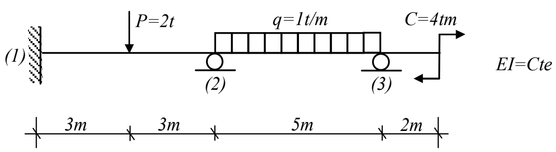
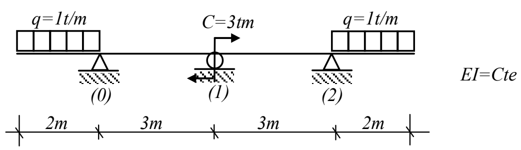
6.4 EXERCICES

Calculer les moments aux appuis et les réactions et tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant des poutres continues ci-dessous.

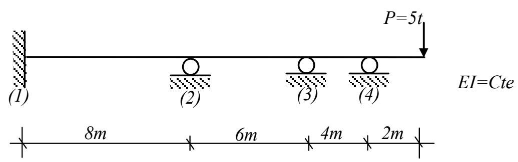
Exercice 6.1



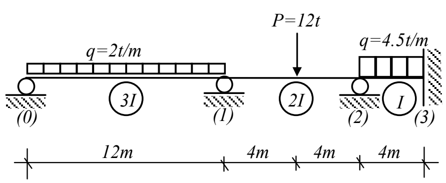
Exercice 6.2



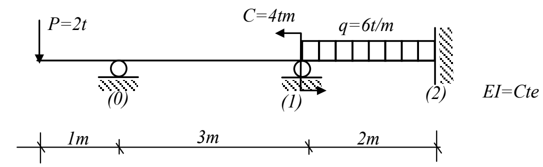
Exercice 6.3



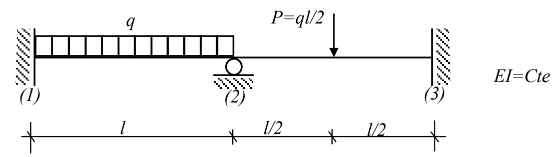
Exercice 6.4



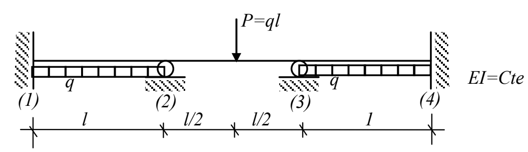
Exercice 6.5



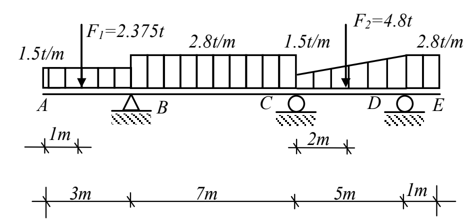
Exercice 6.6



Exercice 6.7

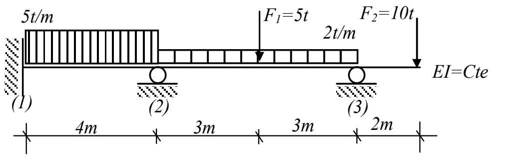


Exercice 6.8

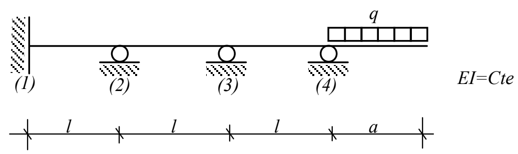


La section de la poutre, de forme rectangulaire (*bxh*), varie d'un tronçon à l'autre comme suit : $S_{AB}=20x55\ cm^2$, $S_{BC}=25x60\ cm^2$, $S_{CD}=25x50\ cm^2$, $S_{DE}=25x40\ cm^2$.

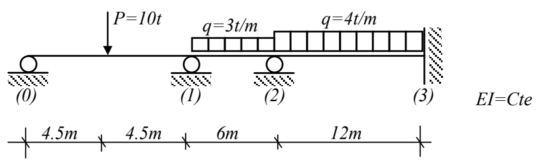
Exercie 6.9



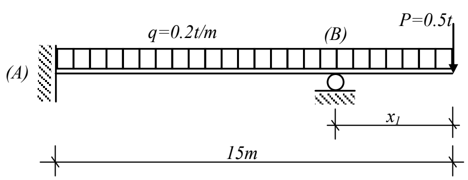
Exercie 6.10



Exercie 6.11



Exercie 6.12



Soit la poutre représentée ci-dessus dont la rigidité fléxionnelle est constante et vaut $1200\ tm^2$.

1) Quelle valeur faut-il donner à x_1 pour que les moments en A et B soient égaux.

2) Prenons $x_1=4\ m$. On demande de :
2.1) tracer les diagrammes de M et de T,
2.2) calculer la rotation de la section B,
2.3) calculer la flèche de l'extrémité libre de la poutre.

3) La même poutre est libre de toute charge mais son appui B subit un affaissement de $20\ mm$. Calculer le moment qui apparaît dans l'encastrement.

Réponses :

Exercice 6.1 : M_1=-1.6 tm, M_2=-1.3 tm, M_3=-4.0 tm,
R_1=1.049 t, R_2=2.912 t, R_3=3.039 t.

Exercice 6.2 : M_0=-2.0 tm, M_1^g=-0.5 tm, M_1^d=-2.5 tm, M_2=-2.0 tm,
R_0=2.5 t, R_1=-2t, R_2=3.5t.

Exercice 6.3 : M_1=0.27 tm, M_2=-0.54 tm, M_3=2.16 tm,
R_1=-0.10 t, R_2=0.55 t, R_3=-3.49 t, R_4=8.04 t.

Exercice 6.4 : M_1=-25.6 tm, M_2=-5.5 tm, M_3=-6.2 tm,
R_0=9.9 t, R_1=22.6 t, R_2=12.3 t, R_3=9.2 t.

Exercice 6.5 : M_0=-2.0 tm, M_1^g=1.3 tm, M_1^d=-2.7 tm, M_2=-1.7 tm,
R_0=3.11 t, R_1=5.39 t, R_2=5.50 t.

Exercice 6.6 : $M_1=-17ql^2/192$, $M_2=-14ql^2/192$, $M_3=-11ql^2/192$,
$R_1=99ql/192$, $R_2=93ql/192$, $R_3=45ql/192$.

Exercice 6.7 : $M_1=117ql^2/72$, $M_2=-4ql^2/72$,
$R_1=-51ql/72$, $R_2=15ql/72$.

Exercice 6.8 : M_B=-11.5 tm, M_C=-10.9 tm, M_D=-1.4 tm,
R_B=16.761 t, R_C=19.327 t, R_D=8.737 t.

Exercice 6.9 : M_1=-7.35 tm, M_2=-5.31 tm, M_3=-20.00 tm,
R_1=10.51 t, R_2=15.54 t, R_3=20.95 t.

Exercice 6.10 : $M_1=qa^2/52$, $M_2=-2qa^2/52$, $R_3=7qa^2/52$, $R_4=-28qa/52$.
$R_1=-3qa/52$, $R_2=12qa/52$, $R_3=-42qa/52$, $R_4=85qa/52$.

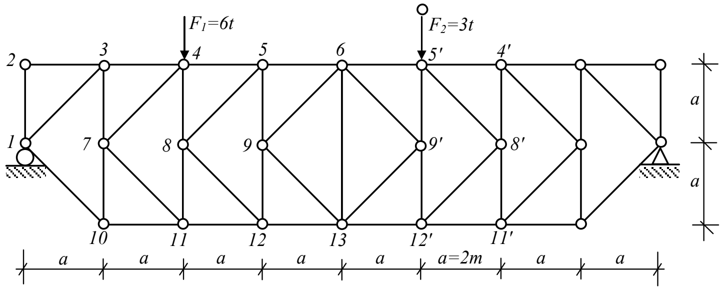
Exercice 6.11: M_0=0, M_1=548.4 kgm, M_2=-443.0 kgm, M_4=98.4 kgm,
R_0=4.00 t, R_1=11.10 t, R_2=34.95 t , R_3=25.95 t.

Exercice 6.12 : x_1=3 m, M_A=-1125 kgm, M_{Tmax}=729 kgm (x=4.42 m),
M_B=3600 kgm, R_A=884.1 kg, R_B=2 615.9 kg,
γ_B=0.003726 rd, f=2.96 cm, M_{enc}=578 kgm.

Signes : Les poutres considérées étant toutes horizontales, un moment positif signifie que les fibres inférieures sont tendues, et inversement. Une réaction verticale positive est orientée vers le haut. Pour les déplacements, une rotation est positive si la section tourne dans le sens horlogique alors qu'une flèche est positive quand le déplacement se fait vers le bas.

6.5.4 Exercices

Exercice 6.13 : Poutre en K.

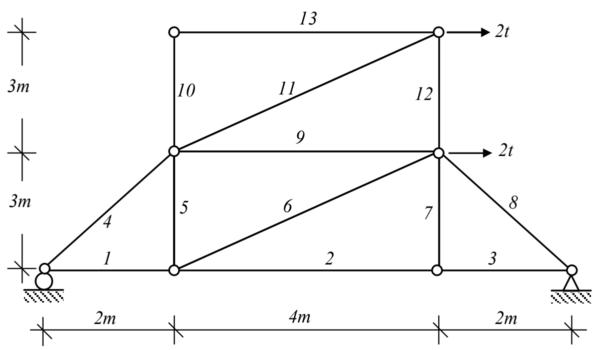


Déterminer les efforts dans les barres suivantes: 5-6 ; 5-9 ; 6-9 ; 9-13 ; 12-13.

Rép. : N_{56}=-5.44 t, N_{59}=-0.19 t, N_{69}=0.26 t, N_{913}=-0.26 t, N_{1213}=5.44 t.

Exercice 6.14

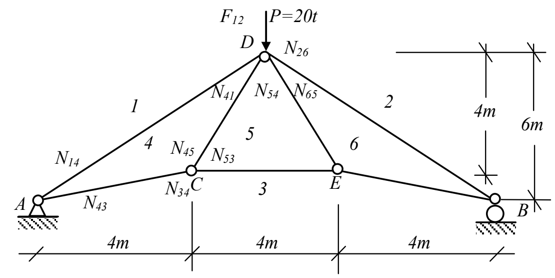
Calculer les efforts dans les barres.



Rép. : $N_1=N_{12}=-1.5$ t, $N_2=N_3=-N_{11}=-2.5$ t, $N_4=-N_8=2.7$ t, $N_5=-0.75$ t, $N_6=1.25$ t, $N_7=N_{10}=N_{13}=0$, $N_9=-0.5$ t.

Exercice 6.15

Calculer les efforts dans les barres à l'aide du tracé de Cremona.

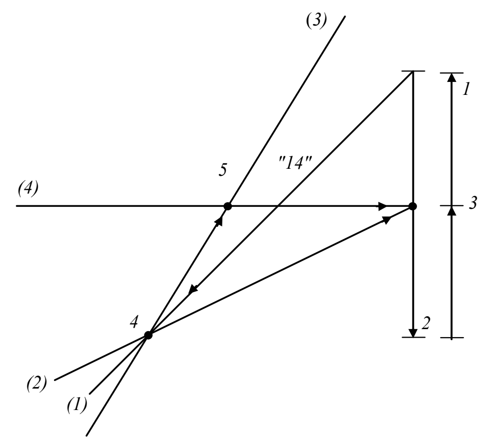


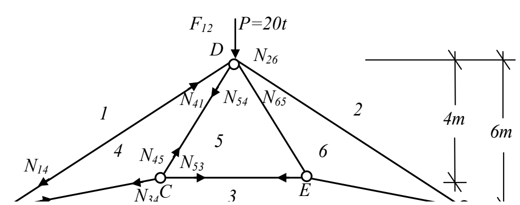
Rép. :

On trace :

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{Parallèle à } AD\,(14) \text{ à partir de } 1 \\ 2)\ \text{Parallèle à } AC\,(43) \text{ à partir de } 3 \end{array}\right\} \Rightarrow (4),\ \text{sens} \left\{\begin{array}{l} 14 \rightarrow N_{14}\ (\text{compresion}) \\ 43 \rightarrow N_{43}\ (\text{traction}) \end{array}\right.$$

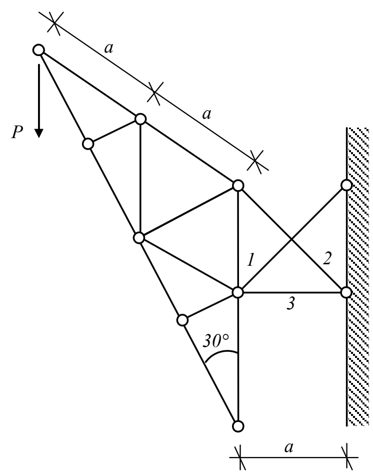
$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \text{Parallèle à } CD\,(45) \text{ à partir de } 4 \\ 4)\ \text{Parallèle à } CE\,(53) \text{ à partir de } 3 \end{array}\right\} \Rightarrow (5),\ \text{sens} \left\{\begin{array}{l} 45 \rightarrow N_{45}\ (\text{traction}) \\ 53 \rightarrow N_{53}\ (\text{traction}) \end{array}\right.$$





Exercice 6.16

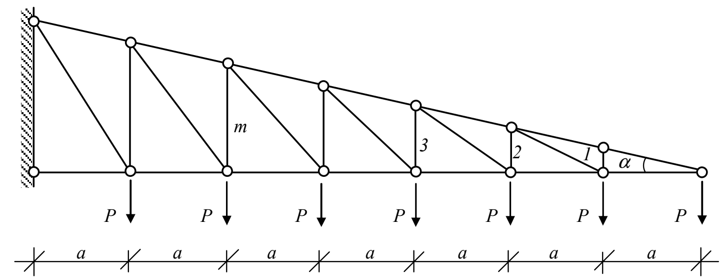
Déterminer les efforts dans les barres numérotées de 1 à 3.



Rép. : N_1=3.86P, N_2=2.45P, N_3=-4.46P.

Exercice 6.17

Déterminer les efforts dans les montants 1, 2 et 3 ainsi que l'expression générale donnant l'effort N_m dans le montant courant m.



Rép. : N_1=0, N_2=-P/2, N_3=-P, N_m=-P(m-1)/2.

6.6 SYSTÈMES HYPERSTATIQUES EN TREILLIS ARTICULES

Nous allons maintenant appliquer la méthode générale des forces au calcul des systèmes hyperstatiques en treillis articulés.

Nous avons vu que le degré d'yperstaticité est égal à :

$$H = b + l - 2n$$

b = nombre de barres
l = nombre de liaisons

n = nombre de nœuds

L'hyperstaticité peut être interne, s'il y a des barres surabondantes (on parlera dans ce cas d'inconnues hyperstatiques intérieures) ; externe, s'il y a des liaisons surabondantes aux appuis (inconnues hyperstatiques extérieures). Souvent les systèmes hyperstatiques comportent des inconnues hyperstatiques des deux types.

Pour calculer un système hyperstatique de degré H, il faut effectuer un nombre équivalent (H) de coupures judicieusement choisies, soit en enlevant certains appuis, soit en sectionnant des barres sans les supprimer, soit en combinant les deux (suppression d'appuis + sectionnement de quelques barres), de façon à obtenir un système isostatique de base géométriquement stable.

6.6.1 Poutre continue en treillis articulé

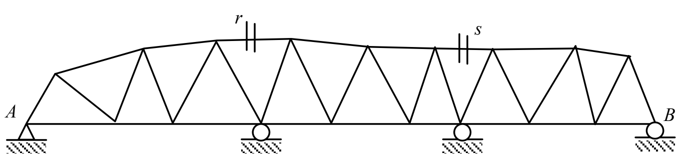


Figure 6.29

Les seules inconnues hyperstatiques de la poutre représentée ci-dessus proviennent des appuis simples surabondants.

En appliquant la méthode des forces on commence par choisir un système fondamental par suppression des liaisons surabondantes.

Un premier système fondamental est obtenu par suppression des deux appuis intermédiaires ; on obtient ainsi une poutre isostatique et les deux réactions supprimées seront déterminées par application de la méthode des forces.

Nous pouvons également transformer la poutre en un ensemble de trois poutres isostatiques en sectionnant les barres r et s. Il faut noter que les barres r et s sont coupées et non supprimées. Les efforts normaux dans les barres r et s constituent les inconnues hyperstatiques.

Les équations de continuité s'écrivent de façon unique quelque soit le système fondamental choisi.

Ainsi dans l'exemple cité, les équations de continuité s'écrivent :

$$\begin{cases} \delta^u_{11} X_1 + \delta^u_{12} X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta^u_{21} X_1 + \delta^u_{22} X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

Les coefficients δ^u_{ij} et δ_{iF} se calculent par les formules vues précédemment c'est-à-dire :

$$\delta^u_{ij} = \sum_{k=1}^{b} \int_{l_k} \frac{n_{ki} n_{kj}}{(EA)_k} dx \qquad \delta_{iF} = \sum_{k=1}^{b} \int_{l_k} \frac{N_{kF} n_{ki}}{(EA)_k} dx$$

Si EA est constante pour chaque barre, il vient :

$$\delta^u_{ij} = \sum_{k=1}^{b} \frac{n_{ki} n_{kj}}{(EA)_k} l_k \qquad \delta_{iF} = \sum_{k=1}^{b} \frac{N_{kF} n_{ki}}{(EA)_k} l_k$$

où :

b = nombre de barres

l_k = longueur de la barre k

6.6.2 Poutre en treillis avec montants et diagonales croisées

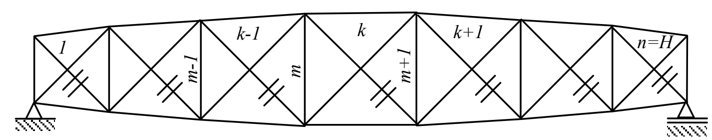


Figure 6.30

Chacun des n panneaux du système comporte une diagonale surabondante. Le système fondamental (isostatique) s'obtient en effectuant des coupures dans les n diagonales surabondantes.

Les efforts $N_1(X_1)$, ..., N_{k-1}, N_k, N_{k+1}, ..., N_n dans les diagonales sectionnées s'obtiennent à partir des équations générales. Le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \delta^u_{11} N_1 + \delta^u_{12} N_2 + \ldots + \delta^u_{1k-1} N_{k-1} + \delta^u_{1k} N_k + \delta^u_{1k+1} N_{k+1} + \ldots + \delta^n_{1n} N_n + \delta_{1F} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta^u_{k1} N_1 + \delta^u_{k2} N_2 + \ldots + \delta^u_{kk-1} N_{k-1} + \delta^u_{kk} N_k + \delta^u_{kk+1} N_{k+1} + \ldots + \delta^u_{kn} N_n + \delta_{kF} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta^u_{n1} N_1 + \delta^u_{n2} N_2 + \ldots + \delta^u_{nk-1} N_{k-1} + \delta^u_{nk} N_k + \delta^u_{nk+1} N_{k+1} + \ldots + \delta^u_{nn} N_n + \delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

Intéressons-nous à la $k^{ème}$ équation (relative à la diagonale k).

$$\delta^u_{k1} N_1 + \delta^u_{k2} N_2 + \ldots + \delta^u_{kk-1} N_{k-1} + \delta^u_{kk} N_k + \delta^u_{kk+1} N_{k+1} + \ldots + \delta^u_{kn} N_n + \delta_{kF} = 0$$

Le coefficient général δ^u_{ki} est donné par :

$$\delta^u_{ki} = \sum_{r=1}^{b} \frac{n_{rk} \cdot n_{ri}}{(EA)_r} l_r$$

n_{rk} = effort dans la barre courante r sous l'action du couple de forces unitaires appliquées aux lèvres de la coupure de la diagonale k.

n_{ri} = effort dans la barre courante r sous l'action du couple de forces unitaires appliquées aux lèvres de la coupure de la diagonale i.

On montre aisément que les forces unitaires appliquées aux lèvres d'une coupure quelconque n'introduisent des efforts que dans les six barres appartenant au panneau correspondant.

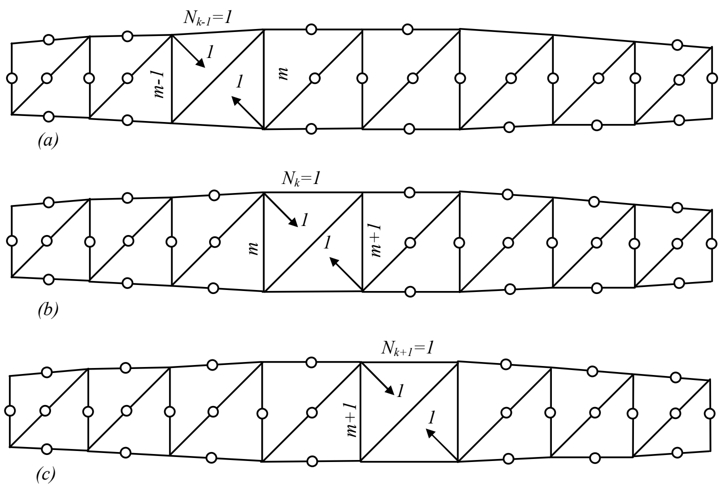


Figure 6.31

Ainsi le coefficient δ^u_{ki} sera nul dès que k diffère de i de plus d'une unité.

L'équation générale de continuité s'écrit donc :

$$\delta^u_{kk-1} N_{k-1} + \delta^u_{kk} N_k + \delta^u_{kk+1} + \delta_{kF} = 0$$

Trois efforts normaux apparaissent dans cette équation d'où son nom de *formule des trois N.*

Les coefficients $\delta^u_{k,k-1}$, δ^u_{kk} et δ^u_{kk+1} sont obtenus à partir des expressions simples suivantes :

$$\delta^u_{kk-1} = \frac{n_{mk} \cdot n_{mk-1}}{(EA)_m} l_m \qquad \delta^u_{kk} = \sum_{r=1}^{b} \frac{n^2_{rk}}{(EA)_r} l_r \quad (6 \text{ termes} \neq 0)$$

$$\delta^u_{kk+1} = \frac{n_{m+1k} \cdot n_{m+1k+1}}{(EA)_{m+1}} l_{m+1}$$

n_{mk} = effort dans le montant m sous l'action des sollicitations unitaires appliquées aux lèvres de la coupure de la diagonale k.

n_{mk-1} = effort dans le montant m sous l'action des sollicitations unitaires appliquées aux lèvres de la coupure de la diagonale $k-1$.

$n_{m+1\,k}$ = effort dans le montant $m+1$ sous l'action des sollicitations unitaires appliquées aux lèvres de la coupure de la diagonale k.

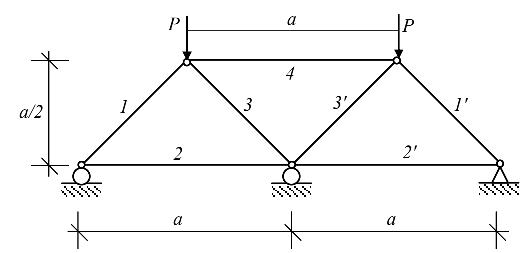
$n_{m-1\,k+1}$ = effort dans le montant $m-1$ sous l'action des sollicitations unitaires appliquées aux lèvres de la coupure de la diagonale $k+1$.

Pour δ^u_{kk}, il y a les six barres des panneaux correspondant qui interviennent.

Effort normal total

$$N_k = N_{kF} + \sum_{i=1}^{H} X_i n_{ki}$$

6.6.3 Exemple d'application

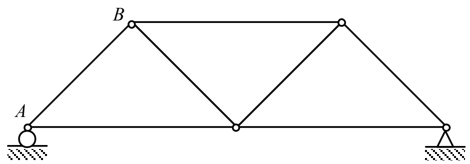


(EA) = identique pour toutes les barres

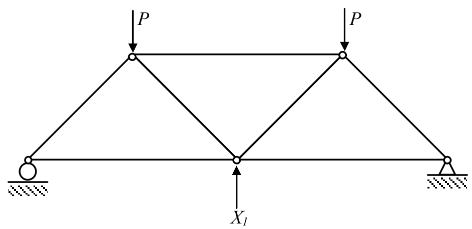
$$H = b + l - 2n$$
$$= 7 + 4 - 10 = 1$$

Nous avons deux possibilités de rendre isostatique le système, soit en coupant la barre 4 soit en enlevant l'appui intermédiaire.

1ère méthode : on supprime l'appui intermédiaire.



Système fondamental (S.F.)



Système équivalent (S.E.)

Equation de continuité :

$$\delta_{11}^{u} X_1 + \delta_{1F} = 0$$

avec :

$$\delta_{11}^{u} = \sum_{k=1}^{7} \int_{l_k} \frac{n_{k1}^2}{(EA)_k} dx = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^{7} n_{k1}^2 l_k$$

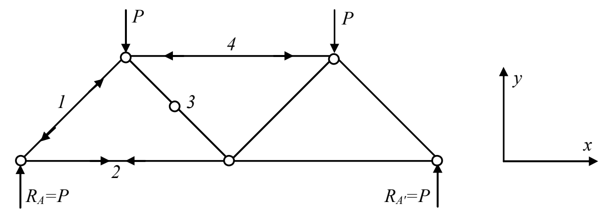
et :

$$\delta_{1F} = \sum_{k=1}^{7} \int \frac{N_{kF} n_{k1}}{(EA)_k} dx = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^{7} N_{kF} . n_{k1} . l_k$$

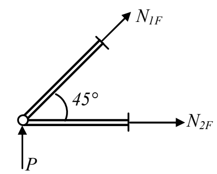
Calcul des efforts dans les barres.

a) Efforts N_{kF}

Appliquons la méthode des nœuds.



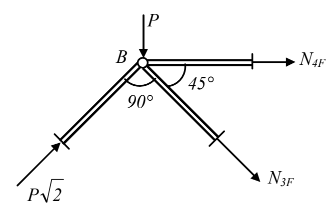
- Nœud A



$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_{1F} / \sqrt{2} + P = 0$$
$$\Rightarrow N_{1F} = -P\sqrt{2}$$
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow N_{2F} + N_{1F} / \sqrt{2} = 0$$
$$\Rightarrow N_{2F} = -N_{1F} / \sqrt{2} = P$$

Par symétrie on a : $N_{1F} = N_{1'F}$ *et* $N_{2F} = N_{2'F}$

- Nœud B

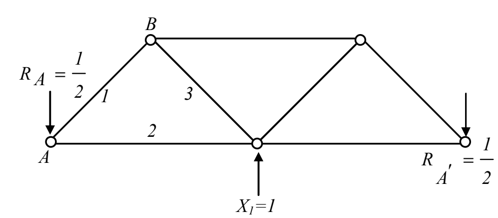


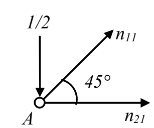
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow -P + (P\sqrt{2}) / \sqrt{2} - N_{3F} / \sqrt{2} = 0$$
$$\Rightarrow N_{3F} = 0$$
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow -(P\sqrt{2}) / \sqrt{2} + N_{4F} = 0$$
$$\Rightarrow N_{4F} = -P$$

Par symétrie $N_{3F} = N_{3'F} = 0$

b) Efforts n_{ki} $(i=1)$

- Nœud A

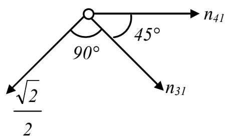




$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{21} = -\frac{1}{2}$$

N.B.: $n_{11} = n_{1'1}$ et $n_{21} = n_{2'1}$ (par symétrie)

- Nœud B



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{31} = -\sqrt{2}/2$$

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}/\sqrt{2} + n_{31}/\sqrt{2} + n_{41} = 0$$
$$\Rightarrow n_{41} = 1$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-après.

Barre k	l_k	$(EA)_k$	N_{kF}	n_{ki}	$N_{kp}.n_{ki}.l_k$	$n^2_{ki}l_k$	$n_{ki}.X_i$	$N_k=N_{kF}+n_{ki}X_i$
1	$a/\sqrt{2}$	EA	$-P\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-aP\sqrt{2}/2$	$a\sqrt{2}/4$	0.828P	-0.586P
2	a	"	P	-1/2	-aP/2	a/4	-0.586P	0.414P
3	$a/\sqrt{2}$	"	0	$-\sqrt{2}/2$	0	$a\sqrt{2}/4$	-0.828P	-0.828P
4	a	"	-P	1	aP	a	1.172P	0.172P
1'	$a/\sqrt{2}$	"	$-P\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-aP\sqrt{2}/2$	$a\sqrt{2}/4$		
2'	a	"	P	-1/2	-aP/2	a/4		
3'	$a/\sqrt{2}$	"	0	$-\sqrt{2}/2$	0	$a\sqrt{2}/4$		
Σ					$-aP(\sqrt{2}+2)$	$\frac{a(2\sqrt{2}+3)}{2}$		

Les coefficients δ^u_{11} et δ_{1F} s'obtiennent par sommation sur les colonnes correspondantes. Les sommes obtenues sont ensuite divisées par EA.

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{1}{EA}\frac{a}{2}(2\sqrt{2}+3)X_1 - \frac{1}{EA}aP(\sqrt{2}+2) = 0$$

d'où : $X_1 = P\dfrac{2(\sqrt{2}+2)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\qquad X_1 = 1.172P$

L'effort total N_k dans la barre k s'obtient par addition des efforts dus à F (sollicitation globale externe) et aux inconnues X_i.

$$N_k = N_{kF} + \sum_{i=1} n_{ki}.X_i$$

Il est pratique d'ajouter les deux dernières colonnes du tableau comme indiqué.

2ème méthode : on effectue une coupure dans la barre 4 (Figure 6.32).

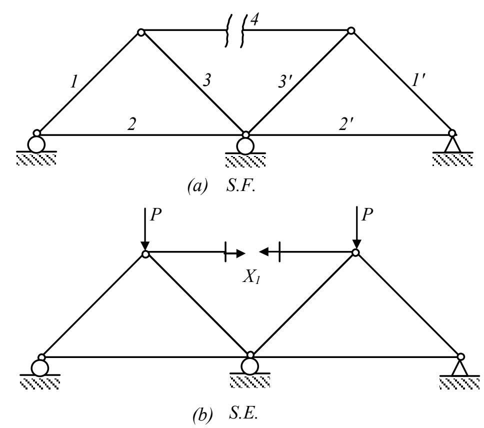


Figure 6.32

L'équation de continuité ne change pas : $\delta^u_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0$

Pour déterminer les coefficients δ^u_{11} et δ_{1F} il faut calculer les efforts dans les barres sous l'action de la sollicitation unité X_1=1 et des forces P (sollicitation générale externe).

a) Efforts N_{kF} (effort dans chaque barre sous l'action des charges extérieures).

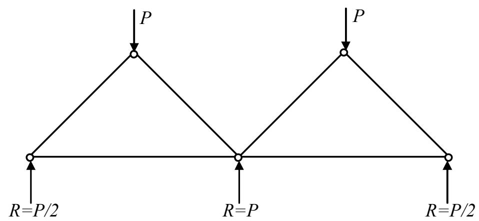
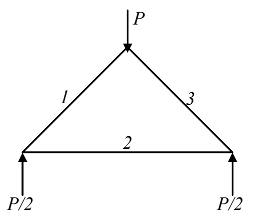
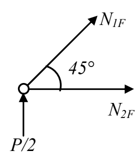


Figure 6.33

- La barre 4 qui est sectionnée n'intervient pas dans ce cas.
- On a deux systèmes isostatiques symétriques.





$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{1F} = -P/\sqrt{2}$ et par symétrie $N_{1F} = N_{3F}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{2F} = P/2$

En résumé, on a : $\begin{cases} N_{1F} = N_{3F} = N_{1'F} = N_{3'F} = -P/\sqrt{2} \\ N_{2F} = N_{2'F} = P/2 \end{cases}$

b) Efforts n_{ki}

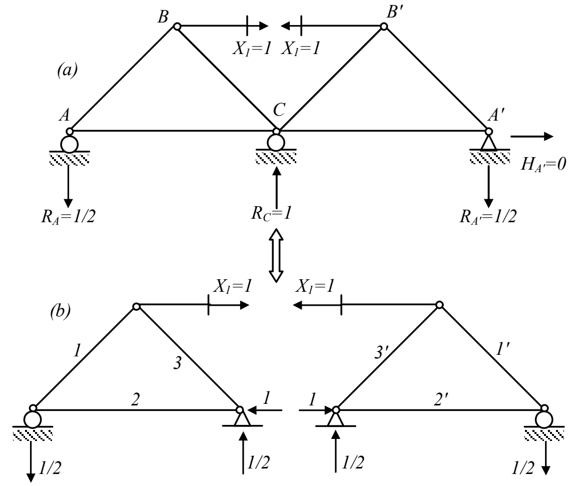
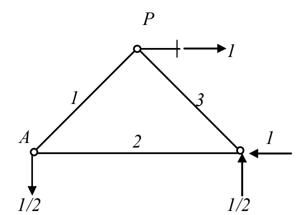
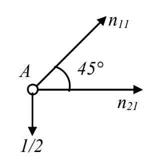


Figure 6.34

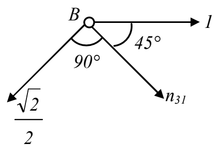
- Nœud A

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{11} = \sqrt{2}/2$, $\Sigma Fx = 0 \Rightarrow n_{21} = -1/2$





- Nœud B



$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow -(\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{n_{31}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow n_{31} = -\sqrt{2}/2$$

En utilisant la symétrie on peut résumer les efforts :

$$n_{11} = n_{1'1} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ n_{21} = n_{2'1} = -\frac{1}{2}$$

$$n_{31} = n_{3'1} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ n_{41} = 1$$

Barre k	l_k	$(EA)_k$	N_{kF}	n_{ki}	$N_{kF}.n_{ki}.l_k$	$n^2_{ki}l_k$	$n_{ki}.X_i$	$N_k=M_{kF}+n_{ki}X_i$
1	$a/\sqrt{2}$	EA	$-P/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-aP\sqrt{2}/4$	$a\sqrt{2}/4$	0.121P	-0.586P
2	a	"	P/2	-1/2	-aP/4	a/4	-0.086P	0.414P
3	$a/\sqrt{2}$	"	$-P/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$aP\sqrt{2}/4$	$a\sqrt{2}/4$	-0.121P	-0.828P
4	a	"	0	1	0	a	0.172P	0.172P
1'	$a/\sqrt{2}$	"	$-P/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-aP\sqrt{2}/4$	$a\sqrt{2}/4$		

2'	a	"	P/2	-1/2	-aP/4	a/4		
3'	$a/\sqrt{2}$	"	$-P/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$aP\sqrt{2}/4$	$a\sqrt{2}/4$		
Σ					-aP/2	$\frac{a(2\sqrt{2}+3)}{2}$		

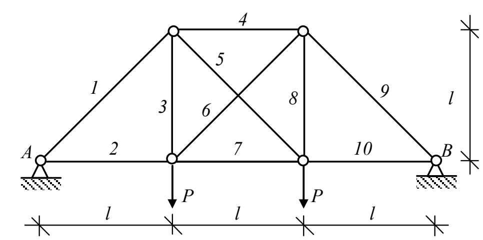
δ^u_{11} et δ_{1F} étant connus, on peut calculer X_1

$$X_1 = \frac{P}{2\sqrt{2}+3}, \qquad X_1 = 0.172P$$

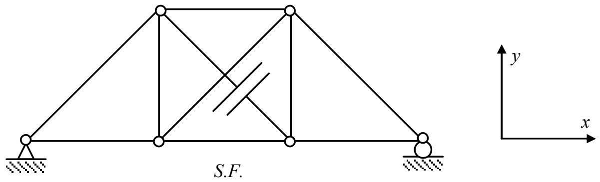
On peut vérifier que les efforts dans les barres sont exactement ceux trouvés avec la première méthode.

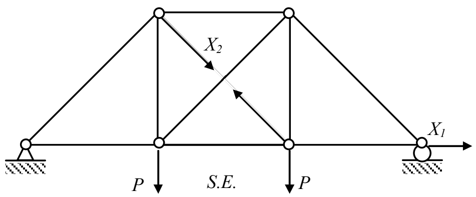
6.6.6 Exercice

Calculer les efforts dans les barres de la poutre représentée.



Solution



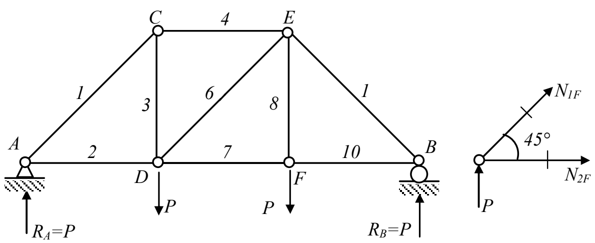


Equations canoniques du système :

$$\delta_{11}^{u} X_1 + \delta_{12}^{u} X_2 + \delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}^{u} X_1 + \delta_{22}^{u} X_2 + \delta_{2F} = 0$$

1- Efforts N_{kF}

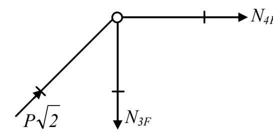


- Nœud A

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{1F} = -P/\sqrt{2}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{2F} = P$$

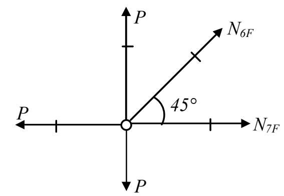
- Nœud C



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{3F} = P$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{4F} = -P$$

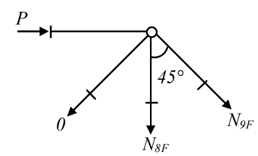
- Nœud D



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{6F} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{7F} = P$$

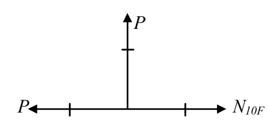
- Nœud E



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{9F} = -P/\sqrt{2}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{8F} = P$$

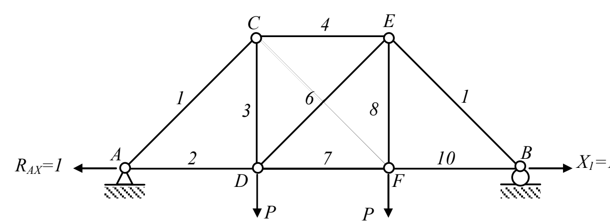
- Nœud F



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{10F} = P$$

N.B.: $N_{5F} = 0$, car la barre est coupée.

2- Efforts n_{k1}



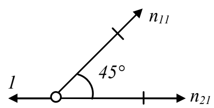
Réactions :

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 1$

$\Sigma M /_A = 0 \Rightarrow R_{By} = 0$

et : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 0$

- Nœud A



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{11} = 0$

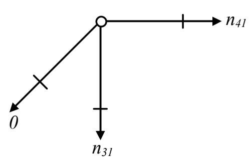
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{21} = 1$

et par symétrie

$n_{91} = 0 \;;\; n_{101} = 1$

N.B. : $n_{51} = 0$, car la barre 5 est coupée.

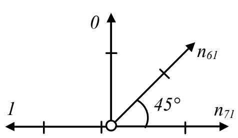
- Nœud C



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{41} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{31} = 0$

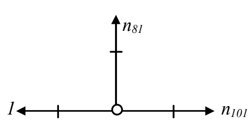
- Nœud D



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{61} = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{71} = 1$

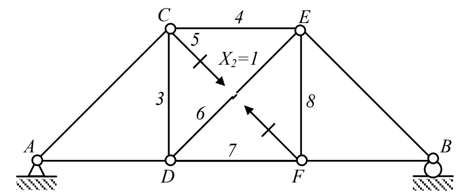
- Nœud F



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{81} = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{101} = 1$

3- Efforts n_{k2}



Réactions :

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$

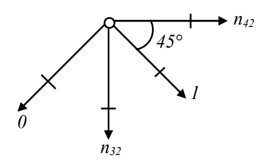
$\Sigma M /_A = 0 \Rightarrow R_{By} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 0$

Seules les barres du panneau central supportent des efforts différents de 0 (déjà montré précédemment).

$n_{12} = n_{22} = n_{92} = n_{102} = 0$

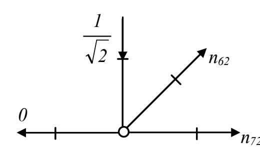
- Nœud C



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{42} = -1/\sqrt{2}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{32} = -1/\sqrt{2}$

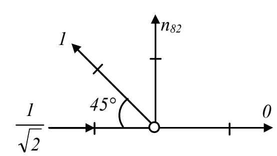
- Nœud D



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{62} = 1$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow n_{72} = -1/\sqrt{2}$

- Nœud F



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_{82} = -1/\sqrt{2}$

On vérifie que $n_{102} = 0$

Calcul des coefficients

$$\delta^u_{11} = \sum_{k=1}^{10} \frac{n^2_{k1} l_k}{(EA)_k} = \frac{3l}{EA}$$

$$\delta^u_{12} = \delta^u_{21} = \sum_{k=1}^{10} \frac{n_{k1}.n_{k2}}{(EA)_k} l_k = -\frac{l}{\sqrt{2}EA}$$

$$\delta^u_{22} = \sum_{1}^{10} \frac{n^2_{k2} l_k}{(EA)_k} = \frac{2l(1+\sqrt{2})}{EA}$$

$$\delta_{1F} = \sum_{1}^{10} \frac{N_{kF}.n_{k1}}{(EA)_k} l_k = \frac{3Pl}{EA}$$

$$\delta_{2F} = \sum_{1}^{10} \frac{N_{kF}.n_{k2}}{EA} l_k = -\frac{Pl\sqrt{2}}{EA}$$

Après simplification, les équations canoniques s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2(1+\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3P \\ P\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

d'où :

$X_1 = -0.964P$ et $X_2 = 0.152P$

Efforts dans les barres

L'effort total dans la barre *k* vaut :

$$N_k = N_{kF} + \sum_{i=1}^{2} n_{ki}.X_i$$

ou encore :

$N_k = N_{kF} + n_{k1}.X_1 + n_{k2}.X_2$ (Voir tableau)