01 النهايات - الإستمرارية

1 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$

2 $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 + 3x) = 0$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = 0$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\cos \dfrac{1}{x} - 2\right) = -\infty$

6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = 1$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{x+2}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = 1$

7 $n \leq E(x) < n + 1$ حيث n هو الجزء الصحيح للعدد x. $\dfrac{n}{x} \leq \dfrac{E(x)}{x} < \dfrac{n+1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n+1}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n}{x} = 0$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 0$.

8 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x+5} = \dfrac{4}{7}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -5} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -5} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = +\infty$

9 $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{4x^2 + 6x + 9}{2x + 3} = \dfrac{9}{2}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\frac{3}{2}} \dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{3}{2}} \dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = +\infty$

10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1$

11 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x - 5}{x + 1} - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 3$

12 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{2}$

13 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$

14 $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} = 1$

15 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{-2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = -2$

16 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x} = \dfrac{3}{5}$

17 $x = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل.

18 $x = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y = x + 2$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

19 $y = x + 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

20 $x = 5$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب. المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

21 $x = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب. المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل منحى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

22 المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل منحى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

23 المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين معادلتاهما $y = x$ و $y = -x$.

24 المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل منحى تقاربيا و هو منحنى المستقيم ذي المعادلة $y = \sqrt{2}\, x$ و منحنى و المستقيم ذي المعادلة $y = -\sqrt{2}\, x$.

25 .1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$

.2 إذن $(\mathscr{C})$ لا يقبل مستقيما مقاربا بجوار $+\infty$.

26 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$

إذن f مستمرة عند 1.

27 f ليست معرفة عند العدد 0 إذن f ليست مستمرة عند العدد 0.

28 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = f(0)$

إذن f مستمرة عند العدد 0.

29 f ليست معرفة عند 0. إذن f ليست مستمرة عند 0.

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1$

f مستمرة عند العدد 0 عن اليمين و عن اليسار.

30 1. f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$

و $f(0) \times f(1) < 0$. إذن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$

تقبل حلا واحد في المجال $]0 ; 1[$.

لدينا $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ و $f\left(\frac{3}{4}\right) > 0$.

الحل x_0 ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right[$.

31 1. الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ و متناقصة تماما على $\mathbb{R}^-$.

2. f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$

و $f(0) \times f(1) < 0$. إذن المعادلة $x^6 + x^2 - 1 = 0$

تقبل حلا واحد في المجال $]0 ; 1[$.

لدينا $f(1) > 0$ و $f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$.

32 1. الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

f متزايدة تماما على $]-\infty ; -1]$ و $[1 ; +\infty[$.

f متناقصة تماما على $[-1 ; 1]$.

2. f متناقصة تماما على $[-1 ; 1]$ و مستمرة على $[-1 ; 1]$ و $f(-1) \times f(1) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-1 ; 1[$.

33 1. f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.

نعتبر الدالة g حيث $g(x) = f(x) - 2$

g مستمرة على $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1 + x)^2}$$

g متزايدة على $]-\infty ; -2]$ و $[0 ; +\infty[$

g متناقصة على $[-2 ; -1[$ و $]-1 ; 0]$.

2. g معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على $[2 ; 3]$ و $g(2) g(3) < 0$.

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحد في $]2 ; 3[$ بالتالي المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا في $]2 ; 3[$.

34 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = x - \cos x$ ؛ $f'(x) = 1 + \sin x$.

الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

إذن المعادلة تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$.

و بالتالي المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$.

35 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.

الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$

f متناقصة على $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right]$ و $[1 ; +\infty[$

و متزايدة على $\left[\frac{1}{3} ; 1\right]$.

لدينا f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على $[1 ; 3]$ و $f(1) \times f(3) < 0$

إذن المعادلة تقبل حلا واحد في $]1 ; 3[$

36 .1 f معرفة على $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$.

$a = 5$ ؛ $b = -9$ ؛ $c = 19$

$$f(x) = 5x - 9 + \frac{19}{x+2}$$

2 . $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور التراتيب معادلته $x = -2$ و مستقيم مقارب مائلا (Δ) معادلته $y = 5x - 9$.

في المجال $]-\infty ; -2[$، $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ).

في المجال $]-2 ; +\infty[$، $(\mathscr{C}_f)$ فوق (Δ).

37 $m = 0$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$m > 0$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-m)x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2+2x-3} - mx}$$

$0 < m < 1$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$m = 1$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$m > 1$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$m < 0$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$-1 < m < 0$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$m = -1$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$m < -1$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

38 الدالة $x \longmapsto x^2 + x + 1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و الدالة sin مستمرة على $\mathbb{R}$ الدالة h هي مركب الدالتين $x \longmapsto x^2 + x + 1$ و $x \longmapsto sinx$، فهي مستمرة على $\mathbb{R}$. و بالتالي الدالة h مستمرة عند كل عدد حقيقي x_0.

39

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

40 .1 مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$a = 1$ ؛ $b = 1$ ؛ $\varphi(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$.

إذن $f(x) = x + 1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

.2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x) = +\infty$

3 . $x = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y = x + 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

41 حجم المكعب هو x^3.

حجم المتوازي المستطيلات هو $3(3x + 4)$.

حل المعادلة $x^3 = 3(3x + 4)$ في $\mathbb{R}_+^*$.

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 9x - 12$$

الدالة f مستمرة $\mathbb{R}_+^*$، متزايدة على $[\sqrt{3} ; +\infty[$ و متناقصة على $]0 ; \sqrt{3}]$.

$f(3) = -12$ و $f(4) = 16$

$f(3) \times f(4) < 0$ و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]3 ; 4[$.

$f(3,5) = -0,625$ و $f(3,6) = 2,256$

$f(3,5) \times f(3,6) < 0$

إذن الحل x ينتمي إلى المجال $]3,5 ; 3,6[$.

و بالتالي يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات من أجل قيمة x حيث $3,5 < x < 3,6$.

02 الاشتقاق

1

• 1 f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 2$.

• 2 f قابلة للاشتقاق عند 5 و $f'(5) = \frac{9}{4}$.

• 3 f قابلة للاشتقاق عند 2- و $f'(-2) = 192$.

• 4 f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -1$.

• 5 f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• 6 f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -12$.

• 7 f قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و $f'(0) = 0$.

• 8 f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2

• 1 $y = 7x - 14$

• 2 المنحنى يقبل نصفي مماس يوازيان محور التراتيب في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلاتهما $x = 1$ حيث $x \geq 1$ و $x = 1$ حيث $x \leq 1$.

• 3 $y = 12x - 24$ ؛ $y = -12x + 24$

• 4 $x = 0$ على المجال $[0 ; +\infty[$.

• 5 المنحنى يقبل نصفي مماس يوازيان محور التراتيب في النقطة A فاصلتها 2، معادلاتهما $x = 2$ حيث $x \geq 2$ و $x = 2$ حيث $x \leq 2$.

• 6 المنحنى يقبل نصفي مماس معادلاتهما

$y = 4x - 3$ حيث $x \geq 1$

$y = 1$ حيث $x \leq 1$

• 7 المنحنى يقبل نصف مماس عن اليمين عند نقطة فاصلتها 2-، يوازي محور التراتيب و معادلته $x = -2$ حيث $x \geq -2$.

3

• 1 $D' = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2}$

• 2 $D' = \mathbb{R} - \{2\}$ ؛ $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2}$

• 3 $D' = \mathbb{R} - \{1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 4}{4(1 - x)^2}$

• 4 $D' = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2}$

• 5 $D' = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x + 1)^2}$

• 6 $D' = \mathbb{R} - \{1\}$ ؛ $f'(x) = 2 + \frac{4}{(1 - x)^3}$

• 7 $D' =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

• 8 $D' = [0 ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{\sqrt{2}(3x - 1)}{2\sqrt{x}}$

• 9 $D' =]-2 ; 2[$ ؛ $f'(x) = \frac{-2}{(2 + x)^2}\sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}}$

• 10 $D' = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = -\frac{1}{2}\cos\pi x + \left(\frac{2x + 1}{4}\right)\pi \sin\pi x$

• 11 $D' = \left]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right[$ ؛ $f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

• 12 $D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$f'(x) = \frac{2(\cos 2x - \sin 2x + 1)}{(1 - \sin 2x)^2}$

4

f مستمرة عند 1.

f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 0$

5

• 1 $Df = \mathbb{R} - \{0\}$

• 2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = \frac{1}{2}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = \frac{1}{2}$.

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 فإنها مستمرة عند 0.

6

• 1 $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 3x^2(1 - x)^2(1 - 2x)$

f متزايدة على $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

و متناقصة على $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

•2 $D = \mathbb{R}_+$ ؛ $f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$

f متزايدة على $\left[\frac{25}{4} ; +\infty\right[$

و متناقصة على $\left[0 ; \frac{25}{4}\right]$.

•3 $D = \mathbb{R} - \{2\}$ ؛

$$f'(x) = \frac{3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)^2}$$

f متزايدة على $]-\infty ; 2-\sqrt{3}]$ و $[2+\sqrt{3} ; +\infty[$

f متناقصة على $[2-\sqrt{3} ; 2[$ و $]2 ; 2+\sqrt{3}]$.

•4 $D = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $f'(x) = -1 + \frac{8}{x^3}$

f متزايدة على $]0 ; 2]$

f متناقصة على $]-\infty ; 0[$ و $[2 ; +\infty[$.

•5 $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 1 + \cos x$

f متزايدة على $\mathbb{R}$.

•6 $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ؛

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$$

f متناقصة على كل مجال محتوى في D.

•7 $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 12x^2$

f متزايدة على $\mathbb{R}$.

•8 $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{7}{(x+1)^2}$

f متزايدة على $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$.

•9 $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ ؛ $f'(x) = \frac{-7}{(2x-5)^2}$

f متناقصة على $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$ و $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

•10 $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 12x^2 - 12x$

f متزايدة على $]-\infty ; 0]$ و $[1 ; +\infty[$.

f متناقصة على $[0 ; 1]$.

7 f دالة ناطقة إذن f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ و قابلة للاشتقاق n مرة على $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$.

من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

8 •1 $n \geq 6$ ؛ $f^{(6)}(x) = 0$

•2 من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ؛

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$$

•3 من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

9 $f''(x) = -9\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$-9\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 9\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

إذن f حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$.

10 •2

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

•3 $A\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$ ؛ $(T_A) : y = -8x + 12$

•4 يكفي إثبات أن من إجل كل عدد x من D_f

$$f(3-x) = -f(x)$$

11 أ) •2 جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2• f مستمرة و متزايدة تماما على $[1,6\ ;\ 1,7]$

و $f(1,6)\ f(1,7) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحد α حيث $1,6 < \alpha < 1,7$.

ب) 1•

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	0

$1,6 < \alpha < 1,7$ ؛ $\beta = g(\alpha)$

2• $(\Delta) : y = -x + 1$

3• نضع $d(x) = g(x) - (-x + 1) = \dfrac{(x-1)x^3}{x^3 + 1}$

إذا كان $0 \leq x \leq 1$ فأن $d(x) \leq 0$

إذا كان $-1 < x \leq 0$ فأن $d(x) \geq 0$

$(1\ ;\ 0)$ حل للجملة $\begin{cases} y = g(x) \\ y = -x + 1 \end{cases}$

4• معادلة (T) هي $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

12 1• $a = 4$ ؛ $b = 0$

2• $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

$(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته $y = 3$.

13 1• $f(x) = a$ ؛ $a \in \mathbb{R}$

2• $f(x) = -5x + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

3• $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

4• $f(x) = 6\sqrt{x} + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

5• $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

6• $f(x) = ax + b$ ؛ $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$

7• $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + bx + c$ ؛ $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

8• $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + bx + c$ ؛ $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

9• $f(x) = \dfrac{1}{12}x^3 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + bx + c$ ؛

$b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

10• $f(x) = -\dfrac{9}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi}{3}x + bx + c$ ؛

$b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

14 1• $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-a)^2}$ ؛ $f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{-6}{(x-a)^4}$

2• $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

3• $g(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$

$g^{(n)}(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

15 1• ب) • $h(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$

$h(x) > 0$ من أجل $x > 1$.

$h(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

$h(x) < 0$ من أجل $x < 1$.

2• $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

ب) • $f(x) = x^2 - x + \dfrac{4}{(x+1)}$

$a = 1$ ؛ $b = -1$ ؛ $c = 4$

جـ) • $f(x) - g(x) = \dfrac{4}{x+1}$

03 الدوال الأصلية

1 الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

1. $F'(x) = 3x^2 - 1 = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق

على $]-1 ; +\infty[$ و $F'(x) = \sqrt{x+1} = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $]-1 ; +\infty[$

3. الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق

على $]0 ; +\infty[$ و $F'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f

على $]0 ; +\infty[$

4. الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $F'(x) = \cos x - x\sin x = f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2 الدالة $F : x \longmapsto 2\sin^2 x$

هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 2\sin 2x$

على $\mathbb{R}$ لأن الدالة L معرفة و قابلة للاشتقاق

على $\mathbb{R}$ و $L'(x) = f(x)$.

3 1. $F(x) = -\frac{7}{12} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

2. $F(x) = 1 + \cos 2x$

3. $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sin 3x$

4. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{2}$

4 1. الدوال F حيث $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

2. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c$

3. $F(x) = -\cos x - 2\sin x + c$

4. $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + c$

5. $F(x) = 4\sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + c$

6. $F(x) = x - \tan + c$

7. $F(x) = \frac{1}{5}(x-3)^5 + c$

8. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$

9. $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+4)^3 + c$

10. $F(x) = -\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 + c$

11. $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3 + c$

12. $F(x) = -\frac{1}{(x-3)} + c$

13. $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + c$

14. $F(x) = \frac{1}{\cos x} + c$

15. $F(x) = 2\sqrt{x+1} + c$

16. $F(x) = 2\sqrt{3 + \sin x} + c$

17. $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + c$

18. $F(x) = x\sin x + c$

19. $F(x) = \frac{\sin x}{x} + c$

20. $F(x) = x\sqrt{1+x^2} + c$

5 1. $F(x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

2. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$

3. $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

4. $F(x) = \frac{-5}{4(x+5)^4} + c$

5. $F(x) = x^2 + 3x + c$

6. $F(x) = \frac{-1}{3(1+x^3)} + c$

7. $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + c$

6 $F'(x) = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $]1 ; +\infty[$.

7 $F'(x) = f(x)$ على $\mathbb{R}$.

الدوال $x \longmapsto -x^3 + 2x^2 + x - 1 + c$ هي الدوال

الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

8 1• $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

2• $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

3• $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$

4• $F(x) = -\frac{1}{x^2} + c$

5• $F(x) = \frac{3}{2x^2} + \sin x + c$

6• $F(x) = 12\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

7• $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + c$

9 1• $F(x) = 2\sqrt{4 + \sin x}$

2• الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

هي الدوال $x \longmapsto 2\sqrt{4 + \sin x} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

10 1• $F(x) = x + \frac{27}{2x^2}$

إذن $a = 1$ و $b = \frac{27}{2}$

2• $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

3• $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + 14$

11 1• $G(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) + c$

2• $F(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) - 1$

12 العبارة الخطية لـ $\cos^3 x$ و $\cos^3 x$

هما $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

الدوال $x \longmapsto \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال $x \longmapsto -\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

04 الدوال الأسية

1 $e^{2x}e^{3x} = e^{5x}$ ؛ $e^{x}e^{-2x} = e^{-x}$

$e^{1-x}e^{3x+3} = e^{2x+4}$ ؛ $(e^{3x})^2 = e^{6x}$ ؛ $(e^{x})^{-2} = e^{-2x}$

$e^{\frac{1}{2}}e^{-2} = e^{-\frac{3}{2}}$ ؛ $\frac{e^5}{e^2} = e^3$ ؛ $\frac{e^{-0,2}}{e^{0,2}} = e^{-0,4}$

2 $a = 1$ و $b = -1$

3 $a = 1$ ؛ $b = 0$ ؛ $c = -4$

4 $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ ؛ $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x - e^x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x + 1} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (2xe + 3 - 5e^x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + e^x} = 0$

$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x + 1} = 0$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x = -\infty$

5 $f(x) = 2e^x$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 2e^x$

$f(x) = e^{3-x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = -e^{3-x}$

$f(x) = \sqrt{e^x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$

$f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x}$

$f(x) = \frac{5e^x - 1}{1 - e^x}$ ؛ $D = \mathbb{R}^*$ ؛ $f'(x) = \frac{4e^x}{(1 - e^x)^2}$

$f(x) = e^{3x+1}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 3e^{3x+1}$

$f(x) = e^{\sin 2x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 2\cos 2x\, e^{\sin 2x}$

$f(x) = (3x + 1)e^x$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (3x + 4)e^x$

$f(x) = e^x \sin x$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (\sin x + \cos x)e^x$

$f(x) = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$

$D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = e^{-x}(-4\cos 3x - 2\sin 3x)$

6 حل المعادلة $e^x = 1$ هو 0.

حلا المعادلة $e^{x^2} = e^{25}$ هما 5 و -5.

حلا المعادلة $e^{5x-1} = e^{x^2+5}$ هما 2 و 3.

حلول المعادلة $e^{\sin x} = e^{\cos x}$ هي الأعداد x

حيث $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

حل المعادلة $e^x + 1 = \frac{2}{e^x}$ هو 0.

المعادلة $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

حل المعادلة $e^{4x} - e^{2x} = 0$ هو 0.

حل المعادلة $e^x + e^{-x} = 2$ هو 0.

حل المعادلة $e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$ هو 0.

حل المعادلة $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ هو 0.

7 مجموعة حلول المتراجحة $e^x \geq \sqrt{e}$ هي $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ هي $[-3 ; 2]$

مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} - e^x < 0$ هي $]-\infty ; 0[$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x}+2e^x-3 \geq 0$ هي $[0;+\infty[$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{4x}+5e^{2x}-6 \leq 0$ هي $]-\infty;0]$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^3)^2$ هي $]-3;2[$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} > e^{x+1}$ هي $]1 ; +\infty[$.

8

$f(x) = e^{-x}$ ؛ $F(x) = -e^{-x}$

$f(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - 5e^{2x}$ ؛ $F(x) = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{5}{2}e^{2x}$

$f(x) = xe^{x^2}$ ؛ $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = \frac{-e^x}{(e^x+3)^2}$ ؛ $F(x) = \frac{1}{e^x+3}$

9 $a = 2$ ؛ $b = -3$

10 1 . حل المعادلة $f(x) = 0$ هو 0.

2 . $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 . $k<0$ ؛ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا واحدا سالبا.

$k=0$ ؛ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا هو 0.

$k>0$ ؛ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا واحدا موجبا.

6 . $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,dx = e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = +\infty$

11 1 . f معرفة على $\mathbb{R}$ ؛ $f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 . $(T) : y = 5x$

3 .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4e^{2x} + e^x - 5$		$-$	0	$+$	
$f(x) - 5x$		$+$	0	$+$	

$(\mathscr{C})$ فوق (T) في المجال $]-\infty ; +\infty[$.

(T) يقطع $(\mathscr{C})$ في النقطة $O(0 ; 0)$.

12 1. $D = \mathbb{R}$ 2 . $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3 . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ 4 . $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ؛ f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

5 . يكفي إثبات أن $f(x) + f(-x) = 1$

6 . $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

7 . أ) $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$

ب) $g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$ ؛ $g(0) = \frac{1}{2} - f(0)$

تغيرات g ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

جـ) $(\mathscr{C})$ تحت (T) في المجال $]0 ; +\infty[$.

$(\mathscr{C})$ فوق (T) في المجال $]-\infty ; 0[$.

$(\mathscr{C})$ يقطع (T) عند النقطة $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$.

13 1. $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\frac{2}{e} + 1$

2. نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب I_{n+1}.

و نجد $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

3. نستعمل $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{5}{e} + 2$

$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{16}{e} + 6$

14 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

3. $A(\lambda) = 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}$

أو أيضا $A(\lambda) = 16\,[1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}]\ cm^2$

$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{\lambda}} - \frac{\lambda}{e^{\lambda}}\right) = 1$

15 1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

لدينا $g(0) = 0$.

2. ينتج أن $g(x) \geq 0$. أي $e^x - x - 1 \geq 0$

و بالتالي $e^x - x \geq 1$ أي $0 < \frac{e^x}{e^x - x} \leq e^x$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\frac{e^x}{e^x - x} > 0$

3. حسب السؤال 2، لدينا من أجل كل عدد حقيقي x،

$\frac{e^x}{e^x - x} > 0$ أي $f(x) > 0$.

$0 \leq \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \leq \lim_{x \to -\infty} e^x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

5.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0 ↗	$\frac{e}{e-1}$	↘ 1

6. المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

16 2.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	1

3. $a = 1$ و $b = -2$ ؛ $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(-x) = -f(x)$

و بالتالي f فردية على $\mathbb{R}$.

5. f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 0

إذن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة إنعطاف $(\mathscr{C})$.

6. تنعدم $(T) : y = \frac{1}{2}x$

7 . في المجال $]0\,;+\infty[$، (T) فوق $(\mathscr{C})$

في المجال $]-\infty\,;0[$، (T) تحت $(\mathscr{C})$ و عند النقطة $O(0\,;0)$، (T) يقطع $(\mathscr{C})$.

17 1 . مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$.

2 . من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $1 < 2 + \cos x < 3$

و $e^{1-x} > 0$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$(2+\cos x)\,e^{1-x} > 0$. و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) > 0$.

3 . $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $-\sqrt{2} \le \cos x + \sin x \le \sqrt{2}$

و بالتالي $2-\sqrt{2} \le 2 + \cos x + \sin x \le 2+\sqrt{2}$

أي من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$2 + \cos x + \sin x > 0$ ؛ (لأن $2-\sqrt{2} > 0$)

4 . $1 \le 2 + \cos x \le 3$

إذن $e^{1-x} < (2+\cos x)\,e^{1-x} < 3e^{1-x}$

أي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

5 . $f'(x) = -(2+\cos x+\sin x)\,e^{1-x}$

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) < 0$

و بالتالي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0

• المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $-\infty$.

7. الدالة $x \longmapsto f(x) - 3$ معرفة، مستمرة و متناقصة تماما على $[0\,;\pi]$

و $\left(f(0)-3\right)\left(f(\pi)-3\right) < 0$

إذن المعادلة $f(x) - 3 = 0$ تقبل حلا واحدا في $]0\,;\pi[$.

أي المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α حيث $0 < \alpha < \pi$.

05 الدوال اللوغاريتمية

1 $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0$

$4\ln(\sqrt{2}+1) + 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2 = -\ln 32$

$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2} = \ln\sqrt{2}$

$\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1) = 0$

$2\ln e^4 = 8$ ؛ $8 - \ln\frac{1}{e} = 9$

2 $\ln a^2b^3 = 2\ln a + 3\ln b$

$$6\ln \frac{1}{\sqrt{a^2b}} = -6\ln a - 3\ln b$$

3 $\ln 500 = 2\ln 2 + 3\ln 5$

$\ln 6,25 = 2\ln 5 - 2\ln 2$ ؛ $\ln \frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ldots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100} =$$
$$= -2\ln 2 - 2\ln 5$$

4 $n \geq 1$ ؛ $n \geq 10$ ؛ $n \geq 4$ ؛ $n \leq 9$

5 مجموعة حلول المعادلة $\ln x = 2$ هي $\{e^2\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln x = -2$ هي $\{e^{-2}\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln x = \frac{1}{2}$ هي $\{\sqrt{e}\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln |x| = 2$ هي $\{e^2 ; -e^2\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln x^2 = 4$ هي $\{e^2 ; -e^2\}$

مجموعة حلول المعادلة $[\ln (x)]^2 = 4$ هي $\{e^2 ; e^{-2}\}$

6 • مجموعة حلول المعادلة

$\ln (1 - x) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ هي $\{-\frac{1}{8}\}$.

• مجموعة حلول المعادلة $\ln (1 - x)^2 = 4\ln 2$

هي $\{-3 ; 5\}$.

مجموعة حلول المعادلة $\ln\left(\frac{1}{1 - x}\right) = -3\ln 2$ هي $\{-7\}$.

مجموعة حلول المعادلة $\ln\sqrt{1 - x} = \frac{1}{2}\ln 3$ هي $\{-2\}$.

7 • مجموعة حلول المعادلة

$\ln (2x + 7) = \ln (x - 3)$ هي $\varnothing$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln x + \ln (3x + 2) = \ln (2x + 3)$ هي $\{1\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln (x - 3) = \ln (x + 7) - \ln (x + 1)$ هي $\{5\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln (x^2 - 2x - 3) = \ln (x + 7)$ هي $\{-2 ; 5\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln\left(\frac{x + 7}{x + 1}\right) = \ln (x + 3)$ هي $\{1\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\frac{1}{2}\ln (1 + x^2) = \ln (x + 2)$ هي $\{-\frac{4}{3}\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln (x - 1) + \ln (x + 1) = 2 + \ln \sqrt{1 + x}$$

هي $\{\sqrt{1 + e^4}\}$.

8 1 • $a = 12$ ؛ $b = -11$ ؛ $c = 2$.

$$P(x) = (x + 1)(12x^2 - 11x + 2)$$

• مجموعة حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي $\{-1 ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{4}\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$$12 (\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9\ln x + 2 = 0$$

هي $\{\frac{1}{e} ; e^{\frac{2}{3}} ; e^{\frac{1}{4}}\}$

9 • مجموعة حلول المتراجحة $\ln(3-x) \le 0$

هي $[2\,;3[$.

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right) \ge 0$

هي $\left]-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$.

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x+2)+\ln(3+x)>0$

هي $\left]\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2-4) > \ln(6x+5)$

هي $]3+3\sqrt{2}\,;+\infty[$.

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(2x-5)+\ln(x+1) \le 2\ln 2$ هي $\left]\dfrac{5}{2}\,;3\right]$.

10 • مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$ هي $]-4\,;+\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2+11x+30) > \ln(x+14)$

هي $]-14\,;-8[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$.

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2-2e^2) \le \ln x + 1$ هي $[e\sqrt{2}\,;2e]$.

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right) \ge 0$ هي $\left]\dfrac{5}{3}\,;3\right]$.

11 • مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} x+y=30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 6 \end{cases}$

هي $\{(12\,;18)\,;(18\,;12)\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$

هي $\{(2\,;1)\,;(1\,;2)\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$

هي $\{(e^2\,;e^{-2})\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \dfrac{2}{3} \\ x+y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

هي $\varnothing$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} 5x+4y=12 \\ \ln(x-1)+\ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

هي $\left\{\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{4}\right);\left(\dfrac{8}{5};1\right)\right\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} \ln(x^2-y^2)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$

هي $\left\{\left(\dfrac{5}{4}\,;-\dfrac{3}{4}\right)\right\}$.

12 $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \sqrt{1+(\ln x)^2} = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+(\ln x)^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} (x-2\ln x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x-2}{\ln x+2} = 1$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x-2}{\ln x+2} = 1$

13 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x-\ln x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\ln x}{1+x} = +\infty$

؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{2x-3}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x-(\ln x)^2\right] = +\infty$

14 $f(x) = \ln(5x-1)$ ؛ $D = \left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$

$f'(x) = \frac{5}{5x-1}$.

$f(x) = \ln|7-2x|$ ؛ $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

$f'(x) = \frac{-2}{7-2x}$.

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ ؛ $D =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$

$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$.

$f(x) = x^2\ln x$ ؛ $D =]0\,;+\infty[$

$f'(x) = x(1+2\ln x)$.

• $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ؛ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

• $f(x) = 3x + \ln(1+e^{-2x})$ ؛ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3 - \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

• $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ ؛ $D = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x}-1}$.

• $f(x) = \ln(4x^2-3x-1)$ ؛

$D = \left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

$f'(x) = \frac{8x-3}{4x^2-3x-1}$.

• $f(x) = x^2\ln(1+x)$ ؛ $D =]-1\,;+\infty[$

$f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}$.

• $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ؛ $D =]0\,;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)$.

15 $D = \mathbb{R}$ ؛ $a = -2$ ؛ $b = 5$.

$f(x) = -2 + \frac{5e^x}{2e^x+1}$.

الدالة F حيث $F(x) = -2x + \frac{5}{2}\ln(2e^x+1)$

المعرفة على $\mathbb{R}$ هي دالة أصلية للدالة f.

16 $a = 1$ ؛ $b = -4$ ؛ $f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x+4}$.

الدالة الأصلية F للدالة f حيث $F(0) = 0$ معرفة

كما يلي $F(x) = e^x - 4\ln(e^x+4) - 1 + 4\ln 5$

17 $\left(\frac{\sqrt[6]{6}\,(\sqrt[3]{2})^2\,\sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4}\,\sqrt{\sqrt[3]{6^2}}}\right)^6 = \frac{2^9}{3^6}$ إذن $a = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$$a = \frac{6^{\frac{1}{6}} \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times 12^{\frac{1}{2}}}{(3^4)^{\frac{1}{3}}\left[(6^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

18 $\sqrt[3]{8} = 2$ ؛ $\sqrt[4]{81^3} = 27$ ؛ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt[5]{4^2}\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}} = 2^{\frac{1}{20}}$ ؛ $\frac{(\sqrt[3]{4})^2\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} = 2^{\frac{59}{60}}$

19

• مجموعة حلول المعادلة $4^x + 3\times 2^x + 10 = 0$ هي $\varnothing$

• مجموعة حلول المعادلة $9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4}$

هي $\left\{\frac{\ln 27 - \ln 2}{\ln 3}\right\}$

• مجموعة حلول المعادلة

$\frac{1}{2}\cdot 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x}$ هي $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

• مجموعة حلول المعادلة $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{x}$ هي $\{1\}$

(يمكن الاعتماد على الحل البياني).

20 • $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ؛ $D = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$.

• $f(x) = 2^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (\ln 2)\, 2^{x}$.

• $f(x) = x^{2} 3^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = x 3^{x}(2 + x\ln 3)$.

• $f(x) = x^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}_+^*$ ؛ $f'(x) = (1 + \ln x)x^{x}$.

• $f(x) = (\ln x)^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$f'(x) = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)(\ln x)^{x}$ حيث $x > 1$.

• $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{x}$ ؛ $D =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$f'(x) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x+1}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$.

21 • $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ؛ $D =]0 ; +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = x^{\pi}$ ؛ $D =]0 ; +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ ؛ $D =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$f(x) = \frac{x^{x}}{\ln x}$ ؛ $D =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ؛ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

22 الدالة F حيث $F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ على $]0 ; +\infty[$.

الدالة F حيث $F(x) = \frac{2}{7} x^{3}\sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = x^{2}\sqrt{x}$ على $]0 ; +\infty[$.

الدالة F حيث $F(x) = \frac{1}{\ln 5} . 5^{x}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 5^{x}$ على $\mathbb{R}$.

23 • 1 $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• 2 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

• 3 من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛

$$f'(x) = 2\left(\ln|x| + \frac{x-1}{x}\right)$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	|| -	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$ || $+\infty$ ↘	0 ↗	$+\infty$

• 4 $f(x) = 0$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$.

24 • 1 $D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

• 2 من أجل كل عدد حقيقي x من D_f، $(-x) \in D_f$

و $f(-x) = -f(x)$. المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مركز تناظر

و هو المبدأ O.

• 3 $x = 1$ ؛ $x = -1$ ؛ $y = 0$ هي معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

• 4 $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	//////	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	//////	$-\infty \nearrow 0$	

• 5 $(\Delta): y = \dfrac{2x}{(e-1)(e+1)} - \dfrac{2e}{(e-1)(e+1)} + \ln\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)$

25 • 1 f معرفة على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد

حقيقي x ؛ $f'(x) = 1 + \dfrac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}}$

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• 2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^{3x}) = 0$

• 3 $f(x)$ من الشكل $ax + b + \varphi(x)$

حيث $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 4$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

• 4 من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

(لاحظ أن $1 + e^{-3x} = \dfrac{e^{3x} + 1}{e^{3x}}$ واستعمل خواص الدالة $\ln$).

• 5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = 0$

• 6 المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 4x - 4$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

26 •1 $E =]\ln\sqrt{2} ; +\infty[$

• 2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \ln\sqrt{2}} f(x) = +\infty$

من أجل كل عدد حقيقي x من E ؛

$$f'(x) = \frac{-14e^{2x}}{(e^{2x}+5)(e^{2x}-2)}$$

x	$\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0

• 3 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ ؛ $g'(x) = f'(x) - 1$

الدالة g متناقصة تماما على E ؛ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \ln\sqrt{2}} g(x) = +\infty$

x	$\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	$-\infty$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha > \ln\sqrt{2}$

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع المستقيم ذا المعادلة $y = x$

في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha > \ln\sqrt{2}$.

06 المتتاليات العددية

1 (u_n) هي متتالية أعداد موجبة.

1. $u_0 = 2$ إذن $0 < u_0 < 3$

• نفرض أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 3$

إذن $6 < u_n + 6 < 9$

$0 < \sqrt{6} < \sqrt{u_n + 6} < \sqrt{9}$ بالتالي $0 < u_{n+1} < 3$

• إذن من أجل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 3$

2. $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{8}$ إذن $u_1 > u_0$.

• نفرض أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $u_n > u_{n-1}$

$$u_{n+1}^2 = u_n + 6$$

$$u_n^2 = u_{n-1} + 6$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n - u_{n-1}$$

بما أن $u_n - u_{n-1} > 0$ فإن $u_{n+1}^2 > u_n^2$

أي $u_{n+1} > u_n$.

• إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2 (u_n) متتالية أعداد موجبة.

1. $u_0 = 1$ إذن $u_0 < 2$.

• نفرض أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $u_n < 2$.

نبرهن أن $u_{n+1} < 2$. $u_n < 2$ إذن $2 + u_n < 4$.

بالتالي $\sqrt{2 + u_n} < 2$. ينتج أن $u_{n+1} < 2$.

2. لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$

هذا العدد موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < u_{n+1}$

بالتالي (u_n) متزايدة.

3 $u_0 = 9$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$

1. يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

2. احسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

و أدرس إشارة $-u_n^2 + u_n + 5$.

4 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$

لاحظ أن $2u_n = 6 - 2^{n+1}$ و $2u_n - 3 = 3 - 2^{n+1}$

أي $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$ (باستعمال الاستدلال بالتراجع)،

5 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{4 + u_n}$

1. لاحظ أن $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{4 + u_n} = 1 - \dfrac{3}{4 + u_n}$

• نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \geq 0$. ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1 - \dfrac{3}{4 + u_n} \leq 1$ أي $u_{n+1} \leq 1$.

2. الدالة $x \longmapsto \dfrac{3 + x}{4 + x}$ متزايدة على المجال [0,1].
(استعمال الدالة المشتقة).

3. المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

6 العدد $4^1 - 1$ مضاعف العدد 3.

$$4^{n+1} - 1 = 4(4^n) - 1$$
$$= (3+1)4^n - 1$$
$$= 3 \times 4^n + (4^n - 1)$$

7 العدد $7\times 3^0 + 4$ يقبل القسمة على 11.

نفرض أن $7\times 3^{5n} + 4$ يقبل القسمة على 11.

لدينا $7\times 3^{5n+5} + 4 = 7\times 3^{5n}\times 3^5 + 4$
$$= 7\times 3^{5n}\times 243 + 4$$
$$= 7\times 3^{5n}\times (242+1) + 4$$
$$= (11\times 22\times 7\times 3^{5n}) + (7\times 3^{5n} + 4)$$

ينتج أن العدد $7\times 3^{5n+5} + 4$ يقبل القسمة على 11.

8 • الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $4^n - 3n - 1$ يقبل القسمة على 9

لدينا $4(4^n - 3n - 1) = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 - 9n$

أي $4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4(4^n - 3n - 1) + 9n$

نستنتج أن $4^{n+1} - 3(n+1) - 1$ يقبل القسمة على 9.

9 من أجل $n = 0$، $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

لاحظ أن $(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$
$$= 3k_1 + 3k_2 = 3k'$$

10 من أجل $n = 0$، $(1+a)^0 \geq 1$.

نفرض أن $(1+a)^n \geq 1 + na$ حيث n عدد طبيعي

لدينا $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$

$$(1+an)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

11

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

12 لاحظ أن

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

13 $u_0 = 1$، $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$

لاحظ أن $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$

$$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$$
$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$
$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2$$
$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$$

و بالجمع طرفا لطرف و التبسيط نجد

$$u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0$$

أي $u_{n+1} = u_n + 1$

إذن • (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ و أساسها $r = 1$.

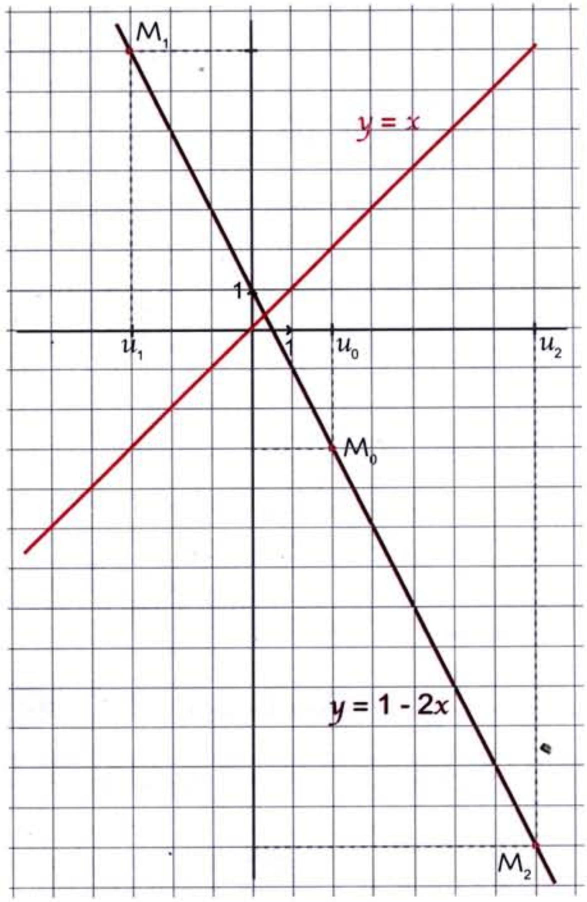
• من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = n + 1$

• (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 1 - 2u_n$

$M_n(u_n ; u_{n+1})$ هي نقطة من التمثيل البياني.

$M_0(2 ; -3)$ ؛ $M_1(-3 ; 7)$ ؛ $M_3(7 ; -13)$ ؛ ...

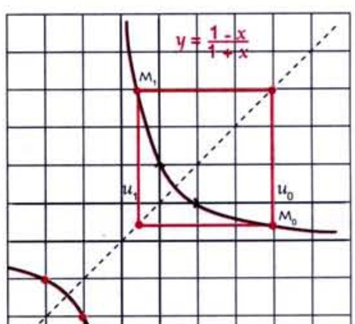


التخمين : المتتالية (u_n) ليست متقاربة.

حدود المتتالية (u_n) متناوبة في الإشارة و النقط M_n تبتعد أكثر فأكثر في الجهتين.

المتتالية (u_n) ليس لها نهاية.

15 $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$



$M_0\left(3 ; -\frac{1}{2}\right)$ ؛ $M_1\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$

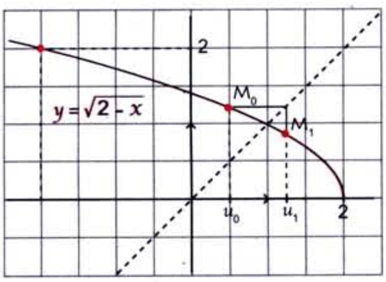
$M_2\left(3 ; -\frac{1}{2}\right)$ ؛ $M_4\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$

$u_n = 3$ من أجل n زوجي

$u_n = -\frac{1}{2}$ من أجل n فردي

التخمين : (u_n) ليس متقاربة و ليس لها نهاية.

16 $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$



$M_0\left(\frac{1}{2} ; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}} ; u_3\right)$

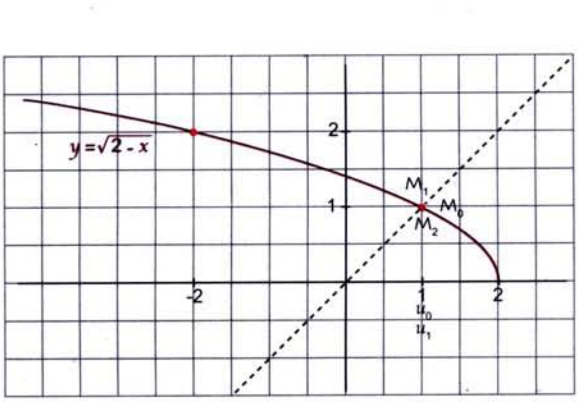
$M_2\left(u_3 ; u_4\right)$

(u_n) متقاربة و نهايتها ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

أي $\sqrt{2 - \ell} = \ell$ و نجد $\ell = 1$ إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

17 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

$M_0(1;1)$ ؛ $M_1(1;1)$ ؛ $M_2(1;1)$... ؛ $M_2(1;1)$



المتتالية ثابتة $u_n = 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty}$.

18 .1 $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$

من أجل $n \geq 1$ ؛ $\frac{1}{n} \leq 1$ و $\frac{2}{n} \leq 2$

و بالتالي $1 \leq u_n \leq 3$ أي (u_n) محدودة.

.2 $u_n = \frac{n^2+1}{n}$

$= n + \frac{1}{n}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، $2 \leq u_n$

(u_n) محدودة من الأسفل.

.3 $u_n = \frac{n+3}{2n-1}$.

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_n \geq \frac{1}{2}$

و $u_0 = -3$. إذن (u_n) محدود من الأسفل بالعدد 3-.

19 .1 $u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

$0 < \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} < 1$.

إذن (u_n) محدودة.

.2 $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $0 \leq \sqrt{n^2+1} - n$ و $u_n = f(n)$

إذن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

.3 $u_n = 4^n - 3^n$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $0 \leq 4^n - 3^n$

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

20 $u_0 = \frac{1}{7}$

$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

نبرهن بالتراجع على $\mathbb{N}$ أن $u_n \leq \frac{3}{4}$.

21 $u_n = \frac{n+1}{n}$ ؛ (u_n) متناقصة و متقاربة

و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

$v_n = -n$ ؛ (v_n) متناقصة و متباعدة

و $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

22 • $u_n = 2^{n-1}$. (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و أساسها $q = 2$. u_n متزايدة و غير متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• $v_n = \frac{1}{3^{n-1}}$، (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 3$ و أساسها $q = \frac{1}{3}$. المتتالية (v_n) متناقصة و متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

23 • $u_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$

(u_n) متزايدة و متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

• $v_n = (-2)^{n-1}$. المتتالية (v_n) غير رتيبة و متباعدة.

(v_n) ليس لها نهاية.

24 $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

.1 u_n من الشكل $u_n = f(n)$. من دراسة تغيرات f ينتج أن (u_n) متناقصة

(يمكن استعمال الإستدلال بالتراجع).

2 . (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل، فهي متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

25 .1 $q=\frac{1}{3}$ و $u_0=-2$. $0<q<1$

و $u_0<0$. إذن المتتالية الهندسية متناقصة.

2. $u_0=\frac{1}{3}$ و $q=-\frac{\sqrt{1}}{3}$.

$q<0$ إذن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

26 .1 $v_0=1$ و $q=2$

$v_0>0$ و $q>1$ إذن المتتالية الهندسية (v_n) متزايدة.

2. $v_0=-1$ و $q=-3$

$q<0$ المتتالية الهندسية (v_n) ليست رتيبة.

27 .1 $u_0=1$ و من أجل عدد طبيعي n ؛

$u_{n+1}=\sqrt{n+7}$. لاحظ أن $\sqrt{n+6}<\sqrt{n+7}$.

إذن (u_n) متزايدة.

2. $v_0=8$ و $v_{n+1}=\sqrt{3v_n+1}$

باستعمال الاستدلال بالتراجع يمكن إثبات

أن (v_n) متناقصة.

28 $u_n=1+n+\sin n$

.1 $n\le u_n\le 2+n$

2 . المتتاليتان الحسابيتان (v_n) و (w_n) معرفتان كما يلي : $v_n=2+n$ و $w_n=n$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} w_n=+\infty$

إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

29 $u_n=\frac{n^4}{n!}$ حيث n عدد طبيعي.

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n\ge 0$.

إذن (u_n) محدودة من الأسفل و متناقصة بدءا من u_3.

عند استعمال الإستدلال بالتراجع لاحظ أن $\frac{1}{n}<\frac{1}{n+1}$

إذن (u_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

30 $u_0=2$ و $2u_n=u_{n+1}+1$ و $v_n=u_n-1$.

1 . نجد $v_{n+1}=2v_n$. إذن (v_n) متتالية هندسية حيث $v_0=1$ و $q=2$.

2 . لدينا $v_n=2^n$.

إذن $u_n=2^n-1$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

31 $u_0=3$ و $u_n=\frac{1}{3}u_{n-1}-4$

1 . (u_n) متناقصة. (استعمال الاستدلال بالتراجع)

2 . $v_n=u_n+6$ نبرهن أن $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

حيث (v_n) متتالية هندسية. $v_0=9$ و $q=\frac{1}{3}$

و $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3 . (v_n) متتالية هندسية مع $0<q<1$ و $v_0=9$

إذن $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=-6$.

32 $u_n=\frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n=\frac{2n+2}{n+2}$

المتتالية (u_n) متزايدة لأن الدالة المرفقة بها متزايدة على $]0;+\infty[$. المتتالية (v_n) متناقصة لأن الدالة المرفقة بها متناقصة على $]0;+\infty[$.

$u_n - v_n = \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right)$ ؛ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 2$

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 2$$

33 $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$ و $v_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1}$

كل من (u_n) و (v_n) متناقصة.

إذن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

34 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$

من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{(n+1)!} > 0$

إذن (u_n) متزايدة. $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{n+1}{n.(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)(n+1)!}$$

و بعد التبسيط نجد $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(n+1)!n.(n+1)}$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ و بالتالي (v_n) متناقصة.

لدينا $v_n - u_n = -\frac{1}{n.n!}$ ؛ $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

(u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

35 $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(k+1)^2}$$

$u_{n+1} - u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة.

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(u_{n+1} - u_n\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-n-1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

$v_{n+1} - v_n < 0$ إذن (v_n) متناقصة.

لدينا $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

36 .1 $u_0 = 1$ ؛ $u_1 = 6$ ؛ $u_2 = 13$

$u_3 = 24$ ؛ $u_4 = 41$

2 • 3 • نستعمل الإستدلال بالتراجع.

•4 $u_0 = 1$

$u_1 = u_0 + 1^2 - 1 + 5$

$u_2 = u_1 + 2^2 - 2 + 5$

$\vdots \quad \vdots$

$u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$

$$(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) + u_n = 1 + (u_0 + \ldots + u_{n-1}) + (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (1 + 2 + \ldots + n) + 5n$$

بعد التبسيط نجد :

$$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 5n$$

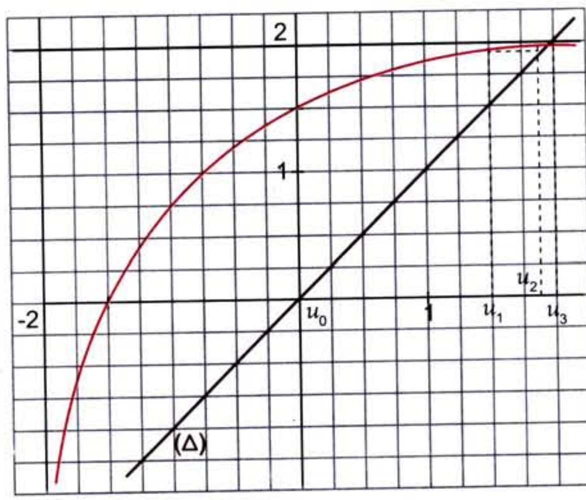
أي

$$u_n = 1 + 5n + \frac{(n-1)(n)(n+1)}{3}$$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) ليست متقاربة.

37 1. $u_0 = 0$ ؛ $u_1 = \frac{3}{2}$ ؛ $u_2 = \frac{12}{7}$ ؛ $u_3 = \frac{45}{26}$.

2. أ) - ب).



ج) المتتالية (u_n) متقاربة.

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}$

نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$3 - u_n^2 > 0$ و أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$u_n + 2 \geq 0$

4. $u_{n+1} = 1 + \frac{1 + u_n}{2 + u_n}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 2$.

5. (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن (u_n) متقاربة.

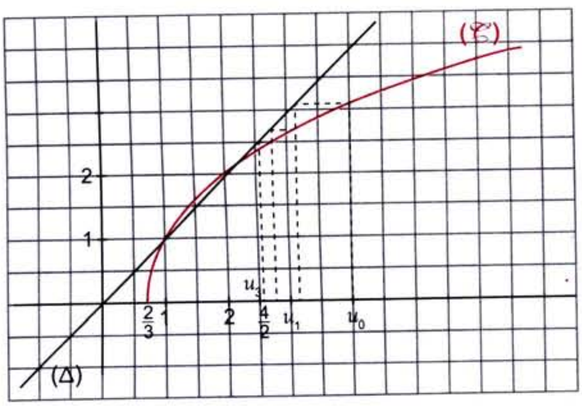
لإيجاد نهاية (u_n) عند $+\infty$، نحل المعادلة $\ell = f(\ell)$

و نجد $\ell = \sqrt{3}$.

38 1. $u_0 = 4$ ؛ $u_1 = \sqrt{10}$ ؛ $u_2 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2}$

$u_3 = \sqrt{\sqrt{3\sqrt{10} - 2} - 2}$.

2. أ) - ب).



ج) المتتالية (u_n) متقاربة.

3. نثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$u_n \geq 2$. لدينا $u_0 \geq 2$.

بفرض $u_n \geq 2$ ينتج أن $3u_n - 2 \geq 4$ أي $\sqrt{3u_n - 2} \geq 2$

4. من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n} \leq 0$$

و بالتالي $u_{n+1} - u_n \leq 0$. إذن (u_n) متناقصة.

5. (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل

إذن (u_n) متقاربة.

6. $\ell = 2$.

07 الحساب التكاملي

1 $\int_{-1}^{2}(x^2+x)\,dx=\frac{9}{2}$ ؛ $\int_{2}^{4}\frac{1}{x}\,dx=\ln 2$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\int_{-3}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{2}{3}$

$\int_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2$ ؛ $\int_{-3}^{-1}(t+3)^3\,dt=4$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{1}{8}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,e^{\cos x}\,dx=-1+e$$

$\int_{0}^{1}\frac{2x}{4-x^2}\,dx=\ln\frac{4}{3}$ ؛ $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\ln 2$

$\int_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{3}{2}$ ؛ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}$$

2 1. $\alpha=\frac{1}{2}$ ؛ $\beta=-\frac{1}{2}$

2. $\int_{e}^{1}f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_{0}^{1}$

$$=-\frac{1}{2}\ln 3$$

3 1. وحدة المقامات و بسط العبارة.

2. $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2-2x-3}\,dx=\left[\frac{1}{4}\left(\ln|x-3|-\ln|x+1|\right)\right]_{0}^{2}$

$$=-\frac{1}{2}\ln 3$$

4 1. $a=1$ ؛ $b=-1$

2. $\int_{1}^{2}\frac{1}{x(x+1)}\,dx=\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_{1}^{2}$

$$=\ln\frac{4}{3}$$

5 $\alpha=1$ ؛ $\beta=-1$ ؛ $\gamma=1$

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2(x+1)}\,dx=\left[-\frac{1}{x^2}-\ln|x|-\ln|x+1|\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}$$

6 1. $I_1+I_2=x$ ؛ $I_1-I_2=\frac{1}{2}\sin 2x$

2. $I_2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$ ؛ $I_1=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$

3. $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$ ؛ $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$

(استعمل العلاقتين السابقتين).

7 $\int_{-1}^{3}|x-2|\,dx=5$ ؛ $\int_{-2}^{4}|x^2-4|\,dx=\frac{64}{3}$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=2$ ؛ $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|2-\frac{2}{x}\right|dx=1$

8 1. $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2t-1)\,dt=\frac{1}{4}$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2t+1)\,dt=\frac{25}{4}$$

2. $\int_{-1}^{2}|2t+1|\,dt=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2t-1)\,dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2t+1)\,dt$

$$=\frac{13}{2}$$

9 1. $0\leq x\leq 1$ ؛ $\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt\leq 0$

$x\geq 1$ ؛ $\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt\geq 0$

2. من أجل كل عدد حقيقي t موجب تماما ؛

$$\left(\frac{1}{2}t^2-t\ln t\right)'=t-1-\ln t$$

$$\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2-t\ln t\right]_{1}^{x}$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-x\ln x$$

10

1. $\mathcal{U} = 3 - 2e$ ؛ 2. $\mathcal{U} = -1$

3. $\mathcal{U} = \frac{1}{8}\left(\frac{e^2 - 7}{e - 1}\right)$ ؛ 4. $\mathcal{U} = 0$

5. $\mathcal{U} = \frac{14}{5}$ ؛ 6. $\mathcal{U} = -6$

7. $\mathcal{U} = \frac{1}{2}$ ؛ 8. $\mathcal{U} = \frac{1}{2}$

11

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$ ؛ $\int_0^1 (3-t)e^t dt = 3e - 4$

$$\int_0^{\pi} (3x+2)\sin x\,dx = 3\pi + 4$$

$$\int_0^{\pi} (-x+3)\cos x\,dx = 2$$

$$\int_1^x t\ln t\,dt = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^x \ln t\,dt = x\ln x - x + 1$$

$\int_0^2 xe^x dx = e^2 + 1$ ؛ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}dt = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(2x^2 - x)dx = -\cos\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

12

$$\int_0^1 t^2e^t dt = e - 2$$

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1)\,e^t\,dt = 4e - 8$$

$$\int_0^1 t^2e^{3t}dt = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

$\int_0^{\pi} e^t\cos t\,dt = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$ ؛ $\int_0^{\pi} e^t\sin t\,dt = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,e^{2x}\,dx = \frac{3}{13}(e^{-\pi} - e^{\pi})$$

$$\int_0^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{8}{9}e^3 + \frac{4}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin 2t\,dt = \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}$$

13

2. $A = \frac{25}{4}\,cm^2$

14

2. $A = \int_1^e \left[g(x) - f(x)\right]dx$

$= e^{e-1} - 2$

15

2. $\mathcal{A}(a) = -(a+1)\,e^{-a} + 1$

3. $\lim_{x \to +\infty}\left[-(a+1)e^{-a} + 1\right] = 1$

16

$r = MH = \frac{R(h - z)}{h}$ إذن

$$v = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}(h - z)^2 dz = \frac{\pi h R^2}{3}$$

17

2. $\int_2^3 \ln(x - 1)\,dx = 2\ln 2 - 1$

3. $\int_2^3 \ln(x + 1)\,dx = 8\ln 2 - 3\ln 3 - 1$

4. $\mathcal{A} = \left(\ln\frac{64}{27}\right)cm^2$

18

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2}(2 - \ln x)$$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

2. $A = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 4$

19

1. على المجال $[1 ; m]$: $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

$$\mathcal{A}(m) = \int_1^m \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m}\ln m$$

2. $\lim_{x \to +\infty}\mathcal{A}(m) = 1$

20 1. $f'(x) = 4(1-x)\,e^{-2x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e^{-2}	↘	0

3. $$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2e} - \lambda e^{-2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2e}$$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $H'(x) = h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على $\mathbb{R}$.

5. $$v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|f(x)\right|^2 dx = \frac{\pi}{8}\left(5e^2 - e^{-2}\right)$$

إذن $v = \frac{\pi}{8}\left(5e^2 - e^{-2}\right) \approx 18{,}4\ \text{cm}^3$

21 1. f معرفة عند 0

و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$.

إذن f مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

إذن f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2. $f'(x) = 1 + \ln x$ على $]0\,;+\infty[$.

$f'(x) = 1 + \ln(-x)$ على $]-\infty\,;0[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

3. على المجال $\left[\frac{1}{e}\,;1\right]$ ، $f(x) \leq 0$.

إذن $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-x \ln x)\,dx = \int_{1}^{\frac{1}{e}} x \ln x\,dx$

أي $\mathcal{A} = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}$

$\approx 0{,}148$

22 1. $f(x) = -x \ln x$ على المجال $]0\,;1[$

$f(1) = 0$

$f(x) = x \ln x$ على $]1\,;+\infty[$

$f(1) = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

إذن f مستمرة عند 0 عن اليمين و عند 1

و بالتالي f مستمرة على $[0\,;+\infty[$.

f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين.

f ليست قابلة للاشتقاق عند 1 و بالتالي f لا تقبل الإشتقاق على $[0\,;+\infty[$.

ملاحظة : f قابلة للاشتقاق على $]0\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$

2. $f'(x) = -1 - \ln x$ على المجال $]0\,;1[$

$f'(x) = 1 + \ln x$ على المجال $]1\,;+\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

3. على المجال $]0\,;1]$ ؛ $f(x) \geq 0$.

إذن $\mathcal{A}(t) = \int_{t}^{1} f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{t \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4}$