1. Définition

Les planchers sont des ouvrages horizontaux constituant des séparations entre les niveaux d'une habitation et supportant des charges verticales (habituellement constituées des charges permanentes et des charges d'exploitation, elles peuvent également provenir des actions climatiques) agissant perpendiculairement à leur plan moyen. Les planchers ont des épaisseurs faibles par rapport à ses dimensions en plan.

Les planchers peuvent être répartis en quatre types :

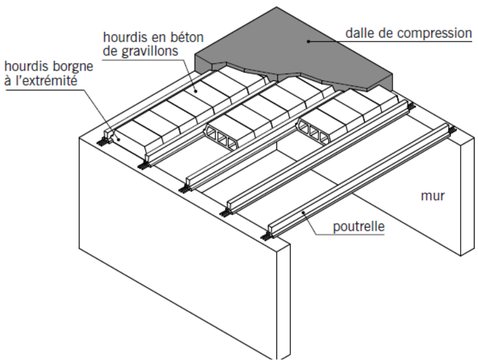
- *Les planchers à poutrelles préfabriquées ou planchers à corps creux*
- *Les planchers nervurés*
- *Les planchers dalles et planchers champignons*
- *Les planchers préfabriqués*

2. Planchers à poutrelles préfabriquées ou planchers à corps creux

Les planchers à poutrelles préfabriqués sont des planchers dont l'ossature porteuse est constituée d'éléments en béton. Ce type de plancher est couramment employé pour le cas de charges modérées car il peut être mis en œuvre avec des moyens de levage limités.

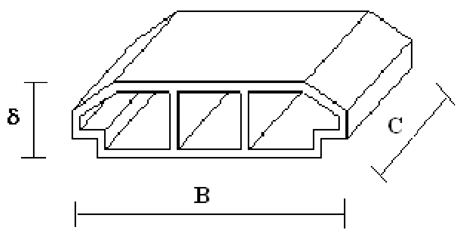
Ce type de plancher est constitué de trois éléments qui sont :

- *Les entrevous ou corps creux (appelés aussi Hourdis)*
- *Le hourdis ou dalle de compression*
- *Les poutrelles préfabriquées en béton armé*



2.1. Les entrevous ou corps creux

Les entrevous ou corps creux sont des éléments préfabriqués en béton de gravillons, en terre cuite ou en polystyrène, mis en place entre les poutrelles d'un plancher. Ils servent généralement de coffrage à la dalle de compression qui les recouvre.



δ = 11, 15, 16, 20 ou 25 cm
B = 30, 56 ou 65 cm
C = 20, 25 ou 30 cm

Les dimensions les plus commercialisées sont : ***(16 - 56 - 20) et (16 - 65 -20)***

2.2. Le hourdis ou dalle de compression

Le hourdis ou dalle de compression appelé aussi dalle de répartition est une dalle en béton coulée en place sur l'ensemble du plancher constitué par les poutrelles et les entrevous. Elle est généralement armée d'un treillis soudé et son épaisseur courante est de 4 à 5 cm environ. La dalle de répartition donne au plancher sa rigidité et assure le report des charges en direction des poutrelles.

Le ferraillage du hourdis forme un quadrillage de barres dont les dimensions de mailles ne doivent pas dépasser :

- *20 cm (5 p.m.) pour les armatures perpendiculaires aux nervures (poutrelles).*
- *33 cm (3 p.m.) pour les armatures parallèles aux nervures (poutrelles).*

Les sections des armatures doivent normalement satisfaire aux conditions définies ci-après :

Quand l'écartement l entre axes des nervures (poutrelles) est au plus égal à 50 cm, la section A1 des armatures perpendiculaires aux nervures exprimée en centimètres carrés par mètre linéaire doit être au moins égale à :

$$\boxed{A_1 \geq \frac{200}{f_e}}$$

Quand l'écartement l entre axes des nervures (poutrelles) est compris entre 50 et 80 cm, la section A1 des armatures perpendiculaires aux nervures doit être au moins égale à :

$$\boxed{A_1 \geq 0{,}02.l.\frac{200}{f_e} = \frac{40.l}{f_e}}$$

A1 étant exprimé en centimètres carrés par mètre linéaire et l en centimètres.
fe étant la limite d'élasticité de l'acier utilisé exprimée en MPa ou N/mm²

Quant aux armatures A2 parallèles aux nervures autres que les armatures supérieures de ces dernières, elles doivent avoir une section par mètre linéaire au moins égale à la moitié de celle des armatures perpendiculaires.

$$\boxed{A_2 \geq \frac{A_1}{2}}$$

2.3. Les poutrelles préfabriquées en béton armé

Les poutrelles sont des poutres préfabriquées de faible section en béton armé ou en béton précontraint. Les poutrelles qui constituent la structure porteuse du plancher reposent à leurs extrémités sur des murs porteurs ou des poutres en béton armé. Les poutrelles son disposées à intervalles réguliers (tous les 60-cm environ) et reçoivent les entrevous.

2.4. Prédimensionnement et déformation des poutrelles

Les planchers à poutrelles préfabriquées ont une hauteur totale h égale à la hauteur de la poutrelle. Le prédimensionnement des poutrelles est fonction de la longueur l prise égale :

- *à nu d'appui dans le cas d'encastrement*
- *à entre-axe d'appuis libres*

$$\boxed{\frac{h}{l} \geq \frac{1}{22{,}5}}$$

Les déformations des poutrelles préfabriquées doivent rester suffisamment faibles pour ne pas nuire à l'aspect et à l'utilisation de la construction et pour que les revêtements, les cloisons ou autres ouvrages supportés par l'ossature en béton armé, s'il en existe, ne soient pas endommagés d'une façon inadmissible par suite de déformations excessives de leurs supports.

Lorsqu'il est prévu des étais intermédiaires, on peut cependant se dispenser de donner une justification de la déformabilité des planchers à entrevous à condition que les deux inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\boxed{\frac{h}{l} \geq \frac{M_t}{15M_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{A}{b_0.d} \leq \frac{3{,}6}{f_e}}$$

2.5. Ferraillage des poutrelles

Les poutrelles sont sollicitées en flexion simple, le calcul pour la détermination des armatures longitudinales et transversales se fait de la même manière que pour les poutres continues.

Elles sont justifiées en deux étapes, avant et après coulage du béton.

a/ <u>avant coulage du béton</u>

Les poutrelles préfabriquées doivent être justifiées en phase de construction compte tenu de leurs dispositifs d'étaiement. Lorsqu'il est prévu des étais intermédiaires, on admet couramment de ne pas tenir compte de ces phases de construction dans la justification de l'ouvrage terminé. Pour la justification des poutrelles préfabriquées en phase de construction, on considère l'effet des poids des ouvriers, des matériaux (en place ou avant régalage) et des appareils de service. Dans les cas les plus courants, on peut prendre, outre le poids des matériaux et des coffrages, une charge localisée au centre de chaque portée entre étais dont l'intensité est la plus grande des deux valeurs 1 000 N et 500 N par mètre de portée entre étais.

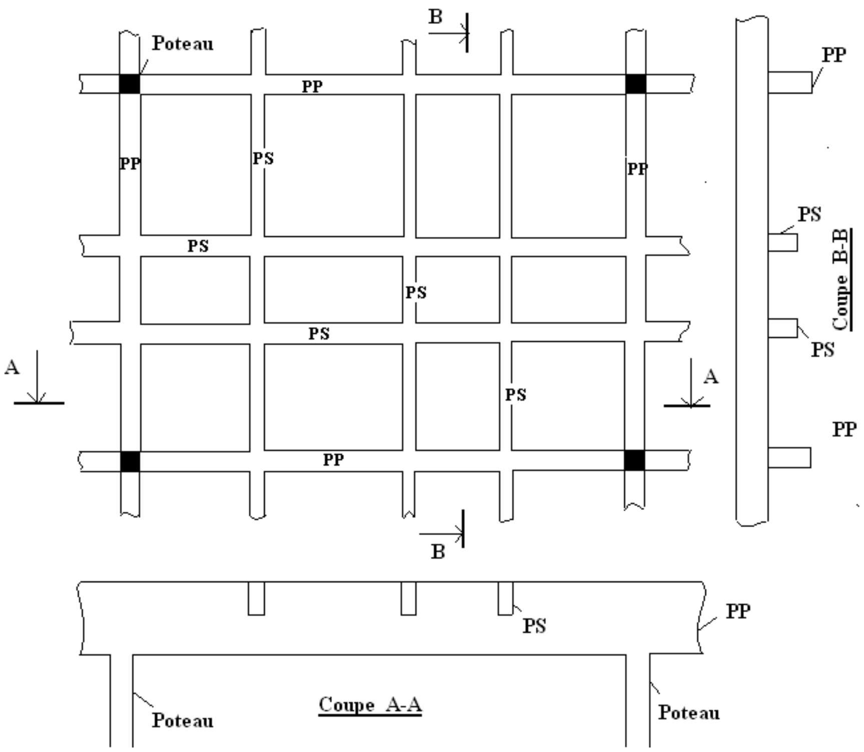
b/ <u>après coulage du béton</u>

Les poutrelles sont calculées sous l'effet des charges permanentes et d'exploitation auxquelles elles sont soumises et travailleront en Flexion Simple. Il s'agira de déterminer les moments négatifs aux appuis (poutres) ainsi que les moments positifs en travées.

3. Planchers nervurés

Les planchers nervurés sont des planchers à dalles pleines reposant sur des poutres appelées nervures. Généralement les poutres sont croisées suivants deux directions perpendiculaires. Les poutres peuvent être toutes principales liés directement à la structure et reposant directement sur les éléments porteurs (poteaux et voiles), comme ils peuvent être réparties en poutres principales et poutres secondaires.

Ce type de plancher est utilisé dans le cas de charges élevées tels que les constructions industrielles.

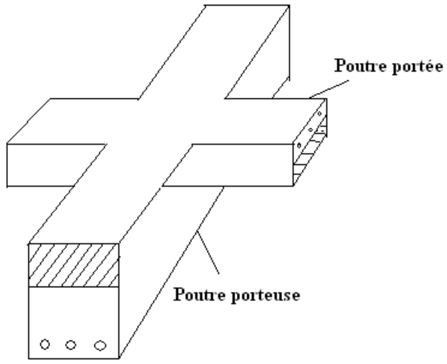


<u>Plancher nervuré</u>

La transmission des charges verticales se fait à travers les dalles pleines vers les poutres secondaires puis vers les poutres principales qui, de leur part les transmettent aux éléments porteurs (poteaux et voiles) qui les transmettent aux fondations puis au sol.

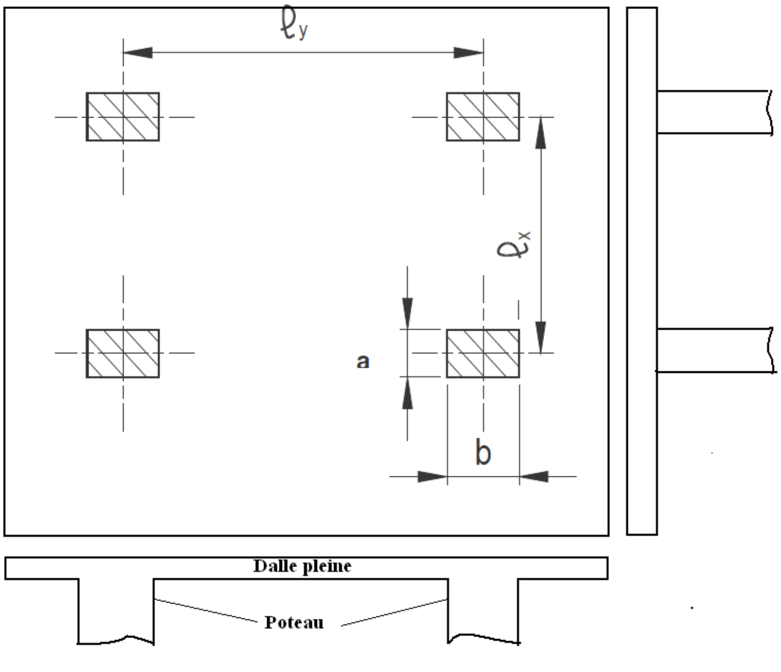
Les poutres secondaires se croisent et reposent sur les poutres principales qui appartiennent à la structure (portique). Les poutres secondaires travaillent en flexion simple et sont calculées comme des poutres continues.

Au droit du croisement, la poutre principale est porteuse et est soumise à un moment positif et la poutre secondaire est portée et est soumise à un moment négatif.



4. Planchers dalles et planchers champignons

Lorsque les planchers sont constitués par des dalles continues sans nervures ni poutres et que ces dalles sont supportées directement par des piliers (appuis ponctuels), on a affaire à des planchers-champignons ou à des planchers-dalles. Les planchers-champignons correspondent au cas où les piliers sont munis à leur partie supérieure de chapiteaux.

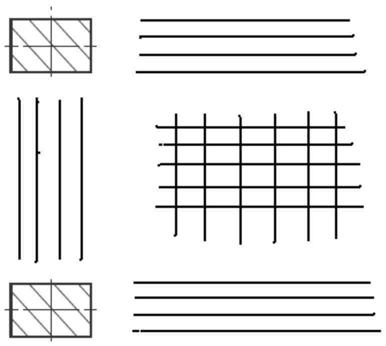


Les planchers champignons sont, en principe, réservés aux planchers industriels à forte surcharge.

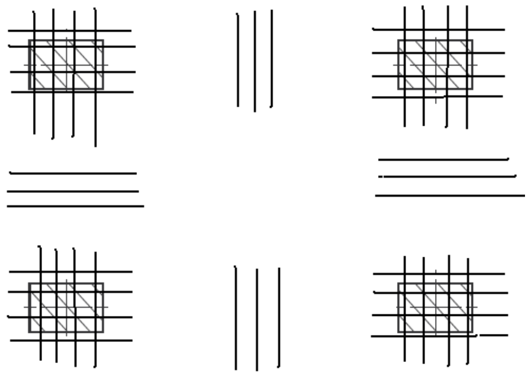
Ces types de planchers portent toujours dans deux directions. Les méthodes de calcul et les dispositions constructives font l'objet de l'annexe E4 des Règles BAEL91 (Règlement Français).

lx et ly ≈ 3 à 6 m avec ly/lx = 1 à 1,25 Epaisseur de la dalle $h = \left(\frac{1}{30} \text{ à } \frac{1}{35}\right) ly$

Les figures ci-dessous montrent des solutions possibles pour la disposition du ferraillage utilisé pour constituer les armatures inférieures et supérieures de tels planchers.



Armatures inférieures

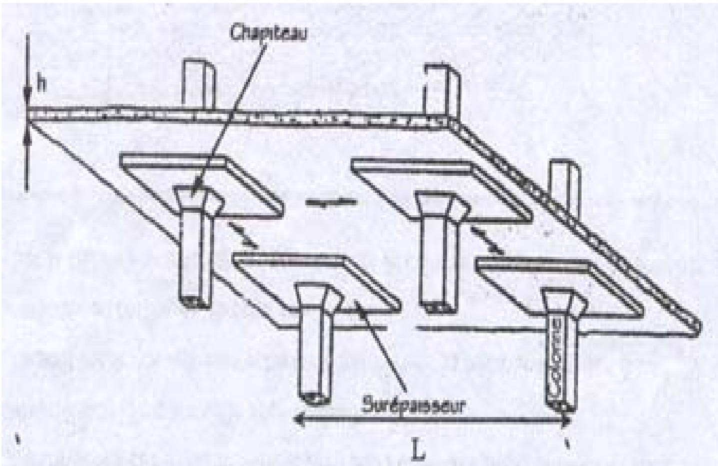


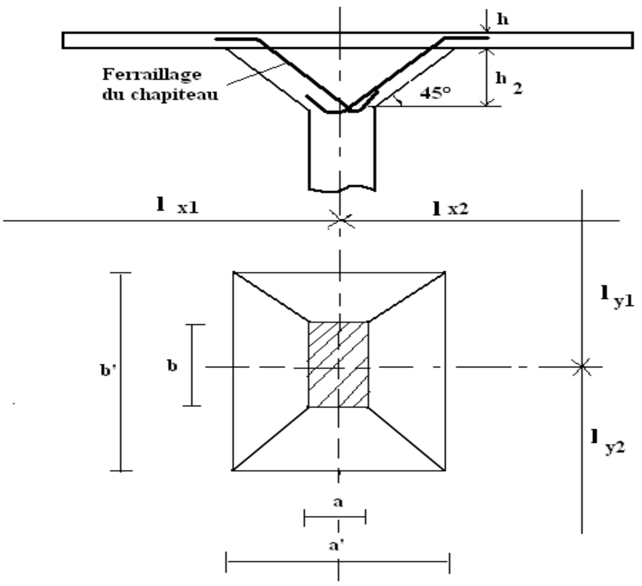
Armatures supérieures

Le chapiteau :

Le chapiteau du plancher champignon a pour but de réduire la portée de la dalle et éviter le poinçonnement au droit du poteau.

La forme des chapiteaux est assurée en disposant des armatures inclinées de construction.



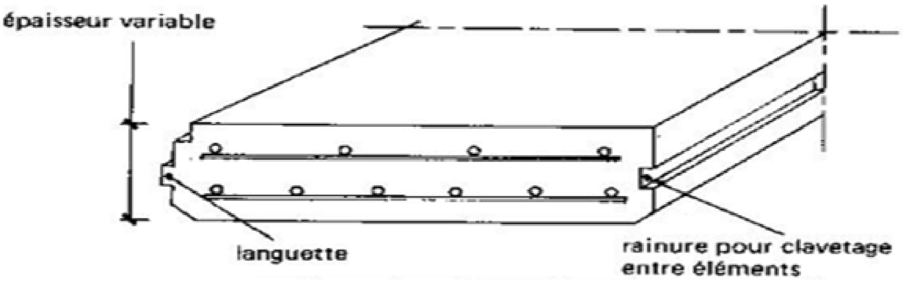


$a' \leq 0,4 l_{xi}$ et $b' \leq 0,4 l_{yi}$

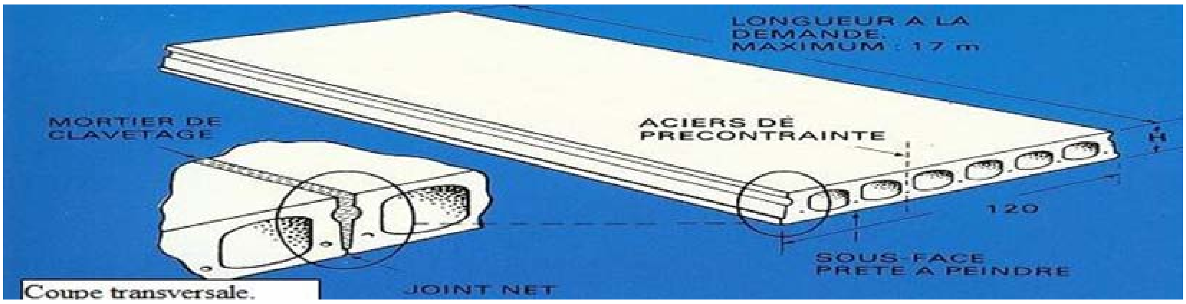
l_{xi} et l_{yi} désignent les dimensions des 4 panneaux entourant le pilier considéré qui a la plus faible surface. Pour les poteaux circulaires ayant des chapiteaux de surface B, vérifier comme si le chapiteau était carré de côté $a' = b' \leq 0,4 l_{xi}$ avec $a' = b'$

5. Planchers préfabriqués

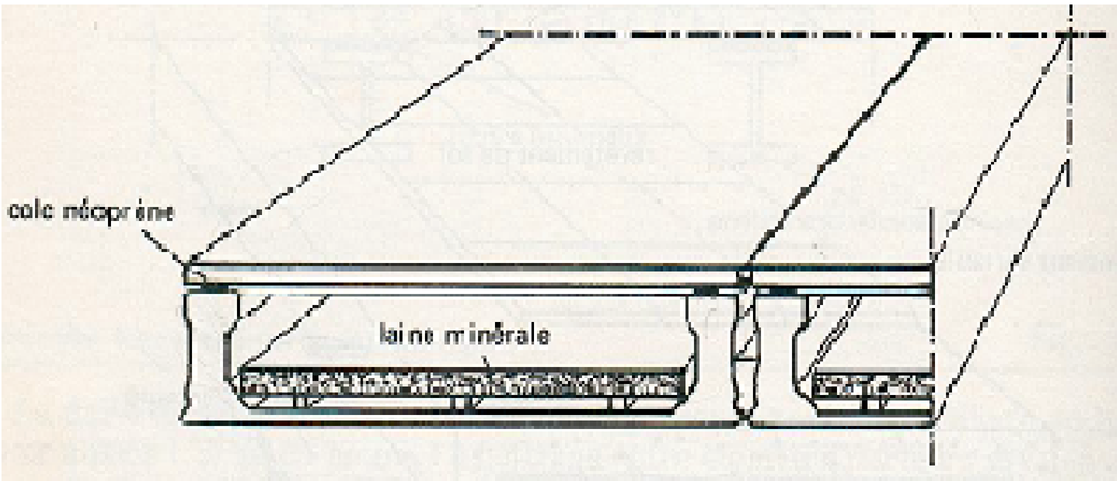
Le plancher préfabriqué est un plancher qui est construit partiellement ou totalement au sol (en usine ou près de l'ouvrage). Les éléments indépendants sont transportés et assemblés sur place. Son avantage est la rapidité d'exécution.



Plancher à base d'éléments en béton cellulaire

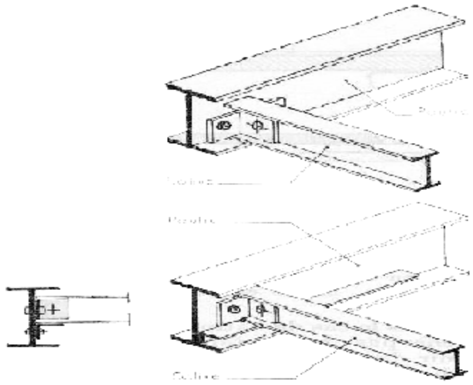


Plancher dalles alvéolées



Planchers à caissons finis deux faces

La solidarisation des différents éléments est réalisée simplement par le moyen d'un joint au mortier de ciment ou par jonction d'aciers en attente.



Les planchers métalliques font parti des constructions préfabriquées et sont généralement envisagés dans les constructions à grandes portées et soumises aux fortes charges. L'assemblage des éléments (profilés) se fait généralement par boulonnage ou par soudure ou les deux à la fois.

6. Calcul des sollicitations d'une dalle pleine (Méthode forfaitaire)

La dalle pleine est un plancher en béton armé de 10 à 20 cm d'épaisseur coulé sur un coffrage plat. Le diamètre des armatures incorporées et leur nombre varient suivant les dimensions de la dalle et l'importance des charges qu'elle supporte. Ce type de plancher est très utilisé dans l'habitat collectif.

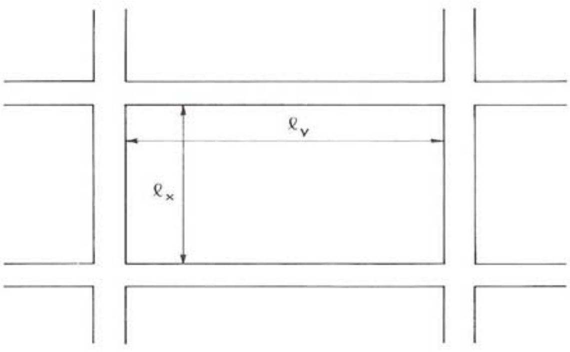
La méthode forfaitaire est applicable dans le cadre des « constructions courantes » supportant des charges modérées (charge d'exploitation au plus égale à deux fois la charge permanente ou à 5 000 N/m²), la méthode ne s'applique qu'à des éléments fléchis (poutres ou dalles calculées en flexion dans un seul sens) remplissant les conditions suivantes :

- *les moments d'inertie des sections transversales sont les mêmes dans les différentes travées en continuité*
- *les portées successives sont dans un rapport compris entre 0,8 et 1,25*
- *la fissuration est considérée comme peu nuisible*

Une dalle pleine est un élément à contour généralement rectangulaire dont les appuis peuvent être continus (poutres, voiles ou murs maçonnés) ou ponctuels (poteaux).

Les dalles peuvent être simples (une seule travée) ou continues s'étalant sur plusieurs travées donnant des moments positifs en travées et des moments négatifs aux appuis.

Les dalles peuvent porter dans deux directions ou bien dans une seule.



6.1. Prédimensionnement et vérification de l'Etat Limite de Déformation

On adopte généralement :

- $\boxed{\frac{l}{35} \leq h \leq \frac{l}{30}}$ *pour une dalle portant sur deux côtés*
- $\boxed{\frac{l}{45} \leq h \leq \frac{l}{40}}$ *pour une dalle portant sur quatre côtés*

Pour des valeurs inférieures, il faut normalement procéder à une vérification de la flèche. Dans le cas des dalles rectangulaires appuyées sur leurs quatre côtés, on peut admettre qu'il n'est pas indispensable de procéder au calcul des flèches si les conditions suivantes sont réalisées :

- *M_x et M_y étant les moments maximaux en travée par bande de largeur unité dans les sens l_x et l_y de la dalle supposée non encastrée sur appuis, et non continue au-delà de ses appuis (M_x étant supposé supérieur à M_y) et M_t le moment en travée par bande de largeur unité dans le sens lx , compte tenu des effets d'encastrement ou de continuité :*

$$\boxed{\frac{h}{l_x} \geq \frac{M_t}{20M_x}}$$

M_t ne pouvant être pris inférieur à 0,75 M_x .

- *A étant la section des armatures tendues par bande de largeur b, d leur hauteur utile, et fe leur limite d'élasticité :*

$$\boxed{\frac{A}{b.d} \leq \frac{2}{f_e}}$$

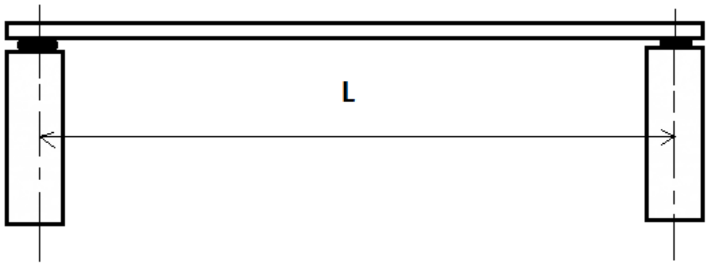
6.2. Appuis et portées

Les dalles s'appuient sur soit :

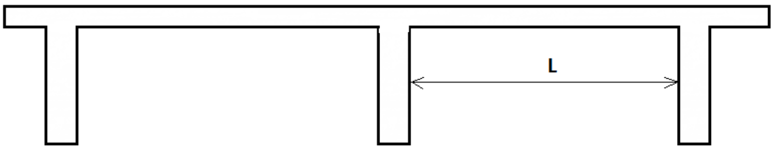
- *Des poutres*
- *Des murs porteurs*
- *Des poteaux*

Les appuis peuvent être simples ou des encastrements. La portée l d'une travée se mesure selon le cas :

- <u>*Appuis simples :*</u> entre axes



- *Encastrement :* à nu d'appuis



6.3. Calcul des moments :

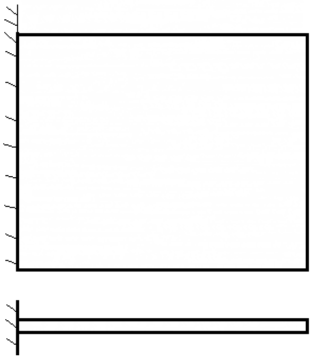
Le calcul des moments de flexion dans les dalles se fait suivant une ou les deux directions selon le cas. On dira que la dalle travaille suivant une seule direction ou bien suivant les deux directions.

Dans tous les cas le calcul des moments suivant une direction précise se fait de la même manière que les poutres en prenant comme largeur b=1m.

6.3.1. Dalle travaillant suivant une seule direction

La dalle travaille suivant une seule direction dans les cas suivants :

a) *Elle est encastrée sur un seul côté*. C'est le cas de la console



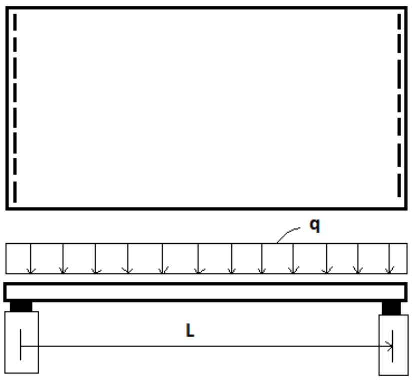
Pour une charge uniformément répartie q

$$\boxed{M = -\frac{ql^2}{2}}$$

Pour une charge concentrée p

$$\boxed{M = -pl}$$

b) *Elle repose simplement sur deux côtés*



$$\boxed{M = \frac{qL^2}{8}}$$

c) <u>Elle est encastrée sur ses 4 côtés</u>

Pour qu'un panneau de dalle encastré sur ses 4 côtés travaille suivant une seule direction il faut que :

- *La charge soit uniformément répartie*
- *le rapport des longueurs des travées l_x/l_y soit inférieur strictement à 0,4.*

Dans ces conditions, on ne calcule que les armatures parallèles au petit côté lx, on est donc ramené à l'étude d'une poutre de portée lx, de largeur 1m et de hauteur h.

Lorsqu'une dalle continue peut être considérée comme partiellement encastrée sur ses appuis de rive en particulier lorsqu'il s'agit d'un plancher à charge d'exploitation modérée, on prendra les moments suivants :

Moment en travée : $\boxed{M_t = \frac{pl_x^2}{10} = 0{,}8M_0}$

Moment sur appui : $\boxed{M_a = -\frac{pl_x^2}{16} = -0{,}5M_0}$

Avec :
P : est la charge uniforme résultant du poids propre et de la charge d'exploitation.
l_x : est la portée dans la direction x .
M_0 : est le moment isostatique $\boxed{M_0 = \frac{pl_x^2}{8}}$

6.3.2. Dalle travaillant suivant les deux directions

La dalle travaille suivant les deux directions dans les cas suivants :

a) <u>dalles articulées sur leur contour</u>

Un panneau de dalle est considéré comme travaillant suivant les deux directions si le rapport $\rho = \frac{l_x}{l_y}$ est compris entre 0.4 et 1 et la dalle est uniformément chargée. Nous commencerons par déterminer les moments M_x suivant l_x et M_y suivant l_y.

Dans la direction de la petite portée l_x : $\boxed{M_x = \mu_x P l_x^2}$.

Dans la direction de la grande portée l_y : $\boxed{M_y = \mu_y M_x}$.

Les valeurs des coefficients μ_x et μ_y sont données en fonction du rapport $\rho = \frac{l_x}{l_y}$ et du coefficient de poisson ν par le tableau de la page suivante :

Avec : ν = 0.2 pour l'état limite de service.
ν = 0 pour l'état limite ultime.

b) Dalles encastrées totalement ou partiellement sur leur contour

Lorsque la dalle fait partie d'un hourdis continu, ou lorsqu'elle est liée à des appuis permettant un encastrement partiel, on réduit les valeurs obtenues précédemment de M_x et M_y pour les dalles articulées sur leurs contours pour estimer les moments en travées M_{tx} et M_{ty} ainsi que les moments aux appuis M_{ax} et M_{ay}.

- Panneau de dalle de rive :

Moment en travée :

$$\boxed{\begin{aligned} M_{tx} &= 0.85 M_x \\ M_{ty} &= 0.85 M_y \end{aligned}}$$

Moment aux appuis :

$$M_{ax} = M_{ay} = -0.3 M_x \quad \textit{(appui de rive).}$$
$$M_{ax} = M_{ay} = -0.5 M_x \quad \textit{(appui intermédiaire).}$$

- Panneau de dalle intermédiaire :

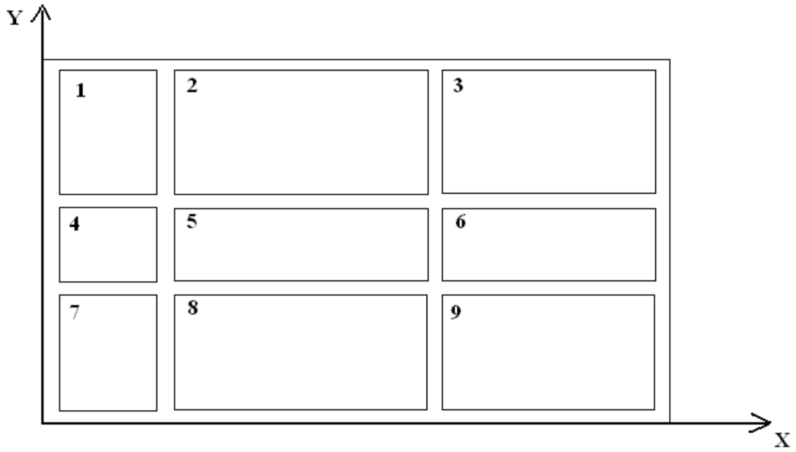
Moment en travée :

$$\boxed{\begin{aligned} M_{tx} &= 0.75 M_x \\ M_{ty} &= 0.75 M_y \end{aligned}}$$

Moment aux appuis : $\boxed{M_{ax} = M_{ay} = -0.5 M_x}$

Remarques :

- *Le moment sur l'appui commun à deux panneaux adjacents est le plus grand en valeur absolue des moments déterminés pour chacun des deux panneaux.*
- *L'emplacement du panneau dans la dalle est très important.*



Les panneaux 1, 3, 7 et 9 sont des panneaux de rive suivant x et y
Les panneaux 2 et 8 sont des panneaux intermédiaires suivant X et de rive suivant y
Les panneaux 4 et 6 sont des panneaux de rive suivant x et intermédiaires suivant y
Le panneau 5 est un panneau intermédiaire suivant les deux directions x et y

6.4. Calcul de l'effort tranchant et Armatures transversales:

a) Dalle travaillant suivant une seule direction :

$$T_e = -\frac{Pl}{2} + \frac{M_w - M_e}{l}$$
$$T_w = \frac{Pl}{2} + \frac{M_w - M_e}{l}$$

b) Dalle travaillant suivant deux directions :

$$T_x = \frac{Pl_x l_y}{2l_y + l_x}$$
$$T_y = \frac{Pl_x l_y}{3l_y}$$

c) Armatures transversales

En général, on ne dispose pas d'armatures transversales dans les dalles. On n'aura pas besoin d'armatures transversales dans les dalles si la condition suivante est satisfaite :

$$\boxed{\tau_m = \frac{V}{b_0.d} \leq \frac{0,07}{\gamma_b} f_{c28}}$$

où τ_m est la contrainte tangente (en MPa)
V est l'effort tranchant (KN)

7. Ferraillage et disposition constructive

Le calcul de ferraillage se fait en flexion simple pour les sections ayant un moment de flexion.

7.1. Dalle travaillant suivant une seule direction :

Dans ce cas il n'y qu'un seul moment de flexion parallèlement à x (la petite direction). Pour un moment M le calcul de ferraillage donne une section d'armature longitudinale A.

a) Dimension maximale du diamètre Φ des barres

Le diamètre maximal des barres à choisir ne doit en aucun cas dépasser le dixième de la hauteur totale h de la dalle

$$\boxed{\emptyset \leq \frac{h}{10}}$$

b) Espacement maximal des barres (entre-axes)

L'espacement maximal a entre les barres (entre-axes) ne doit en aucun cas dépasser les valeurs suivantes :

a ≤ Min [3h et 33 cm] dans le cas des charges uniformément réparties
a ≤ Min [2h et 22 cm] dans le cas des charges concentrées

c) Armatures de répartition

Dans le cas des dalles travaillant suivant une seule direction (l_x), le moment parallèlement à l_y étant nul, aucun ferraillage, du point de vue résistance n'est nécessaire. Mais le règlement de Béton Armé (C.B.A.93) exige de prévoir des armatures de répartition diposées parallèlement à l_y, avec :

$$\boxed{A_{rép} \geq A/4}$$

Avec aussi :

$$\boxed{\emptyset_{rép} \leq \emptyset}$$

Et :
a ≤ Min [4h et 45 cm] dans le cas des charges uniformément réparties
a ≤ Min [3h et 33 cm] dans le cas des charges concentrées

Remarque :

Ces dispositions sont aussi valables pour les armatures supérieures que pour les armatures inférieures.

7.2. Dalle travaillant suivant les deux directions :

Suivant les deux directions les moments existent, on aura à déterminer le ferraillage correspondant.

a) Dalles simplement appuyées sur leur contour

$M_x \longrightarrow A_x$
$M_y \longrightarrow A_y$

Pour les deux sections de ferraillage, il en résulte :

$$\boxed{\emptyset_x \, et \, \emptyset_y \leq \frac{h}{10}}$$

et
a ≤ Min [3h et 33 cm] dans le cas des charges uniformément réparties
a ≤ Min [2h et 22 cm] dans le cas des charges concentrées

b) Dalles encastrées sur leur contour

$M_{tx} \longrightarrow A_{tx}$
$M_{ty} \longrightarrow A_{ty}$
$M_{ax} \longrightarrow A_{ax}$
$M_{ay} \longrightarrow A_{ay}$

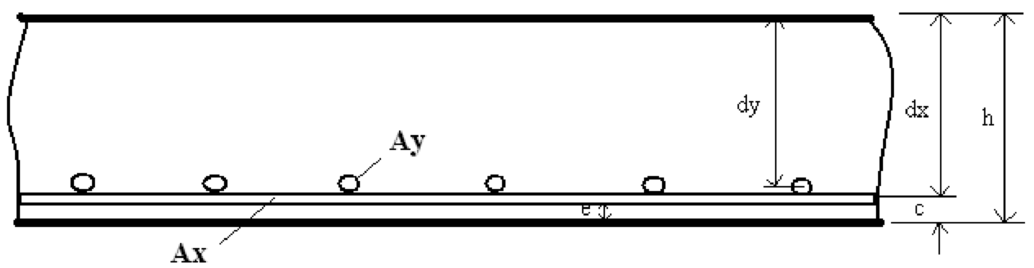
Pour toutes les sections de ferraillage, il en résulte :

$$\boxed{\emptyset_{tx}, \emptyset_{ty}, \emptyset_{ax}\, et\; \emptyset_{ay} \leq \frac{h}{10}}$$

et
a ≤ Min [3h et 33 cm] dans le cas des charges uniformément réparties
a ≤ Min [2h et 22 cm] dans le cas des charges concentrées

Remarques :

1. Dans le cas de dalles travaillant suivant les deux directions, il n'y a pas d'armatures de répartitions.
2. Pour le calcul du ferraillage en flexion simple la hauteur utile d_x est toujours supérieure à d_y car le moment M_x est toujours supérieur au moment M_y, et par conséquent les armatures A_x seront disposées dans la nappe inférieure et les armatures A_y dans la nappe supérieure comme indiqué dans le schéma.



Et $d_x = h - c = h - e - \Phi_x/2$

$d_y = d_x - (\Phi_x + \Phi_y)/2$

7.3. Vérifications au Poinçonnement

Sous l'action de forces localisées, il y a lieu de vérifier la résistance des dalles au poinçonnement par effort tranchant. Cette vérification s'effectue comme suit :

Dans le cas d'une charge localisée éloignée des bords de la dalle, on admet qu'aucune armature d'effort tranchant n'est requise, si la condition suivante est satisfaite :

$$\boxed{Q_u \leq 0{,}045.\ u_c.\ h\ .f_{cj}\ /\gamma_b}$$

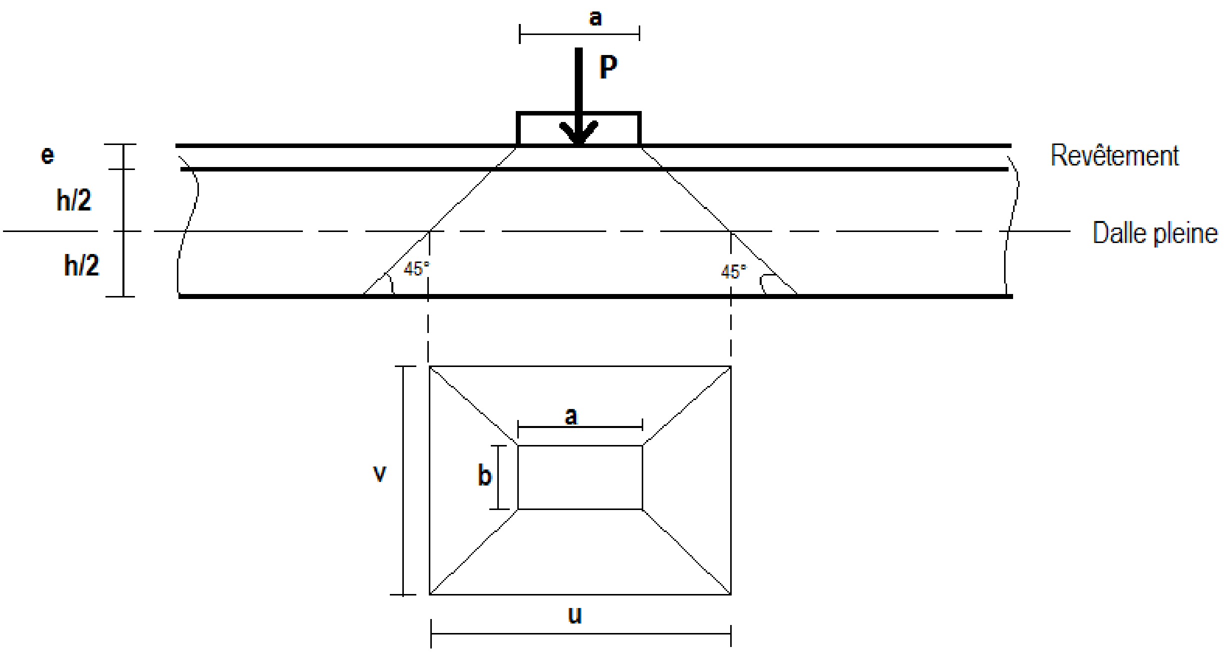
Où :

Q_u *la charge de calcul vis-à-vis de l'état limite ultime,*

h *l'épaisseur totale de la dalle,*

u_c *le périmètre du contour défini au niveau du feuillet moyen de la dalle.*

$$\boxed{u_c = 2(u + v)}$$



Si cette condition n'est pas satisfaite, on considère le contour u parallèle à uc le plus éloigné de celui-ci (donc avec u > u_c) pour lequel Qu≤ 0,045 u .h .f_{cj} /γ_b . On dispose des armatures d'effort tranchant dans toute la zone intérieure à ce périmètre

8. Calcul des sollicitations d'une dalle pleine (Méthode des Lignes de Rupture)

Le calcul des dalles avec la méthode forfaitaire concerne uniquement le cas des charges modérées et les formes régulières (rectangulaires), pour les charges élevées et les formes irrégulières des dalles cette méthode n'est pas valable.

La méthode des lignes de rupture est une méthode plus puissante et considère les matériaux à leur limite élasto-plastique.

Cette méthode, qui ne concerne que l'état limite ultime, est basée sur le mécanisme des fissures, elle prévoit l'endommagement de la dalle. Les fissures qui apparaissent sur la dalle s'appellent **lignes de rupture**.

8.1. Hypothèses de calcul

Premièrement et avant tout, il faut prévoir, dans le cas de rupture, les différente fissures au niveau de la dalle tant sur la face inférieure que la face supérieure.

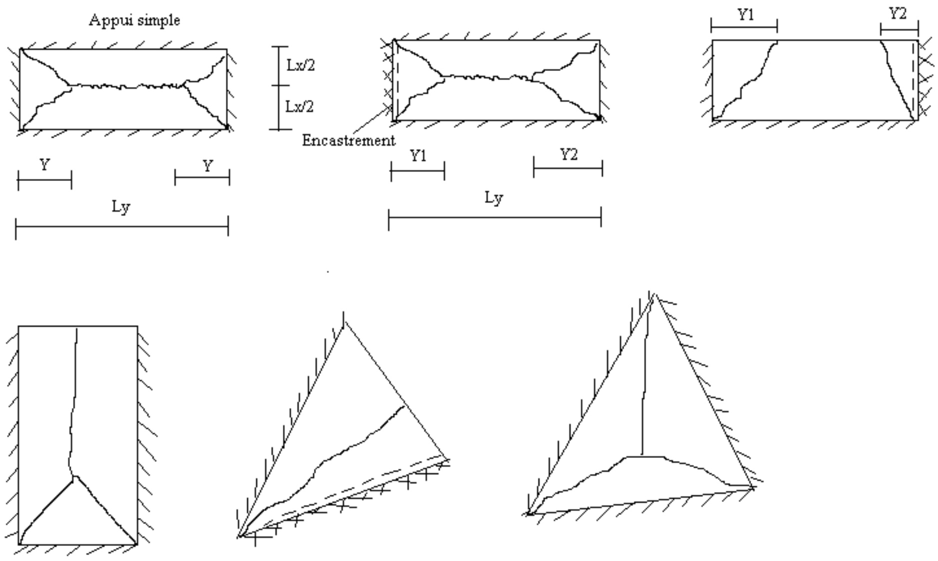
Les prévisions des fissures seront en fonction du type de charges (réparties ou concentrées) et du type d'appuis (encastrement, simple ou côté libre).

Les hypothèses de calcul sont :

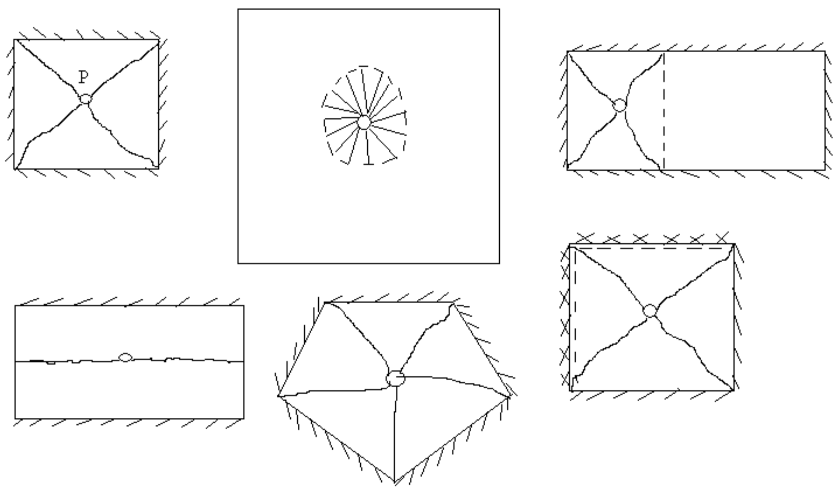
a) *La ligne de rupture divise la dalle en plusieurs régions appelées régions rigides, et elles sont supposées rester planes.*
b) *Les lignes de rupture sont des lignes droites et se terminent toujours sur le pourtour de la dalle.*
c) *Une ligne de rupture entre deux régions rigides doit passer par l'intersection des axes de rotation de ces régions.*
d) *L'axe de rotation se trouve toujours le long du support.*
e) *La ligne de rupture négative est toujours répandue le long de l'axe de rotation de la région rigide.*
f) *Les lignes de rupture qui sont causées par les moments de flexion positifs sont appelées lignes de rupture positives et sont représentées par une ligne continue en zigzag. Les lignes de rupture qui sont causées par les moments de flexion négatifs sont appelées lignes de rupture négatives et sont représentées par une ligne discontinue.*
g) *Conventionnellement on désignera :*
   - *Un côté libre par un trait sans hachures*
   - *Un appui simple par une hachure*
   - *Un encastrement par une double hachure*

8.2. Exemples de fissuration de dalle

a) <u>Cas des charges réparties :</u>



b) <u>Cas des charges concentrées :</u>



8.3. Calcul des moments (principe du travail virtuel)

Le calcul des moments de flexion des lignes de rupture se base sur le principe du travail virtuel qui consiste à évaluer le travail provoqué par les charges externes, il sera appelé travail externe, et à évaluer le travail provoqué par les moments internes, il sera appelé travail interne. Le principe du travail virtuel consiste donc à poser l'équation d'équilibre la somme des travaux égale à zéro.

$$\boxed{\sum \textit{des Travaux Externes} - \sum \textit{des Travaux Internes} = 0}$$

a) *Travail externe*

Le travail externe est égale au produit de la force concentrée par son déplacement

$$\boxed{T_{ext} = P \cdot f}$$

Pour le cas particulier de la charge répartie :

$$\boxed{T_{ext} = \text{charge répartie x Surface x déplacement du centre de gravité de la surface}}$$

b) *Travail interne*

Le travail interne est égal au produit du moment par la projection de la ligne de rupture sur l'axe de rotation par l'angle de rotation de la région rigide sur son axe.

$$\boxed{T_{int} = M \cdot l \cdot \theta}$$

Le principe du travail virtuel nous permet d'évaluer le moment de flexion en fonction de la charge externe appliquée sur la dalle.

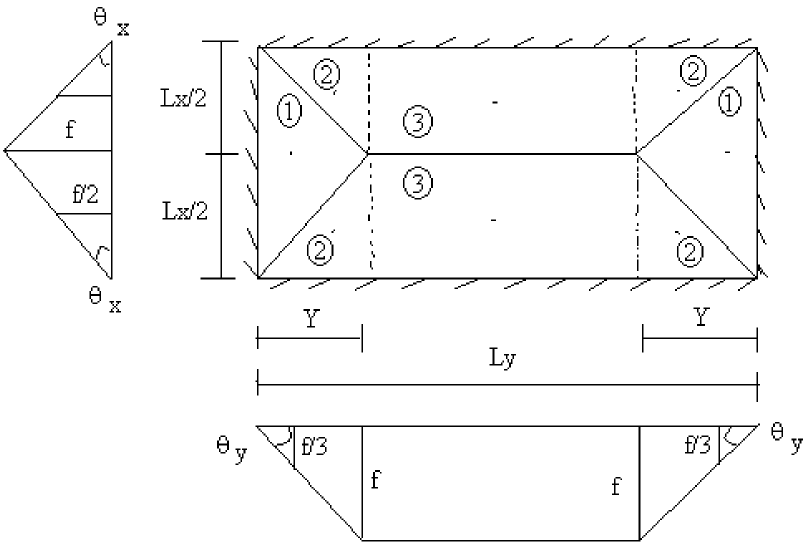
8.4. Exemple de calcul

Déterminer la relation entre la charge uniformément répartie q par unité de surface sur une dalle rectangulaire reposant sur des appuis simples sur les 4 côtés et ayant un ferraillage quadratique M_x et M_y.

Solution :

a) *Evaluation du travail externe*

Pour pouvoir faciliter le calcul des surfaces et leurs centres de gravité, on divisera chaque région rigide en surfaces élémentaires (rectangles et triangles)



Le travail externe total sera égale à :

$$\boxed{T_{ext} = 2T_{ext}^{1} + 4T_{ext}^{2} + 2T_{ext}^{3}}$$

Avec :

$$T_{ext}^{1} = q.S^{1}.f_{cdg}^{1} = q.\left[\frac{1}{2}L_X.Y\right].\frac{f}{3} = q.f.\left(\frac{1}{6}L_X.Y\right)$$

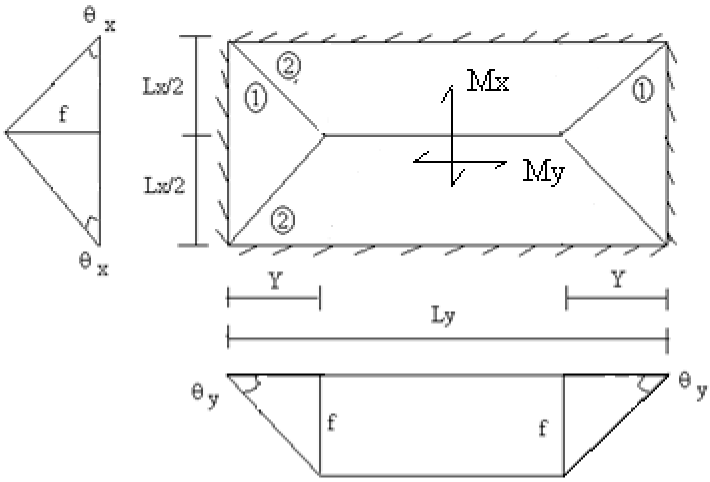
$$T_{ext}^{2} = q.S^{2}.f_{cdg}^{2} = q.\left[\frac{1}{2}\frac{L_X}{2}.Y\right].\frac{f}{3} = q.f.\left(\frac{1}{12}L_X.Y\right)$$

$$T_{ext}^{3} = q.S^{3}.f_{cdg}^{3} = q.\left[\frac{L_X}{2}.(L_Y - 2Y)\right].\frac{f}{2} = q.f.\left(\frac{1}{4}L_X.L_Y - \frac{1}{2}L_X.Y\right)$$

D'où :

$$\boxed{T_{ext} = q.f.\left(-\frac{1}{3}L_X.Y + \frac{1}{2}L_X.L_Y\right)}$$

b) *<u>Evaluation du travail interne</u>*



Le travail interne total sera égale à :

$$\boxed{T_{int} = 2.T_{int}^1 + 2.T_{int}^2}$$

Avec :

$$T_{int}^1 = M_Y.L_X.\theta_Y \quad avec \quad \theta_Y = \frac{f}{Y} \qquad d'où \quad T_{int}^1 = M_Y.f.\left(\frac{L_X}{Y}\right)$$
$$T_{int}^2 = M_X.L_Y.\theta_X \quad avec \quad \theta_X = \frac{f}{L_X/2} = 2\frac{f}{L_X} \quad d'où \quad T_{int}^2 = M_X.f.\left(2.\frac{L_Y}{L_X}\right)$$

D'où :

$$\boxed{T_{int} = f.\left[M_Y\left(2.\frac{L_X}{Y}\right) + M_X\left(4.\frac{L_Y}{L_X}\right)\right]}$$

En appliquant le principe du travail virtuel $T_{ext} = T_{int}$ on aura :

$$q.f.\left(-\frac{1}{3}L_X.Y + \frac{1}{2}L_X.L_Y\right) = f.\left[M_Y\left(2.\frac{L_X}{Y}\right) + M_X\left(4.\frac{L_Y}{L_X}\right)\right]$$

Cette équation contient deux inconnues M_X et M_Y pour la résoudre il faut réduire le nombre d'inconnue à une seule. Pour cela on donne une liaison entre ces deux inconnues comme par exemple $M_X=M_Y=M$, et on respectera ce choix au niveau du calcul de ferraillage.

On continuera l'exemple avec une application numérique :
$L_X = 2$ m et $L_Y = 3$ m

$$T_{ext} = T_{int} \quad devient \quad q.f.\left(-\frac{2}{3}Y + 3\right) = M.f.\left(\frac{4}{Y} + 6\right)$$

D'où
$$\boxed{M = q.\frac{\left(-\frac{2}{3}Y+3\right)}{\left(\frac{4}{Y}+6\right)}}$$

Le moment M dépend de la valeur de Y position de la ligne de rupture positive

8.5. Détermination de la position de la ligne de rupture positive

Le moment M recherché est le moment qui correspond à la situation la plus défavorable, cette dernière correspond au chargement maximum q_{max}. pour trouver la valeur maximale de q il faut poser la dérivée de la fonction q=f(Y) égale à 0.

Donc q'(Y)=0 avec $\quad q(Y) = M.\frac{\left(\frac{4}{Y}+6\right)}{\left(-\frac{2}{3}Y+3\right)}$

Pour la fonction q(Y), M est une constante, et on pose aussi $\quad q(Y) = \frac{U(Y)}{V(Y)}$

D'où q'=0 $\Longrightarrow$ $\boxed{U'.V - U.V' = O}$

Dans notre exemple :

$U = \frac{4}{Y} + 6 \Longrightarrow U' = -\frac{4}{Y^2}$ et $V = -\frac{2}{3}Y + 3 \Longrightarrow V' = -\frac{2}{3}$

$U'V - UV' = \left(-\frac{4}{Y^2}\right)\left(-\frac{2}{3}Y + 3\right) - \left(\frac{4}{Y} + 6\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = O$

$\frac{+\frac{8}{3}Y - 12 + \frac{8}{3}Y + 4Y^2}{y^2} = 0 \Longrightarrow -12 + \frac{16}{3}Y + 4Y^2 = 0 \Longrightarrow Y^2 + \frac{4}{3}Y - 3 = 0$

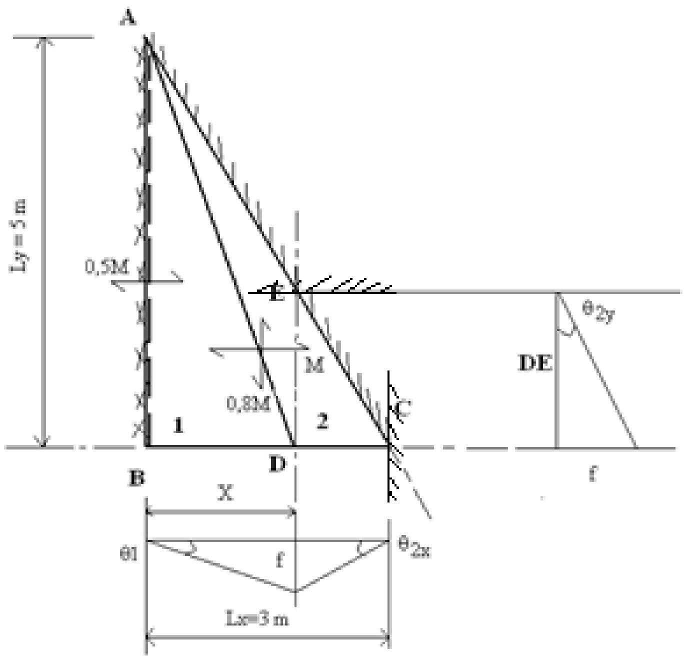
La solution est $\boxed{y = 1{,}19\ m}$

On remplace y par sa valeur dans la formule de M

$$\boxed{M = q.\frac{\left(-\frac{2}{3}1{,}19 + 3\right)}{\left(\frac{4}{1{,}19} + 6\right)} = 0{,}236.q}$$

8.6. Etude du cas des appuis inclinés

Exemple :



Le cas des appuis inclinés pose problème d'incompatibilité entre la déformation et la disposition des armatures. Les armatures sont généralement disposées sous forme de quadrillage suivant les directions x et y, alors que la déformation de la région rigide 2 (dans notre exemple) est inclinée. Pour cela nous allons remplacer la rotation réelle de la région rigide 2 autour de l'axe AC par deux autres rotations, la première suivant x et la deuxième suivant y.

Solution :

⇨ Le travail externe total est égale à :

$$\boxed{T_{ext} = T_{ext}^1 + T_{ext}^2}$$

$$T_{ext}^1 = q.S^1.\frac{f}{3} \quad et \quad T_{ext}^2 = q.S^2.\frac{f}{3} \quad \rightarrow \quad T_{ext} = q.S.\frac{f}{3}$$

$$Avec \quad S = S^1 + S^2 = \frac{1}{2}.5.3 = 7{,}5\ m \quad d'où \quad \boxed{T_{ext} = 2{,}5.q.f}$$

⇨ Le travail interne total est égale à :

$$\boxed{T_{int} = T_{int}^1 + T_{int}^2}$$

$$T_{int}^1 = M.L_y.\theta_1 + 0{,}5M.L_y.\theta_1 \quad avec \quad \theta_1 = \frac{f}{X} \quad d'où \quad T_{int}^1 = 1{,}5M.5.\frac{f}{X} = \frac{7{,}5}{X}M.f$$

La rotation réelle de la région rigide 2 autour de l'axe AC sera remplacée par une rotation autour de l'axe horizontal passant par le point C (intersection du support AC avec l'horizontale), et une autre rotation autour de l'axe vertical passant par le point E (intersection du support AC avec la verticale).

$$T_{int}^2 = M.L_y.\theta_{2x} + 0{,}8M.X.\theta_{2y} \quad avec \quad \theta_{2x} = \frac{f}{DC} \quad et \quad \theta_{2y} = \frac{f}{DE}$$

$$Avec\ aussi \quad DC = L_X - X = 3 - X \quad et \quad \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \rightarrow DE = AB\frac{DC}{BC} \rightarrow \quad DE = 5 - \frac{5}{3}X$$

$$T_{int}^2 = M.5.\frac{f}{(3-X)} + 0{,}8M.X.\frac{f}{\left(5-\frac{5}{3}X\right)} = M.f.\left[\frac{5}{(3-X)} + \frac{0{,}8}{\left(5-\frac{5}{3}X\right)}\right]$$

$$D'où \quad \boxed{T_{int} = M.f.\left[\frac{7{,}5}{X} + \frac{5}{(3-X)} + \frac{0{,}8}{\left(5-\frac{5}{3}X\right)}\right]}$$

Principe du travail virtuel $T_{ext} = T_{int}$

$$2{,}5.q.f = M.f.\left[\frac{7{,}5}{X} + \frac{5}{(3-X)} + \frac{0{,}8}{\left(5-\frac{5}{3}X\right)}\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{M = q.\frac{2{,}5}{\left[\frac{7{,}5}{X} + \frac{5}{(3-X)} + \frac{0{,}8}{\left(5-\frac{5}{3}X\right)}\right]}}$$