 :

soient les points A$(2;1)$, B$(1;1)$, C$(2;1)$ dans un repère cartisienne

1- calculer les cordonnées polaires (ρ, θ) de ces trois points ?

2- Exprimer les victeurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ en coordonnés ploires

- $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = \frac{5}{\sqrt{5}}$
- $tg\,\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 26.5°$ $(\sqrt{5} ; 26.5°)$

- $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$tg\,\theta = \frac{1}{1} = 1$ $\left(\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right)$

$(\sqrt{2} ; 45°)$

- $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\theta = 63.430$ $(\sqrt{5} , 63.43°)$

2- ~~$\vec{AB} =$~~

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(-1, 0)$ $\Rightarrow$ en coordonnées cartisienne

- $r_{\vec{AB}} = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$

$\cos \theta_{\vec{AB}} = \frac{-1}{1} = -1$

$\sin \theta_{\vec{AB}} = \frac{0}{1} = 0$

$\theta_{\vec{AB}} = \pi = 180°$ $(1, \pi)$

* $\vec{AC} = \begin{pmatrix} x_c - x_A \\ y_c - y_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(-1, 1)$

$n_{\vec{AC}} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

- $\cos_{\vec{AC}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $\sin \theta_{\vec{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta_{\vec{AC}} = \frac{3\pi}{4} = 135°$

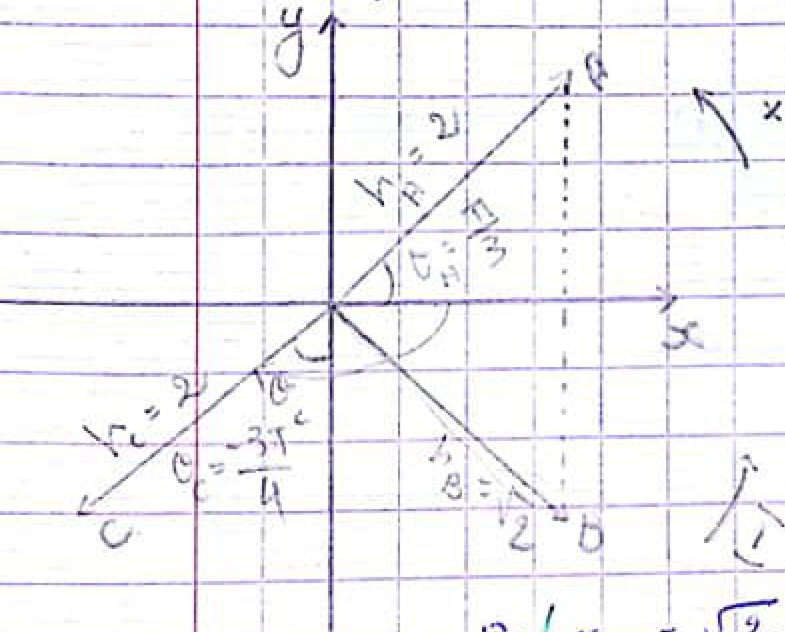
* $\vec{BC} \begin{pmatrix} x_c - x_B \\ y_c - y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n_{\vec{BC}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

- $\cos \theta_{\vec{BC}} = 0$
- $\sin \theta_{\vec{BC}} = \frac{1}{1} = 1$

$\theta_{\vec{BC}} = \frac{\pi}{2}$ $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$

ex _ 02 = Représenter puis donner le coordonnées cartésiennes des points polaires suivants = $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ $C\left(2; -\frac{2\pi}{3}\right)$



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$A - x = 2\cos\frac{\pi}{3}$

$y = 2\sin\pi/3$

$x = 1 \quad y = \sqrt{3}$

• $B / x = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$y = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

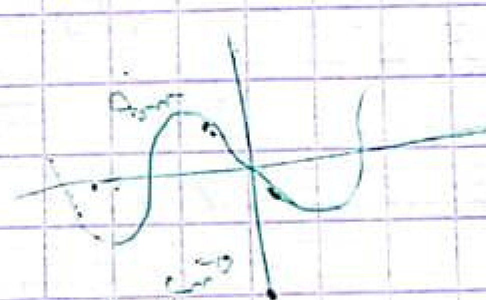
$x = 1 \quad , \quad y = -1$

• $C / x = 2\cos -\frac{2\pi}{3}$

$y = 2\sin -2\pi/3$

$C(-1; -\sqrt{3})$

* $\cos(-\theta) = \cos\theta$
* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$



III. Coordonnées sphériques

$$x = OM' \cos \varphi = \rho \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = OM' \sin \varphi = \rho \sin\theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{OM'} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$M(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \theta, \varphi)$$

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \longrightarrow (\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$$

- $\sin\theta = \frac{OM'}{\rho} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

- $\sin\varphi = \frac{y}{OM'} = \frac{y}{\sqrt{G + y^2}}$

C. cartésien

$M(x, y, z)$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$|\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

C. cylindrique

$M\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$

$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{k}$

$|\vec{OM}| = \sqrt{r^2 + z^2}$

C. Polaire

$M(r, \theta)$

$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

$\vec{OM} = r\vec{e_r}$

$|\vec{OM}| = r$

C. sphérique

$M\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

$(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

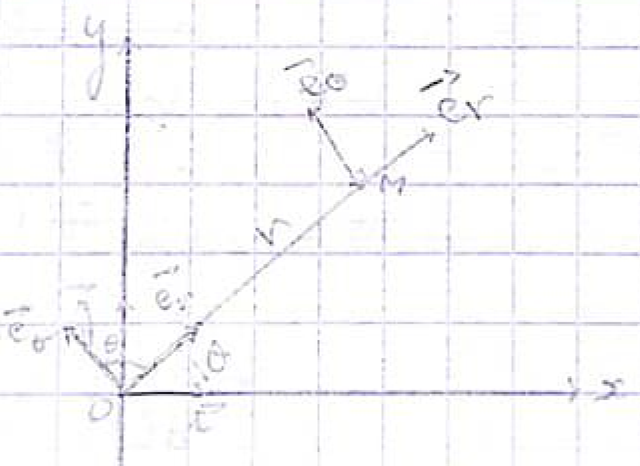
$\vec{OM} = \rho\vec{e_\rho}$

$|\vec{OM}| = \rho$

Relation : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$



Chapitre II
Cinématique du point materiel

* Repère (Referentiel)
* Vecteur position $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = r\vec{e_r}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = r\vec{e_r} + z\vec{k}$

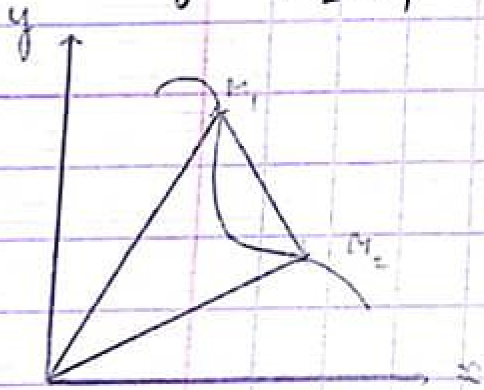
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = \rho\vec{e_\rho}$

Vecteur vitesse =
variations de la position / temps : تغيرات الموضع بالنسبة للزمن

$\vec{V}_{moy}$ (vitesse moyen) => السرعة المتوسطة

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\vec{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{OM_2 - OM_1}{\Delta t}$$

$t \to 0$



$\vec{v}(t)$ = vitesse instantanée
(السرعة الحقيقية)

$\vec{v}(t) = \vec{V}_{moy} \quad \Delta t \to 0$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OM} = \int \vec{v}(t) \cdot dt$$

+ accélération (تسارع) : $\vec{a}(t)$ $\gamma(t)$

$$\vec{a}(t) = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = d\vec{v}/dt$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad v = \int \vec{a} \cdot dt$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}} \underset{\int}{\overset{d/dt}{\rightleftarrows}} \boxed{v(t)} \underset{\int \text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} \boxed{a(t)}$$

Application =

Un point materiel M, initialement (à $t = 0$) à l'origine ($x_0 = 0$; $y = 0$) se déplace dans le plan xOy avec un vecteur vitesse :

$$\begin{cases} V_x = 6 + 2t \\ V_y = 4 + t \end{cases}$$

1- écrire l'expression de $\vec{v}$

2- " " vecteur position $\overrightarrow{OM}$

3- " " " accélération $\vec{a}$

La correction de $\vec{v}$:

1/ $v(t) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} = (6 + 2t)\vec{i} + (4 + t)\vec{j}$

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(6 + 2t)^2 + (4 + t^2)}$ m/s

2/ $\overrightarrow{OM}$:

$$v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \int \vec{v} \cdot dt = \int d\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \int \vec{v} \cdot dt$$

$$\vec{OM} = \int [(6+2t)\vec{i} + (4+t)\vec{j}]\, dt$$
$$= \left(6t + \frac{2t^2}{2} + C\right)\vec{i} + \left(4t + \frac{t^2}{2} + C_2\right)\vec{j}$$

~~à t~~ Conditions initial : à $t = 0$

$M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{OM} = (6t + t_2 + C_1)\vec{i} + (4t + t^2/2 + C_2)\vec{j}$$

à $t = 0$ $M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$0 = 6(0)^2 + 0^2 + C \Rightarrow C = 0$

$0 = 4(0) + (0)^2 + C_2 \Rightarrow C_2{}' = 0$

$$\vec{OM} = (6t + t^2)\vec{i} + (4t + t^2/2)\vec{j}$$

③ accélération $\vec{a}$: $a(t) = ?$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(6+2t)\vec{i} + (4+t)\vec{j}\right]$$

$$a(t) = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\ m/s$

④ expression du vecteur vitesse :

a. expression en coordonnées cartisiennes :

$$\vec{v}(t) = d\vec{OM}/dt = \frac{d}{dt}[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}x\vec{i} + \frac{d}{dt}y\vec{j} + \frac{d}{dt}z\vec{k}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\cancel{\frac{d\vec{i}}{dt}}^{0} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\cancel{\frac{d\vec{j}}{dt}}^{0} + \frac{dz}{dt}\vec{k} +$$

$$z\cancel{\frac{d\vec{k}}{dt}}^{0}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Alors :

$$\boxed{v(t) = V_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}$$

base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est fixe dans le temps
$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{j}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{z}}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = m/s$$

b/ expression en Coordonnées polaire : cp

$$v(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[r, \vec{er}]$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{er} + r\frac{d\vec{er}}{dt}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{er} + r\frac{der}{dt}$$

$$\frac{der}{dt} = -\dot{\theta}(\sin\theta)\vec{i} + \dot{\theta}(\cos\theta)\vec{j}$$

$$= \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

$$\frac{d\vec{er}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

$|v(t)| = \sqrt{\dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2}$ m/s $\Leftarrow$ C.P

Application :

Un point materiel M est reperée dans le plan (xoy) par ses coordonnées cartisiennes

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$$

1. Donner l'équation de la trajectoire $y = f(x)$
2. Donner le vecteur vitesse en CC $\vec{v}(t) = ?$ et son module ?
4. Donner les coordonnées polaires r et θ ?
3. Donner le vecteur acceleration CC $\vec{a}(t)$?
5. Donner le vecteur position et vitesse en coordonées polaire ?

La correction :

1/ équation de la trajectoire $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 9\cos^2 2t \\ + \; y^2 &= 9\sin^2 2t \end{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9\,(\underbrace{\cos^2 2t + \sin^2 2t}_{=1})$$

$y^2 + x^2 = 9 = R^2$

$R = 3$ m (دائرة نصف قطرها)

2/ $v(t) = ?$

$\vec{v}(t) = d\vec{OM}(t)/dt = \frac{d}{dt}\left[3\cos 2t\,\vec{i} + 3\sin^2 t\,\vec{j}\right]$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -6\sin 2t \\ \dot{y} = 6\cos 2t \end{cases}$$

$\|\vec{v}\| = 6 \ m/s$

3/ $\vec{a} = ?$

$\vec{a} = dv/dt = d^2\overrightarrow{OM}/dt = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

$= \frac{d}{dt}\left[-6\sin 2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j}\right]$

$\vec{a} = -12\cos 2t\,\vec{i} - 12\sin 2t\,\vec{j}$

$\|\vec{a}\| = 12 \ m/s$

4/ Les coordonnés polaires $r . \theta$?

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9\cos^2 2t + 9\sin^2 2t} = 3 \ m$

$tg\,\theta = y/x = \cancel{3}\sin 2t / \cancel{3}\cos 2t = tg\,2t$

$\theta = 2t$

$r = 3 \ m \quad / \quad \theta = 2t$

5/ $\vec{v} = ?$ (c.p)

$v = d\overrightarrow{OM}/dt = d/dt\,(\vec{r}\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$v = \frac{d}{dt}(3\vec{e}_r) = \cancel{\dot{r}}^{\,0} + 3\, d\vec{e}_r/dt$

$\vec{v} = 3\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\theta = 2t \Rightarrow \dot{\theta} = 2 \Rightarrow v = 6\,\vec{e}_\theta$

$|\vec{v}| = 6 \ m/s$

II. 6. c/ Expression du vecteur accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(r\vec{e_r})$$

$$\frac{d r\vec{e_r}}{dt} = r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}[r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta}] \quad u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\vec{a} = r''\vec{e_r} + r'\theta'\vec{e_\theta} + r'\theta'\vec{e_\theta} + r\theta''\vec{e_\theta} + r\theta'\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$\vec{e_r} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \theta'\vec{e_\theta}$$

$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \Rightarrow d\vec{e_r}/dt = \theta'\vec{e_\theta}$$

$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \Rightarrow d\vec{e_\theta}/dt =$$

$$-\theta'\cos\vec{i} - \theta'\sin\theta\vec{j} = -\theta'\vec{e_r}$$

$$\vec{a} = r''\vec{e_r} + 2r'\theta'\vec{e_\theta} + r\theta''\vec{e_\theta} - r\theta'^2\vec{e_r}$$

$$\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{e_\theta} \quad : \text{cp}$$

II. 6. d/ Expression du vecteur ~~accélération~~ vitesse en coordonnées cylindrique :

$$\vec{V} = d\vec{OM}/dt = \frac{d}{dt}[r\vec{e_r} + z\vec{k}]$$

$$= r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta} + z'\vec{k} + \cancel{z\vec{k}'}^{\,0}$$