Chapitre IV : Les Poteaux

1. Généralités.

Les poteaux dans une structure en portiques sont les éléments porteurs, ils supportent les charges verticales transmises par les poutres de planchers ainsi que les charges horizontales dûes au séisme ou au vent.

Dans le cas où les portiques sont contreventés par des voiles les poteaux peuvent reprendre une partie des efforts horizontaux comme ils peuvent reprendre uniquement les efforts verticaux.

Dans la majorité des cas les poteaux sont soumis à la Flexion composée, dans quelques cas ils sont soumis soit à la Compression Simple soit à la Traction Simple.

Les formes géométriques les plus usuelles sont : le carré, le rectangle, en T ou le poteau circulaire.

Dans le cas d'un effort de compression, le poteau doit être vérifié au Flambement (Etat Limite Ultime de stabilité de Forme).

Le poteau peut être court ou élancé, le règlement de Béton Armé interdit l'utilisation de poteaux courts dans les Batiments à cause du risque élevé de Cisaillement.

Le RPA exige que les poteaux soient coulés sur toute leur hauteur he en une seule fois et les dés de calage sont interdits.

2. Coffrage :

2.1. Prédimensionnement :

Les dimensions du poteau doit être en rapport avec les charges à supporter, dans beaucoup de cas, des impératifs architecturaux ou esthétiques ou d'encombrement imposent un gabarit maximal à ne pas dépasser ou même une forme géométrique particulière à adapter.

Du point de vue simplification, il y a intérêt à standardiser et réduire les types de poteaux à un même étage.

Pour mieux rationaliser l'utilisation du coffrage, il est préférable de maintenir la section des poteaux constante sur deux ou trois étages consécutifs puis procéder à une réduction progressive de la section.

Le prédimensionnement se fait pour le poteau le plus sollicité (Généralement un poteau intérieur) en respectant les étapes suivantes :

a/ Donner une dimension initiale au poteau (estimation).

b/ Déterminer l'effort Normal N_u réel à la base du poteau (à l'Etat Limite Ultime) en utilisant la Combinaison $1{,}35G + 1{,}5Q$, en procédant à la descente des charges et en appliquant la loi de dégression des charges d'exploitation mentionnée dans le Règlement " charges Permanentes et charges d'Exploitation".
Selon le CBA93 (Art B.8.1.1. p.150), cette charge peut être majorée de :

* 15% pour les poteaux centraux dans le cas de Batiments à deux travées.
* 10% pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans le cas de Batiments comportant au moins trois travées.

c/ Déterminer la capacité portante $\overline{N_u}$ du poteau considéré en le supposant être soumis à la compression simple et ayant un ferraillage minimum de $A = \frac{B}{1000}$.

$$\boxed{\overline{N_u} = \alpha \cdot \left[\frac{Br \cdot f_{c28}}{0{,}9 \cdot \gamma_b} + A \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \right]}$$

d/ Vérifier l'inégalité suivante,

$$\boxed{N_u < \overline{N_u}.}$$

Remarques :

1 – Dans le cas de réduction de section du poteau aux étages supérieurs, l'opération de prédimensionnement doit être faite pour chaque nouvelle section.

2 – Le poteau le plus sollicité n'est pas forcément le poteau qui couvre la plus grande surface, il faut tenir compte de la variation de la charge d'exploitation Q au niveau des planchers.

2.2. Dimensionnement.

La dimension finale d'un poteau doit respecter les conditions minimales exigées par le Règlement Parasismique Algérien RPA.

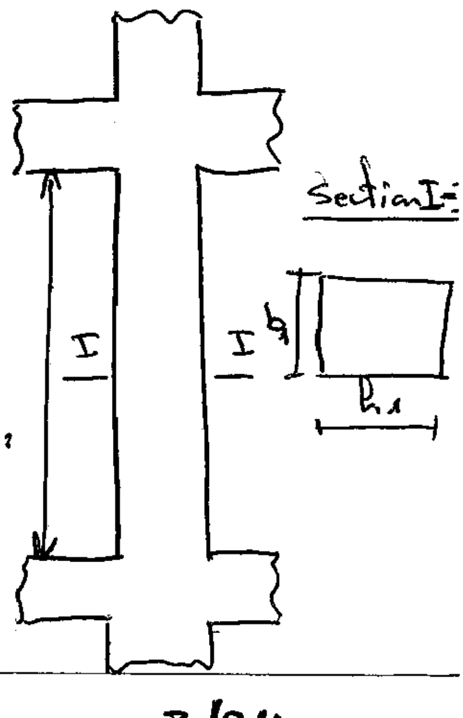
Pour une section rectangulaire :

$Min(b_1, h_1) \geq 25$ cm en Zones I et IIa

$Min(b_1, h_1) \geq 30$ cm en Zones IIb et III

$Min(b_1, h_1) \geq h_e/20$

$1/4 < b_1/h_1 < 4$



Pour une section circulaire :

Le Diamètre D doit satisfaire les conditions suivantes,

$D \geq 25$ cm en Zone I

$D \geq 30$ cm en Zone IIa

$D \geq 35$ cm en Zones IIb et III

$D \geq h_e/15$

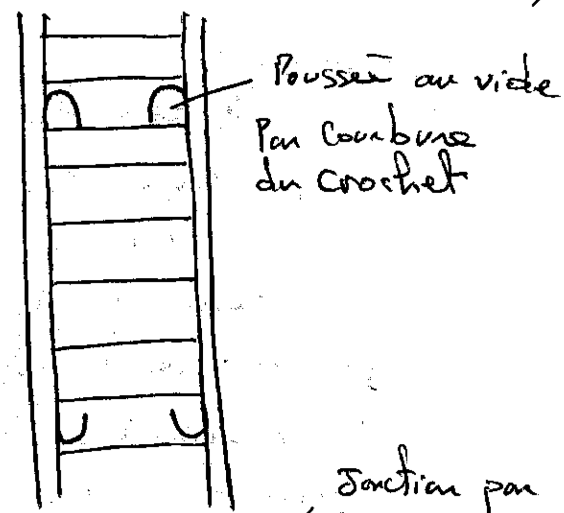
3. Conception et disposition des armatures :

Un élément court en Béton non armé se rompt par écrasement.
Un élément long en Béton non armé se rompt par flambage.
Les mêmes éléments, supportant les mêmes charges, mais avec une armature bien disposée, sont stables.

3.1. Armatures longitudinales :

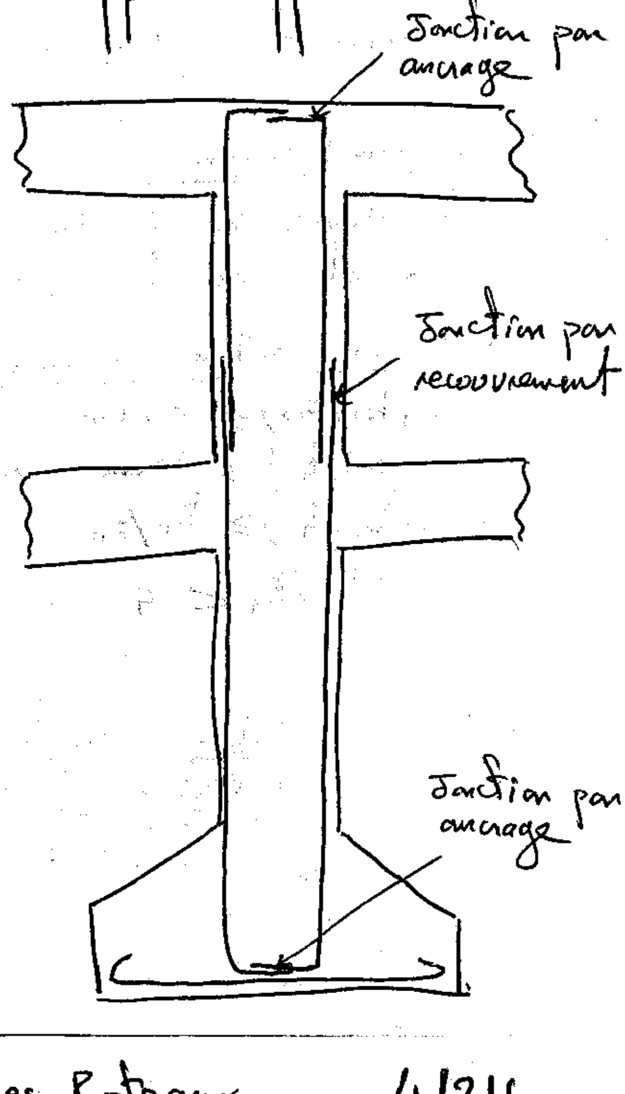
Ils favorisent l'équilibre sous l'effet de la flexion, participent à l'effort de compression avec le béton et résistent, avec le béton, au phénomène de flambement.

Les crochets sont interdits car ils entraînent une poussée au vide.

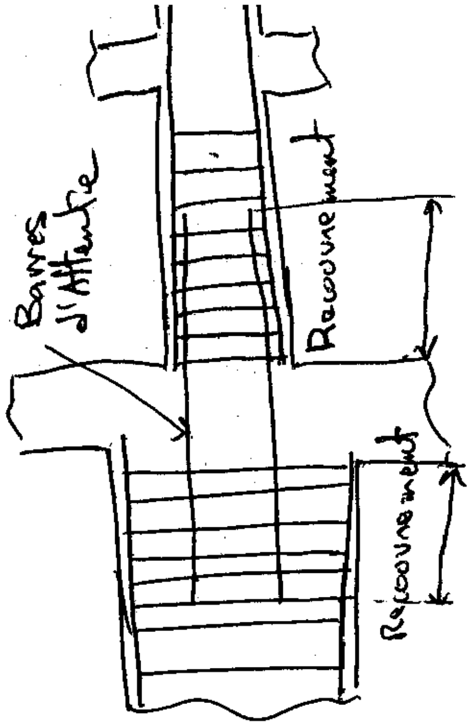


Les jonctions des poteaux sont assurées :

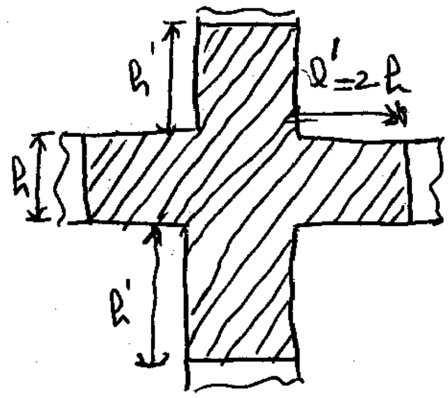
* en bas : par ancrage dans la semelle, la longrine ou en poteau inférieur.
* en haut : par ancrage dans les poutres ou les planchers.



Dans le cas de réduction de section du poteau entre deux étages il faut assurer la continuité du ferraillage en prévoyant double recouvrement à l'aide de barres d'attente.



* **Pourcentage minimal du RPA :**
  - 0,7 % en Zone I
  - 0,8 % en Zone IIa
  - 0,9 % en Zones IIb et III
* **Pourcentage maximal du RPA,**
  - 4 % en Zone Courante
  - 6 % en Zone de Recouvrement
* **Distance minimale entre les barres :**
  Elle ne doit pas dépasser :
  - 25 cm en Zones I et IIa
  - 20 cm en Zones IIb et III
* **Longueur minimale des recouvrements**
  La jonction par recouvrement doit être faite si possible à l'extérieur de la zone nodale
  - 40 ϕ en Zones I et IIa
  - 50 ϕ en Zones IIb et III.
* **Barre à Haute Adhérence**
  Le RPA exige pour les armatures longitudinales des barres à Haute Adhérence ayant au moins 12 mm de Diamètre (HA12).



$h' = \mathrm{Max}\left[\frac{h_e}{6}; b_1; h_1; 60\,\mathrm{cm}\right]$

3.2. Armatures transversales :

En plus de la résistance à l'effort tranchant, les armatures transv ~~longitudinales~~ s'opposent à l'expansion latérale du béton et relient les barres longitudinales entre elles.

Les armatures transversales des poteaux sont calculées à l'aide de la formule équilibrant l'effort tranchant : (CBA93 Art. A.5.1.2.3.)

$$\boxed{\frac{A_t}{b_0 \cdot S_t} \geq \frac{\gamma_s(\tau_u - 0{,}3 f_{tj} \cdot K)}{0{,}9 f_e(\cos\alpha + \sin\alpha)}}$$

Avec $K = 1$ pour la Flexion Simple

$K = 0$ pour reprise de Bétonnage ou Fiss. très préjudiciable

$K = 1 + 3\frac{\sigma_{cm}}{f_{cj}}$ pour F. Comp. avec N = Compression

$K = 1 - 10\frac{\sigma_{cm}}{f_{cj}}$ pour F. Comp. avec N = Traction

En plus, le RPA exige de vérifier :

$$\boxed{\frac{A_t}{t} = \frac{\rho_a \cdot V_u}{h_1 \cdot f_e}}$$

où V_u = Effort Tranchant de calcul

h_1 = hauteur totale de la section brute.

f_e = limite Elastique de l'acier d'armature transversale.

t = Espacement des armatures transversales

ρ_a = Coefficient correcteur.

$$\rho_a = \begin{cases} 2{,}50 & \text{si Elancement } \lambda_g \geq 5 \\ 3{,}75 & \text{cas contraire.} \end{cases}$$

Espacements minimal du RPA :

* Dans la zone nodale : $- t \leq \text{Min}(10\phi_\ell, 15\text{cm})$ en zones I et II_a

  $- t \leq 10\text{cm}$ en zones II_b et III.

* Dans la zone courante : $- t \leq 15\phi_\ell$ en Zones I et II_a

  $- t \leq \text{Min}\left(\frac{b_1}{2}; \frac{h_1}{2}; 10\phi_\ell\right)$ en Zones II_b et III

4. Flexion Composée.

La flexion composée se distingue par la présence de deux sollicitations, l'effort normal (de compression ou de traction) et la flexion. Ces sollicitations donnent trois possibilités de déformation :

* une section entièrement tendue : c'est le cas où l'effort normal est une traction et domine le moment.
* une section partiellement comprimée : c'est le cas où le moment est dominant, l'effort normal peut être de compression ou de traction
* une section entièrement comprimée : c'est le cas où l'effort normal est une compression et domine le moment.

Comme pour les autres sollicitations (Flexion Simple, Compression simple et Traction Simple), le calcul de détermination des armatures longitudinales se fait en trois étapes :

1- Détermination des armatures à l'Etat Limite Ultime
2- Vérification des contraintes à l'Etat Limite de Service
3- Redétermination des armatures mais à l'Etat Limite de Servi si les contraintes ne sont pas vérifiées.

4.1. Détermination des armatures longitudinales à l'E.L.U.

L'E.L.U. comporte deux états, celui de la Résistance et celui de la stabilité de forme (Flambement).

Le Reglement de Béton Armé préconise une méthode forfaitaire pour la détermination de trois excentricités à l'ELU de stabilité de forme afin d'éliminer les risques de flambement puis passer à l'E.L.U. de Résistanc pour déterminer les armatures avec un moment calculé à l'aide de ces trois excentricités.

4.1.1. Etat Limite Ultime de stabilité de Forme.

A défaut d'utiliser une méthode de résistance des matériaux (RDM) pour la vérification du Flambement et en tenant compte de l'hétérogénéité du matériau Béton Armé, le règlement de Béton Armé préconise une méthode forfaitaire (dans le cas de la Flexion Composée) pour éliminer totalement les risques d'occurence d'une déformation latérale (Flambement) du poteau, et ce en calculant trois excentricités :

- e_1 = excentricité du premier ordre
- e_2 = excentricité du second ordre
- e_a = excentricité additionnelle d'imperfection géométrique

Le but de cette méthode forfaitaire est de calculer un nouveau moment à l'E.L.U. qui sera fonction de ces trois excentricités et qui sera le moment de calcul à l'E.L.U. de Résistance pour la détermination des armatures longitudinales.

a/ $$e_1 = M_u / N_u.$$

b/ $$e_2 = \frac{3\, l_f^2 (2 + \alpha . \Phi)}{10^4 . h.}$$

où h = hauteur totale de la section dans la direction du Flambement.

$$\Phi = \frac{\text{Def due au Fluage}}{\text{Def. Inst. du béton.}}$$

En général pour le béton $\Phi = 2$

$$\alpha = \frac{M_{perm}}{M_u} = \frac{M_{uG}}{M_u.}$$

c/ $$e_a = \text{Max}\left[\frac{l_0(cm)}{250} \text{ et } 2 \text{ cm}\right]$$

Tout en vérifiant l'inégalité suivante :

$$\frac{l_f}{h} \leq \text{Max}\left[15 \text{ et } \frac{20 . e_1}{h}\right]$$

4.1.2. Etat Limite Ultime de Résistance

Les calculs de détermination des armatures longitudinales se fait à l'aide des deux sollicitations suivantes :

* $\{ N_u \}$
* $\{ M_G = N_u \cdot (e_1 + e_2 + e_a) \}$

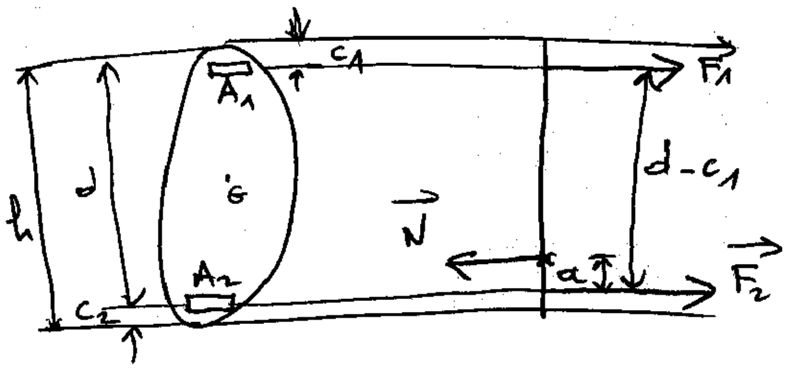
Ce moment M_G est rapporté au centre de Gravité G du béton seul.
Ce système $(N_u ; M_G)$ peut être remplacé par un effort normal unique N_u appliqué au centre de pression C tel que : $\{ GC = M_G / N_u \}$

Comme il a été mentionné précédemment, il y a trois possibilités de déformations :

* Section Entièrement Tendue (S.E.T.)
* Section Partiellement Comprimée (S.P.C.)
* Section Entièrement Comprimée (S.E.C.)

4.1.2.1. Section Entièrement Tendue (S.E.T.)

Une section est entièrement tendue si l'effort normal N est un effort de Traction et si le Centre de pression C se trouve entre les armatures.
Le béton tendu étant negligé, quelque soit la section de béton, on aura :



$1^{ère}$ Équation d'Équilibre :

$$\Sigma N_i = 0 \Rightarrow -N + F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow -N + A_1 \cdot \sigma_s + A_2 \cdot \sigma_s = 0$$

Le cas économique correspond à $\sigma_s = \overline{\sigma_s} = fe/\gamma_s$.

$$\Rightarrow -N + A_1 \overline{\sigma_s} + A_2 \overline{\sigma_s} = 0 \quad (1)$$

$2^{ème}$ Équation d'Équilibre :

$$\Sigma M_i /_{F_2} = 0 \Rightarrow -N \cdot a + F_1 (d - c_1) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow -N \cdot a + A_1 \cdot \overline{\sigma_s} (d - c_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{N \cdot a}{\overline{\sigma_s} (d - c_1)}}$$

$$(1) \rightarrow \boxed{A_2 = \frac{N}{\overline{\sigma_s}} - A_1}$$

4.1.2.2. Section Partiellement Comprimée (S.P.C.)

Une section est partiellement comprimée :

* Si le centre de pression C se trouve à l'extérieur du segment limité par les armatures quelque soit la nature de l'effort normal N compression ou traction.
* Si le centre de pression C se trouve à l'intérieur du segment limité par les armatures, N est un effort de compression et la condition suivante est vérifiée :
  - Pour une section rectangulaire :

$$N(d - c') - M_1 \leq \left(0{,}337 - 0{,}81 \frac{c'}{h}\right) \cdot b \cdot h^2 \cdot \overline{\sigma_b}$$

  - Pour une section en T :

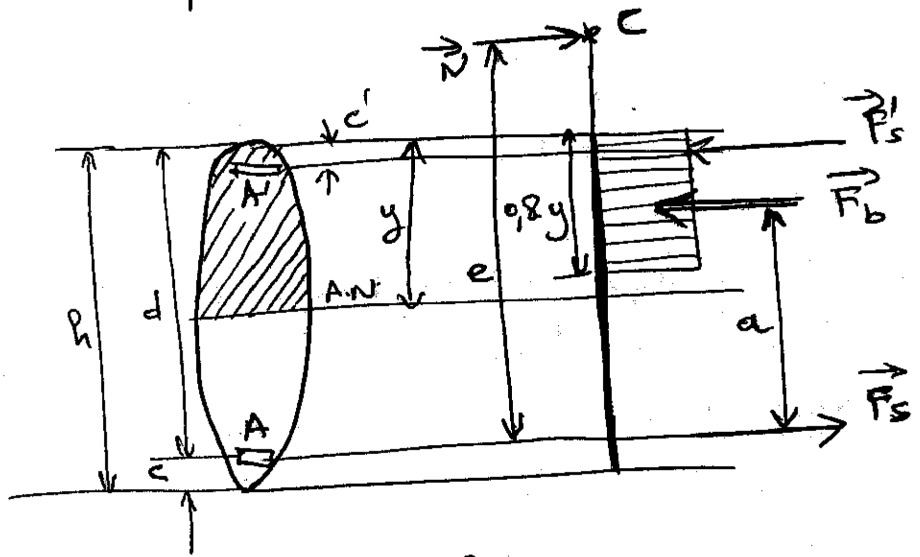
$$N_r(d - c') - M_r \leq \left(0{,}337 - 0{,}81 \frac{c'}{h}\right) b_0 \cdot h^2 \cdot \overline{\sigma_b}$$

Avec : $N_r = N - (b - b_0) h_0 \cdot \overline{\sigma_b}$.

$M_r = M_1 - (b - b_0) h_0 \left(d - \frac{h_0}{2}\right) \cdot \overline{\sigma_b}$.

M_1 = Moment par rapport au centre de gravité des armatures inférieures.

Quelque soit la section de béton :



<u>1ère Equation d'Equilibre</u> :

$$\Sigma F_i = 0 \Rightarrow N + F_s - F_b - F'_s = N + A\,\sigma_s - F_b - A'\sigma'_s = 0 \quad (1)$$

<u>2ème Equation d'Equilibre</u>,

$$\Sigma M_i/F_s = 0 \Rightarrow N.e - F'_s(d-c') - a.F_b = N.e - A'\sigma'_s(d-c') - a.F_b = 0 \quad (2)$$

Si on pose : $N + A.\sigma_s = A_1.\sigma_s$ et $A' = A'_1$ et $N.e = M_1$ $\Rightarrow$ Les deux Equations d'Equilibre deviennent

$$\begin{cases} A_1.\sigma_s - F_b - A'_1\sigma'_s = 0 & (1') \\ M_1 - A'_1.\sigma'_s(d-c') - a.F_b = 0 & (2') \end{cases}$$

Ce sont les équations d'Equilibre d'une section soumise à la flexion simple avec un moment extérieur M_1 avec A'_1 comme armatures comprimées et A_1 comme armatures tendues.

Le système d'equations 1' et 2' est valable pour N = Compression.

Nous déterminerons donc les sections d'armatures comprimées A'_1 et tendues A_1 de la section soumise à la flexion simple.

Une fois A'_1 et A_1 déterminées, nous déterminerons les sections d'armatures tendues A et comprimées A' pour la section soumise à la flexion composée :

$$\boxed{A' = A'_1} \quad \text{et} \quad \boxed{A = A_1 - \frac{N}{\sigma_s}}$$

De la même façon si N est un effort de Traction, on aura :

$$\boxed{A' = A'_1} \quad \text{et} \quad \boxed{A = A_1 + \frac{N}{\sigma_s}}$$

Remarque :

a/ Ces formules sont valables quelque soit la forme de la section.

b/ si les expressions ci-dessus donnent une section d'armatures tendues A négative ($A<0$), deux cas sont possible.

b1/ si $A'=0$ ⇒ Aucune armature ni tendue ni comprimée n'est necessaire, il suffit donc de prévoir $A = A_{min}$ avec $A_{min} = \frac{B}{1000}$.

b2/ si $A' \neq 0$ ⇒ l'effort normal est équilibré par le béton comprimé et les armatures comprimées, les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{cases} N - F_b - A' \cdot \sigma'_s = 0 & (1'') \\ N \cdot e - A' \cdot \sigma'_s (d - c') - a \cdot F_b = 0. & (2'') \end{cases}$$

de $(1'') \rightarrow A' \cdot \sigma'_s = N - F_b$.

$(2'')$ devient : $\boxed{N \cdot e - (N - F_b)(d - c') - a \cdot F_b = 0}$ (3)

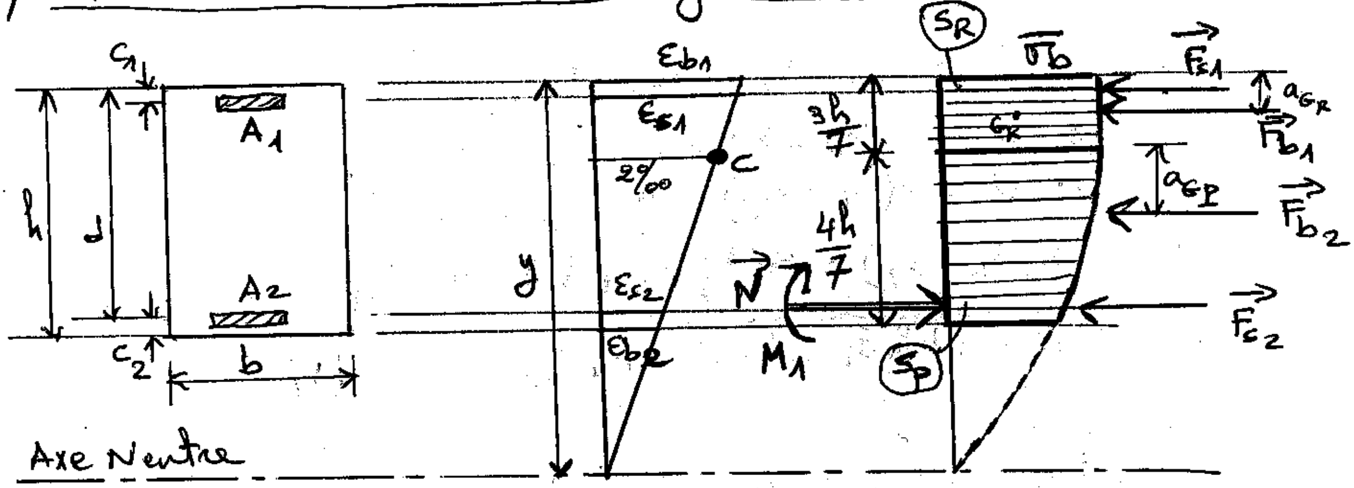
L'équation (3) contient une seule variable y la position de l'axe neutre. L'équation (3) aura la forme d'une équation du second degré et sera déterminée selon le cas d'une section rectangulaire ou en T.

4.1.2.3. Section Entièrement Comprimée (S.E.C)

Dans ce cas, le diagramme rectangulaire simplifié n'est plus applicable car la section n'est pas partiellement comprimée Le diagramme parabole-rectangle sera appliqué, avec un axe neutre en dessous (à l'exterieur) de la section ($y > h$).

Ce cas correspond au domaine 3 (Pivot c) où la déformation du béton à $\frac{3h}{7}$ en dessous de la fibre la plus comprimée est égale à $\varepsilon_b = 2‰$ (au point c).

a/ Etude de la Section Rectangulaire



Après avoir déterminé le centre de pression c, on travaillera avec le nouveau système (N, M_1) avec M_1 = moment rapporté au Centre de gravité des armatures inférieures A_2.

S_R = surface du rectangle : $\boxed{S_R = \frac{3h}{7} \cdot \overline{\sigma_b}}$

a_{G_R} = position du Cdg du rectangle : $\boxed{a_{G_R} = \frac{3 \cdot h}{2 \times 7} = \frac{3 \cdot h}{14}}$

S_P = Surface de la portion de la Parabole.

$$S_P = \frac{4}{7} h \cdot \overline{\sigma_b}\left[1 - \frac{\frac{16}{49} \cdot h^2}{3\left(y - \frac{3h}{7}\right)^2}\right] \Rightarrow \boxed{S_P = h \cdot \overline{\sigma_b}\left[\frac{4}{7} - \frac{3{,}0476}{\left(\frac{7y}{h} - 3\right)^2}\right]}$$

a_{G_P} = position du Cdg. de la portion de la parabole :

$$a_{G_P} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4h}{7}\left[1 - \frac{4h \cdot \overline{\sigma_b}}{21 \cdot S_P}\right] \Rightarrow \boxed{a_{G_P} = \frac{3h}{7} - \frac{4h^2 \cdot \overline{\sigma_b}}{49 \cdot S_P}}$$

si on pose : $\boxed{\psi = 1 - \frac{3{,}0476}{\left(\frac{7y}{h} - 3\right)^2}}$ S_P et a_{G_P} deviennent :

$$\boxed{S_P = h \cdot \overline{\sigma_b}\left(\psi - \frac{3}{7}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{a_{G_P} = \frac{3}{7} h - \frac{4 \cdot h}{49\left(\psi - \frac{3}{7}\right)}}$$

Remarque :

Pour la section entièrement Comprimée, le domaine est : $h \leq y \leq \infty$ ce qui correspondra à : $\boxed{0{,}8095 \leq \psi \leq 1}$

$1^{ère}$ Equation d'Equilibre.

$$\Sigma F_i = 0 \Rightarrow N - F_{b_1} - F_{b_2} - F_{s_1} - F_{s_2} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow N - b.S_R - bS_p - A_1\sigma_{s_1} - A_2\sigma_{s_2} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow N - b(S_R + S_p) - A_1\sigma_{s_1} - A_2\sigma_{s_2} = 0 \quad (1)$$

avec $b(S_R + S_p) = b\left(\frac{3h}{7}\overline{\sigma}_b + h\overline{\sigma}_b\left(\psi - \frac{3}{7}\right)\right) = \psi . b . h . \overline{\sigma}_b$

$$(1) \rightarrow \boxed{N - \psi b h \overline{\sigma}_b - A_1\sigma_{s_1} - A_2\sigma_{s_2} = 0} \quad (1')$$

$2^{ème}$ Equation d'Equilibre.

$$\Sigma M_{i/F_{s_2}} = 0 \Rightarrow M_1 - F_{b_1}(d - a_{G_R}) - F_{b_2}\left(d - \frac{3h}{7} - a_{G_p}\right) - F_{s_1}(d - c_1) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow M_1 - bS_R(d - a_{G_R}) - bS_2\left(d - \frac{3h}{7} - a_{G_p}\right) - A_1\sigma_{s_1}(d - c_1) = 0 \quad (2)$$

Avec :

$$F_{b_1}(d - a_{G_R}) + F_{b_2}\left(d - \frac{3h}{7} - a_{G_p}\right) = \left[0{,}3571 + \psi\left(\frac{d}{h} - 0{,}8571\right)\right] b . h^2 \overline{\sigma}_b$$

$$(2) \rightarrow \boxed{M_1 - \left[0{,}3571 + \psi\left(\frac{d}{h} - 0{,}8571\right)\right] b . h^2 \overline{\sigma}_b - A_1\sigma_{s_1}(d - c_1) = 0} \quad (2')$$

Dans notre cas, on veut aboutir à une section qui sera en même temps résistante et économique. Pour cela il faut que les allongements unitaires des deux sections A_1 et A_2 soient supérieurs ou égals à ε_l (allongement limite) pour que : $\sigma_{s_1} = \sigma_{s_2} = f_e/\gamma$ ce qui va donner une section global $A_1 + A_2 =$ Aminimale.

$\Rightarrow$ de $(1') \rightarrow \left[(A_1 + A_2)\overline{\sigma}_s\right]_{min} = \left[N - \psi b . h \overline{\sigma}_b\right]_{min}$

ceci s'obtient avec $\boxed{\psi = 1}$ c'est à dire $y \rightarrow \infty$.

Nous sommes ramené au dernier cas extrême du domaine 3 avec σ_2 ($\varepsilon_s = 2‰ = \varepsilon_b$) qui correspond au raccourcissement unitaire de 2‰ pour toute la section de Béton Armé.

Les equations d'équilibre deviennent.

$$\begin{cases} \Sigma F_i = N - b . h . \overline{\sigma}_b - A_1 . \sigma_2 - A_2 . \sigma_2 = 0 & (1'') \\ \Sigma M_{i/F_{s_2}} = M_1 - (d - 0{,}5h) b h \overline{\sigma}_b - A_1 . \sigma_2 (d - c_1) = 0 & (2'') \end{cases}$$

de (2'') $\longrightarrow$ $$\boxed{A_1 = \frac{M_1 - (d - 0{,}5h)\, b \cdot h \cdot \overline{\sigma_b}}{\sigma_2 (d - c_1)}}$$

de (1'') $\longrightarrow$ $$\boxed{A_2 = \frac{N - b \cdot h \cdot \overline{\sigma_b}}{\sigma_2} - A_1}$$

Remarque :

Ces résultat ne sont valables que si $A_1 \geq 0$ et $A_2 \geq 0$.
Du moment que A_1 se trouve du côté le plus comprimé de la section, donc $A_1 > A_2$, il suffit donc de poser $A_2 \geq 0$ pour trouver la condition pour que ces résultat soient valables.

$$A_2 = \frac{N - bh\overline{\sigma_b}}{\sigma_2} - \frac{M_1 - (d - 0{,}5h)\, bh\overline{\sigma_b}}{\sigma_2 (d - c_1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow (N - bh\overline{\sigma_b})(d - c_1) - M_1 + (d - 0{,}5h)\, bh\overline{\sigma_b} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N(d - c_1) - M_1 \geq (0{,}5h - c_1)\, b \cdot h \cdot \overline{\sigma_b}.}$$

Dans le cas contraire A_2 devient négative donc inutile, nous prendrons donc $A_2 = 0$, les équations d'équilibre (1') et (2') changeront, elles deviennent :

$$\begin{cases} N - \psi \cdot b \cdot h \cdot \overline{\sigma_b} - A_1 \overline{\sigma_{s_1}} = 0 & (1''') \\ M_1 - \left[0{,}3571 + \left(\frac{d}{h} - 0{,}8571\right) \cdot \psi\right] b \cdot h^2 \cdot \overline{\sigma_b} - A_1 \overline{\sigma_{s_1}} \cdot (d - c_1) = 0 & (2''') \end{cases}$$

On élimine $A_1 \overline{\sigma_{s_1}}$ entre les deux équations, et on obtient :

$$\boxed{\psi = \frac{0{,}3571 + \dfrac{N(d - c_1) - M_1}{b \cdot h^2 \cdot \overline{\sigma_b}}}{0{,}8571 - \dfrac{c_1}{h}}}$$

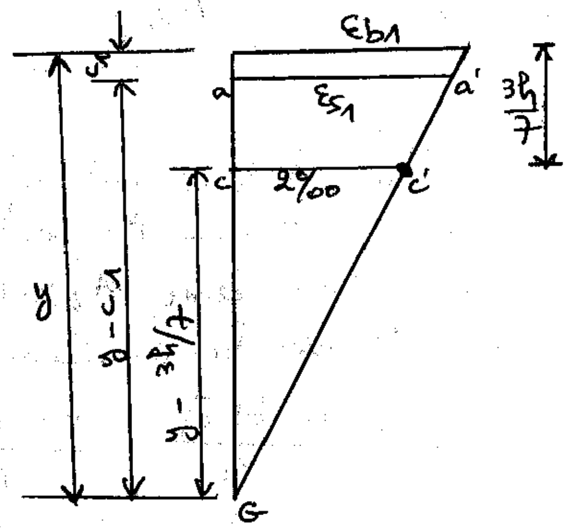
Pour être toujours dans le cas d'une section entièrement comprimée, c'est à dire $h \leq y < \infty \Rightarrow 0{,}8095 \leq \psi < 1 \Rightarrow$

$$0{,}8095 \leq \frac{0{,}3571 + \dfrac{N(d - c_1) - M_1}{b \cdot h^2 \cdot \overline{\sigma_b}}}{0{,}8571 - \dfrac{c_1}{h}} < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(0{,}337 h - 0{,}81 \cdot c_1)\, \overline{\sigma_b} \cdot b \cdot h \leq N(d - c_1) - M_1 \leq (0{,}5 \cdot h - c_1)\, \overline{\sigma_b} \cdot b \cdot h.}$$

De l'équation d'équilibre (1°) on détermine A_1.

$$\boxed{A_1 = \frac{N - \psi \cdot \overline{\sigma_b} \cdot b \cdot h}{\sigma_{s_1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{A_2 = 0}$$



Reste à évaluer σ_{s_1} :

Triangles semblables $\widehat{aa'G}$ et $\widehat{cc'G}$

$$\frac{aa'}{cc'} = \frac{a'G}{c'G} \Rightarrow \frac{\varepsilon_{s_1}}{2‰} = \frac{y - c_1}{y - \frac{3h}{7}}$$

$$\Rightarrow 1000\,\varepsilon_{s_1} = 2 \cdot \left[\frac{y - c_1}{y - \frac{3h}{7}}\right]$$

avec $\psi = 1 - \dfrac{3{,}0476}{\left(\frac{7y}{h} - 3\right)^2}$

on obtient : $y = \dfrac{h}{7} \times \left[3 + \dfrac{1{,}7457}{\sqrt{1-\psi}}\right]$

et donc : $\boxed{1000\,\varepsilon_{s_1} = 2 + \left(3{,}437 - 8{,}019 \cdot \frac{c_1}{h}\right)\sqrt{1-\psi}}$.

Deux cas sont possibles :

- Si $1000\,\varepsilon_{s_1} < 1000\,\varepsilon_\ell \Rightarrow \sigma_{s_1} = E_s \cdot \varepsilon_{s_1} = 200\,000\,\varepsilon_{s_1} = 200(1000\,\varepsilon_{s_1})$
- Si $1000\,\varepsilon_{s_1} \geq 1000\,\varepsilon_\ell \Rightarrow \sigma_{s_1} = \overline{\sigma_s} = f_e/\gamma_s$

b/ Etude de la section en T.

La section en T se compose d'une section rectangulaire $b_0 \times h$ et des ailes de la table de compression $(b-b_0) \times h_0$. Il suffit de soustraire les efforts équilibrés par les ailes des efforts initiaux pour déterminer les efforts N_r et M_r revenant à la section rectangulaire $b_0 \times h$.

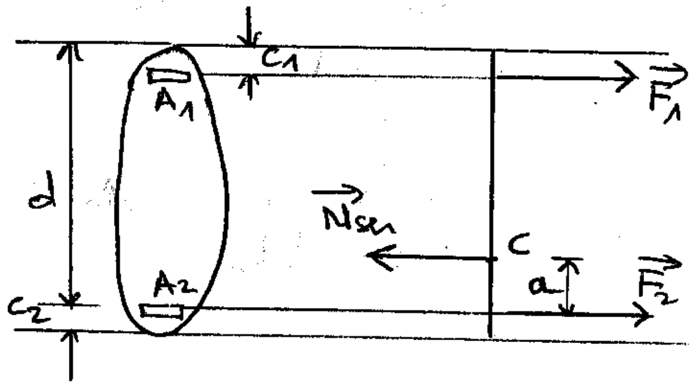
$$\boxed{\begin{aligned} N_r &= N_1 - (b - b_0)\,h_0 \cdot \overline{\sigma_b} \\ M_r &= M_1 - (b - b_0)\,h_0 \cdot \overline{\sigma_b} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2}\right) \end{aligned}}$$

Une fois N_r et M_r déterminés, les armatures A_1 et A_2 seront calculées pour une section rectangulaire $b_0 \times h$.

4.2. Vérification des Contraintes à l'Etat Limite de Service :

4.2.1. Section Entièrement Tendue (S.E.T.)

La section est entièrement tendue si l'effort normal est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre les armatures.



1ère Equation d'Equilibre :

$$\Sigma M_{/F_2} = 0 \Rightarrow N_{ser} \cdot a - F_1 (d - c_1) = 0$$

$$\Rightarrow N_{ser} \cdot a - A_1 \sigma_{s1} (d - c_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{s1} = \frac{N_{ser} \cdot a}{A_1 (d - c_1)}}$$

2ème Equation d'Equilibre :

$$\Sigma M_{/F_1} = 0 \Rightarrow N_{ser} \cdot (d - c_1 - a) - F_2 (d - c_1) = 0$$

$$\Rightarrow N_{ser} (d - c_1 - a) - A_2 \sigma_{s2} (d - c_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{s2} = \frac{N_{ser} \cdot (d - c_1 - a)}{A_2 (d - c_1)}}$$

On doit vérifier : $\boxed{\sigma_{s1} \leq \overline{\sigma_s}}$ $\boxed{\sigma_{s2} \leq \overline{\sigma_s}}$

4.2.2 Section Partiellement comprimée (S.P.C)

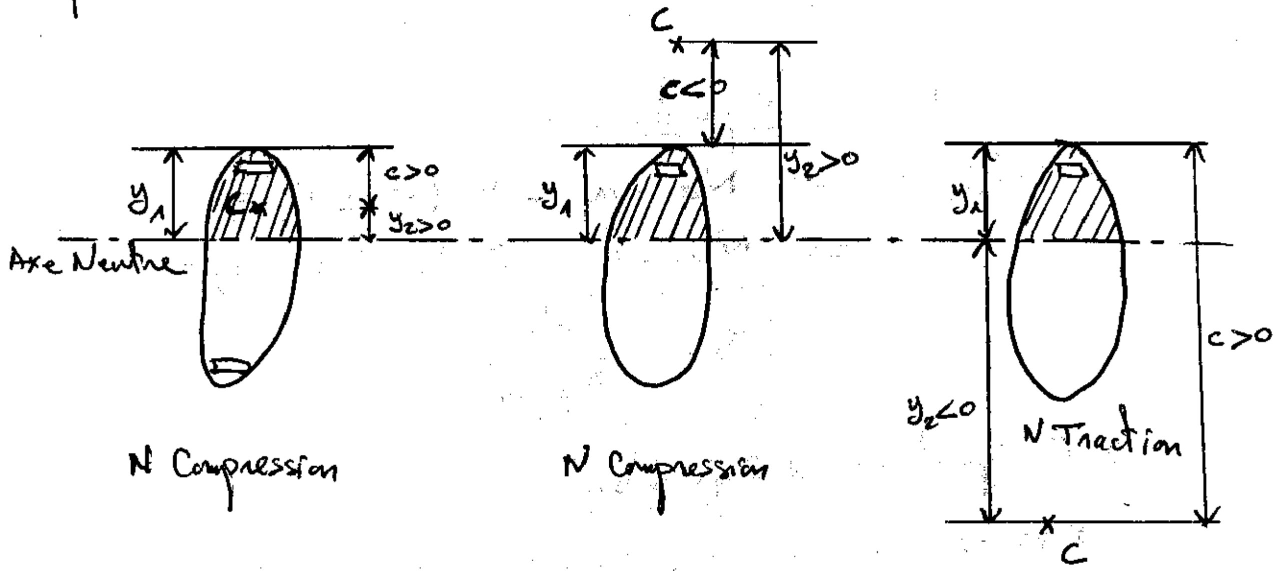
Une section est partiellement comprimée si :

* L'effort normal est un effort de traction, le centre de pression se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures.
* L'effort normal est un effort de Compression et :

$$\boxed{\frac{M_{G'}}{N_{ser}} > \frac{I_{G'}}{B_0 \cdot v_2}}$$ (strictement supérieur)

Cette inégalité regroupe des termes de la section entièrement comprimée. On supposera la section entièrement comprimée, on determinera les termes $M_{G'}$, $I_{G'}$, B_0 et V_2 puis on vérifiera l'inégalité.

Dans le cas où cette inégalité sera vérifiée, trois cas sont possibles.

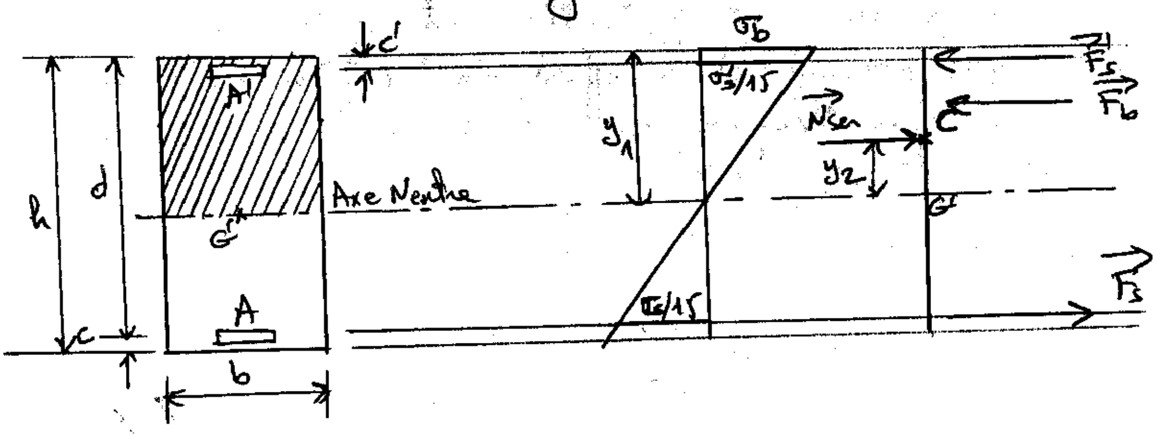


où y_1 = Distance entre l'axe neutre et la fibre la plus comprimée de béton (toujours positive).
y_2 = Distance entre le centre de pression C et l'axe neutre
c = Distance entre le centre de pression C et la fibre la plus comprimée de béton

Pour les trois cas, nous aurons :

$$\boxed{y_1 = y_2 + c} \quad \text{donc} \quad \boxed{y_2 = y_1 - c}$$

a/ <u>Etude de la section rectangulaire</u>



Si on sait que $\sigma_b = K \cdot y_1 \Rightarrow K = \sigma_b / y_1$

$\sigma'_s = 15K(y_1 - c') \Rightarrow \sigma'_s = 15 \cdot \sigma_b \dfrac{(y_1 - c')}{y_1}$

$\sigma_s = 15K(d - y_1) \Rightarrow \sigma_s = 15\sigma_b \dfrac{(d - y_1)}{y_1}$

1ère Equation d'Equilibre :

$\sum F_i = 0 \Rightarrow N_{ser} + F_s - F_b - F'_s = 0 \quad (1)$

$\Rightarrow N_{ser} = F_b + F'_s - F_s$

$\Rightarrow N_{ser} = \frac{1}{2} b \cdot y_1 \cdot \sigma_b + A' \cdot \sigma'_s - A \cdot \sigma_s$

$\Rightarrow N_{ser} = \frac{1}{2} b y_1 \sigma_b + A\left(15\sigma_b \dfrac{y_1 - c'}{y_1}\right) - A\left(15\sigma_b \dfrac{d - y_1}{y_1}\right)$

$$\Rightarrow N_{ser} = \frac{\sigma_b}{y_1}\left[\underbrace{\frac{b \cdot y_1^2}{2} + 15A'(y_1 - c') - 15A(d - y_1)}_{S_{G'}}\right].$$

$S_{G'}$ = Moment statique de la section homogénéisée de béton par rapport à l'axe passant par G' le centre de gravité de la section.

$\Rightarrow N_{ser} = \dfrac{\sigma_b}{y_1} \cdot S_{G'} \Rightarrow \sigma_b = \dfrac{N_{ser}}{S_{G'}} \cdot y_1 = K \cdot y_1$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{N_{ser}}{S_{G'}}}$$

2ème Equation d'Equilibre :

$\sum M_i / G' = 0 \Rightarrow N_{ser} \cdot y_2 - F_b \cdot \frac{2}{3} y_1 - F'_s(y_1 - c') - F_s(d - y_1) = 0 \quad (2)$

$\Rightarrow N_{ser} \cdot y_2 = M_{G'} = F_b \cdot \frac{2}{3} y_1 + F'_s(y_1 - c') + F_s(d - y_1)$

$\Rightarrow N_{ser} \cdot y_2 = M_{G'} = \frac{1}{2} b y_1 \sigma_b \cdot \frac{2}{3} y_1 + A' 15\sigma_b \dfrac{(y_1 - c')^2}{y_1} + A 15\sigma_b \dfrac{(d - y_1)^2}{y_1}$

$$\Rightarrow N_{ser} \cdot y_2 = M_{G'} = \frac{\sigma_b}{y_1}\left[\underbrace{\frac{b \cdot y_1^3}{3} + 15A'(y_1 - c')^2 + 15A(d - y_1)^2}_{I_{G'}}\right]$$

$I_{G'}$ = Moment d'Inertie de la section homogénéisée de béton par rapport à l'axe passant par G' le centre de gravité de la section.

$\Rightarrow N_{ser} \cdot y_2 = M_{G'} = \dfrac{\sigma_b}{y_1} \cdot I_{G'} \Rightarrow \sigma_b = K \cdot y_1 = \dfrac{N_{ser} \cdot y_2}{I_{G'}} \cdot y_1$

$$\Rightarrow K = \frac{N_{ser} \cdot y_2}{I_{G'}} = \frac{N_{ser}}{S_{G'}} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{I_{G'}}{S_{G'}}}$$

Avec : $y_1 = y_2 + c$ on aura :

$$\boxed{y_2^3 + p \cdot y_2 + q = 0}$$

Une équation du troisième degré en y_2 à résoudre.

où :

$$\begin{cases} p = -3c^2 - \frac{90A'}{b}(c-c') + \frac{90A}{b}(d-c) \\ q = -2c^3 - \frac{90A'}{b}(c-c')^2 - \frac{90A}{b}(d-c)^2 \end{cases}$$

La solution y_2 doit être conforme avec la condition

$$\boxed{0 < y_1 = y_2 + c < d}$$

<u>Méthode numérique pour résoudre l'équation du 3ème degré</u>:

On pose $y_2 = Y \Rightarrow$ à résoudre : $Y^3 + p \cdot Y + q = 0$

a/ On calcule le déterminant Δ.

$$\Delta = q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}$$

b/ Deux cas sont possibles.

b1/ $\Delta < 0 \Rightarrow$ Trois solutions réelles.

On calcule $\cos\varphi = \frac{3 \cdot q}{2 \cdot p}\sqrt{-\frac{3}{p}} \longrightarrow \varphi$ (en °).

et $a = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$

Les trois solutions réelles sont :

- $Y_1 = a \cdot \cos(\varphi/3)$
- $Y_2 = a \cdot \cos(\varphi/3 + 120°)$
- $Y_3 = a \cdot \cos(\varphi/3 + 240°)$

b2/ $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ Une solution réelle et deux imaginaires

La solution réelle est :

$t = 0{,}5(\sqrt{\Delta} - q) \longrightarrow z = t^{1/3}$ et donc

$$\boxed{Y = z - \frac{p}{3 \cdot z}}$$

Une fois la position de l'axe neutre y_1 déterminée, on vérifiera :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_b &= K \cdot y_1 \leq \overline{\sigma_b} \\ \sigma'_s &= 15K(y_1 - c') \leq \overline{\sigma_s} \\ \sigma_s &= 15K(d - y_1) \leq \overline{\sigma_s} \end{aligned}}$$

Avec $K = \dfrac{N_{ser}}{S_{G'}}$.

et $S_{G'} = \dfrac{b \cdot y_1^2}{2} + 15A'(y_1 - c') - 15A(d - y_1)$.

b/ Etude de la section en T.

L'équation du 3ème degré en y_2 est aussi valable pour la section en T.

Avant de résoudre l'équation du 3ème degré en y_2, on doit savoir si l'axe neutre est dans la table ou dans la nervure, pour cela, soit les deux expressions suivantes :

$$E_1 = (b - b_0)(3.c - 2.h_0)h_0^2 + 90\left[A'(c - c').c' - A(d - c).d\right].$$

$$E_2 = b h_0^2 (h_0 - 3.c) + 90\left[A'(c - c')(c' - h_0) - A(d - c)(d - h_0)\right].$$

Deux cas sont possibles :

- E_1 et E_2 sont de signe contraire : ($E_1 \times E_2 < 0$) :
  L'axe neutre tombe dans la table $\Rightarrow$ Etude d'une section rectangulaire $b \times h$
- E_1 et E_2 sont de même signe : ($E_1 \times E_2 > 0$).
  L'axe neutre tombe dans la nervure $\Rightarrow$ section en T avec :

$$p = -\frac{3b}{b_0} \cdot c^2 + 3\left(\frac{b}{b_0} - 1\right)(c - h_0)^2 - 90\frac{A'}{b_0}(c - c') + 90\frac{A}{b_0}(d - c)$$

$$q = -\frac{2b}{b_0} \cdot c^3 + 2\left(\frac{b}{b_0} - 1\right)(c - h_0)^3 - 90\frac{A'}{b_0}(c - c')^2 - \frac{90A}{b_0}(d - c)^2$$

On vérifiera les contraintes avec toujours $K = \dfrac{N_{ser}}{S_{G'}}$

mais avec $S_{G'}$ de la section en T :

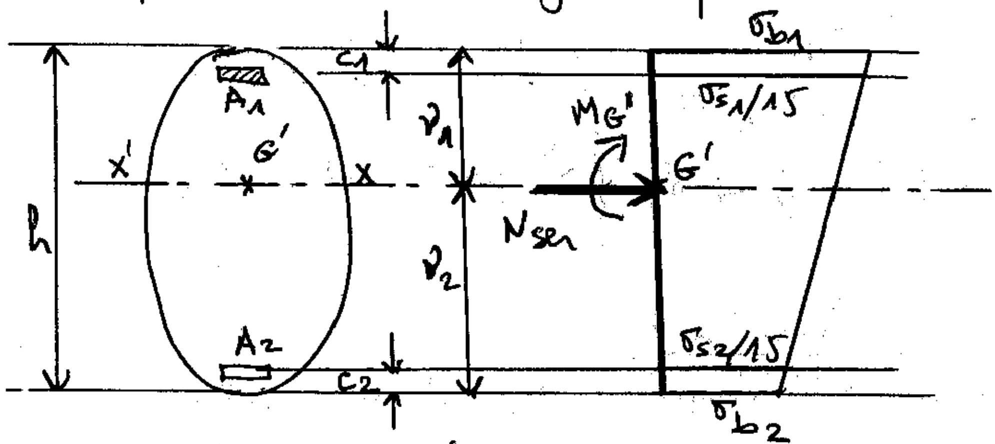
$$S_{G'} = \frac{b y_1^2}{2} - \frac{(b - b_0)}{2}(y_1 - h_0)^2 + 15\left[A'(y_1 - c') - A(d - y_1)\right]$$

4.2.3. Section Entièrement Comprimée (S.E.C.)

Dans le cas de la section entièrement comprimée et ayant une section homogénéisée de béton, on pourra appliquer les formules données par la Résistance des Matériaux (R.D.M.)

On vérifiera : $\boxed{\begin{aligned} \sigma_{b_1} &\leq \overline{\sigma_b} \\ \sigma_{s_1} &\leq \overline{\sigma_s}. \end{aligned}}$

Quelque soit la forme géométrique de la Section :



où G' = Centre de gravité de la section homogénéisée de béton.

N_{ser} = Effort normal de Compression à l'ELS.

$M_{G'}$ = Moment à l'ELS par rapport au cdg. G'.

B_0 = Aire de la section homogénéisée de Béton.

$I_{G'}$ = Moment d'inertie de la section homogénéisée de béton par rapport à l'axe $X'X$ passant par G'.

v_1 = Distance entre G' et la fibre la plus comprimée de béton.

$v_2 = h - v_1$: Distance entre G' et la fibre la moins comprimée de béton

Formules R.D.M.

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_{b_1} &= \frac{N_{ser}}{B_0} + \frac{M_{G'} \cdot v_1}{I_{G'}} \\
\sigma_{b_2} &= \frac{N_{ser}}{B_0} - \frac{M_{G'} \cdot v_2}{I_{G'}} \\
\sigma_{s_1} &= 15\left[\frac{N_{ser}}{B_0} + \frac{M_{G'}(v_1 - c_1)}{I_{G'}}\right] \\
\sigma_{s_2} &= 15\left[\frac{N_{ser}}{B_0} - \frac{M_{G'}(v_2 - c_2)}{I_{G'}}\right]
\end{aligned}}$$

Condition pour que la section soit entièrement Comprimée.

Il suffit de vérifier que $\sigma_{b_2} \geq 0$. $\Rightarrow$

$$\frac{N_{ser}}{B_0} - \frac{M_{G'} \cdot v_2}{I_{G'}} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{M_{G'}}{N_{ser}} \leq \frac{I_{G'}}{B_0 \cdot v_2}}$$

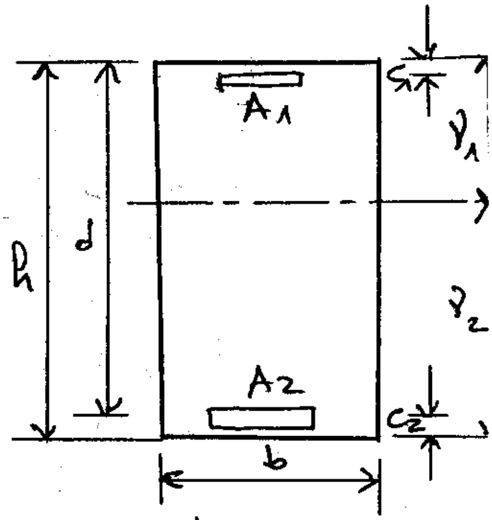
a/ Etude de la section rectangulaire

$$B_0 = b h + 15(A_1 + A_2)$$

$$v_1 = \frac{S_{\text{fibre sup}}}{B_0} = \frac{1}{B_0}\left[\frac{b \cdot h^2}{2} + 15(A_1 \cdot c_1 + A_2 \cdot d)\right]$$

$$v_2 = h - v_1$$

$$I_{G'} = \frac{b}{3}(v_1^3 + v_2^3) + 15\left[A_1(v_1 - c_1)^2 + A_2(v_2 - c_2)^2\right]$$



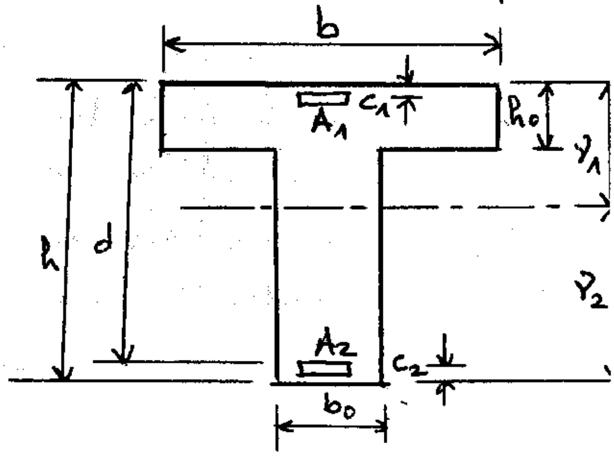
b/ Etude de la section en T.

$$B_0 = b_0 \cdot h + (b - b_0) h_0 + 15(A_1 + A_2)$$

$$v_1 = \frac{1}{B_0}\left[b_0 \frac{h^2}{2} + (b - b_0)\frac{h_0^2}{2} + 15(A_1 c_1 + A_2 \cdot d)\right]$$

$$v_2 = h - v_1$$

$$I_{G'} = \frac{b_0}{3}(v_1^3 + v_2^3) + (b - b_0) h_0 \left[\frac{h_0^2}{12} + \left(v_1 - \frac{h_0}{2}\right)^2\right]$$
$$+ 15\left[A_1(v_1 - c_1)^2 + A_2(v_2 - c_2)^2\right]$$



4.3. Détermination des armatures longitudinales à l'E.L.S.

Dans le cas où une ou toutes les contraintes ne sont pas vérifiées, les résultats de l'E.L.U. ne sont plus valables, il faut redéterminer les sections d'armatures longitudinales mais cette fois-ci à l'Etat Limite de Service.

4.3.1. Section Entièrement Tendue. (S.E.T.)

On pose $\sigma_s = \overline{\sigma_s}$ (en fonction du type de fissuration)

En utilisant les mêmes notations que pour la vérification des contraintes, nous aurons :

$$\boxed{A_1 = \frac{N_{ser} \cdot a}{\overline{\sigma_s}(d - c_1)}} \quad \text{et} \quad \boxed{A_2 = \frac{N_{ser}(d - c_1 - a)}{\overline{\sigma_s}(d - c_1)}}$$

4.3.2. Sections Partiellement et Entièrement Comprimées

Dans le cas d'un effort normal de compression, l'inégalité $\frac{M_G}{N_{ser}} > \frac{I_G}{B_0 \vartheta_2}$ ne peut être vérifiée en l'absence des sections d'armatures supérieures et inférieures. Pour cela les calculs pour la détermination de ces dernières deviennent complexes et inexacts.

La solution est de procéder par approximations successives, on calculera A et A' (ou A_1 et A_2) à l'ELU puis on procède à la vérification des contraintes à l'ELS. si ces contraintes ne sont pas vérifiées, on augmentera les valeurs des sections d'armatures supérieures et inférieures jusqu'à ce que les contraintes dans le béton et l'acier deviennent vérifiées.