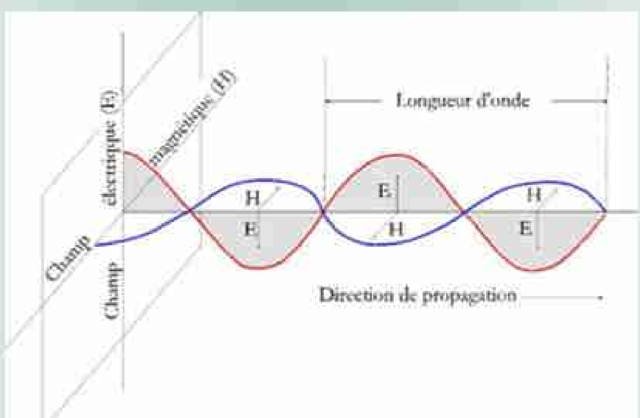
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumedienne

Vibrations et Ondes Magnétiques

Génie des Procédés
Licence 2



Serie de TD

- Oscillation libre à un degré de liberté.
- Oscillation forcée à un degré de liberté.
- Oscillation libre à deux degrés de liberté.
- Oscillation forcé à deux degrés de liberté.
- Cordes vibrantes.
- Ondes acoustiques.

Rappels mathématiques

Une fonction de période T peut être développée en une série trigonométrique partout convergente dite <u>série de FOURIER</u> et définie par :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

dont les coefficients constants a_n et b_n sont calculés par les formules :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\cos n\omega t \; dt \; ; \; b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\sin n\omega t \; dt \quad avec \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad et \quad n = 0,1,2,3, \ldots$$

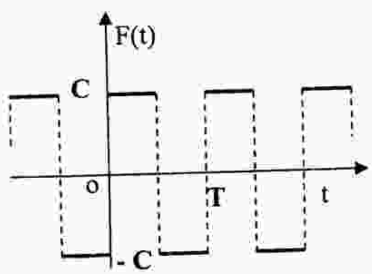
On appelle valeur moyenne d'une fonction $F(t)$ sur un intervalle T la grandeur notée $< F >$ et donnée par :

$$< F > = \frac{1}{T}\int_0^T F(t) \; dt$$

Dans le cas d'une fonction développable en série de FOURIER, la valeur moyenne sur sa période est représentée par le terme $\frac{a_0}{2}$ de sa série.

<u>EXEMPLE</u>

$$F(t) = \begin{cases} +c & \text{pour} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ -c & \text{pour} \quad -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$



la fonction est impaire :

$a_n = 0 \quad , \quad \forall n$

Calculons les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} c \; \sin\omega t \; dt = \frac{4c}{T}\left[\frac{-\cos n\omega t}{n\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{2c}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right] = \frac{2c}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} n = 2p & b_{2p} = 0 \\ n = 2p+1 & b_{2p+1} = \frac{4c}{(2p+1)\pi} \end{cases}$$

soit $$F(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4c}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\omega t$$

$$F(t) = \underbrace{\frac{4c}{\pi} \sin \omega t}_{\text{Fondamental}} + \underbrace{\frac{4c}{3\pi} \sin 3\omega t}_{3 \text{ ième harmonique}} + \underbrace{\frac{4c}{5\pi} \sin 5\omega t}_{5 \text{ ième harmonique}} + \cdots$$

EXERCICE 1

Pour chacune des fonctions périodiques suivantes :

a) $$F(t) = \begin{cases} -t & \text{pour } -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ t & \text{pour } 0 \le t \le \frac{T}{2} \end{cases}$$

b) $F(t) = t^2$ pour $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$

c) $$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ t & \text{pour } 0 \le t \le \frac{T}{2} \end{cases}$$

1) Donner son graphe.
2) Calculer les coefficients de son développement en série de FOURIER .
3) Donner sa valeur moyenne sur une période.

EXERCICE 2

Exprimer sous la forme $Z = |Z|\, e^{j\varphi}$ les nombres complexes suivants :

a) $1 - j\sqrt{3}$; b) -2 ; c) $5j$

d) $(2j)^2 + 3j + 8$; e) $\frac{3}{\sqrt{3} - j}$; f) $\frac{3}{\left[\sqrt{3} - j\right]^2}$

g) $\frac{\sqrt{3} - j}{3 - 4j}$; h) $(\sqrt{3} + j)(3 + 4j)$

EXERCICE 3

Calculer et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle homogène $\ddot{x} + 4x = 0$ pour les conditions initiales suivantes :

a) $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ ou b) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$

EXERCICE 4

Calculer la solution de l'équation différentielle homogène :

1) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$
2) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

3) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = 0$

pour les conditions initiales suivantes :

a) $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ ou b) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$

EXERCICE 5

Calculer la **solution générale** des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1) $\ddot{x} + 4\,x = 5$

2) $\ddot{x} + 5\,\dot{x} + 4\,x = 5$

3) $\ddot{x} + 4\,\dot{x} + 4\,x = 5$

4) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = 5$

5) $\ddot{x} + 4\,x = 5\cos 3t$

6) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = 5\cos 3t$

pour les conditions initiales : $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$

EXERCICE 6

Calculer la **solution particulière** des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1) $\ddot{x} + 4\,x = F(t)$

2) $\ddot{x} + 0{,}3\,\dot{x} + 4\,x = F(t)$

F(t) étant une fonction périodique définie par :

$$F(t) = \begin{cases} +a & \text{pour} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ -a & \text{pour} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

EXERCICE 7

Un mouvement harmonique est décrit par : $x(t) = 10\cos\frac{\pi}{5}t$

(x en mm , t en secondes). Déterminer :

a) la fréquence et la période du mouvement.

b) l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

c) le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants $t = 0$ s et $t = 1{,}2$ s

EXERCICE 8

Un mouvement harmonique est décrit par $x(t) = C\cos(100\,t + \psi)$

Les conditions initiales sont : $x(0) = 4$ mm ; $\dot{x}(0) = 1$ m/s

a) Calculer C et ψ

b) Exprimer x(t) sous la forme $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ et en déduire les valeurs de A et B.

EXERCICE 9

Montrer que $x(t) = 2\sin\omega t + 3\cos\omega t$ peut se mettre sous la forme : $x(t) = C\cos(\omega t + \psi)$.

Quelles sont les valeurs de C et de ψ ?

EXERCICE 10

Un accéléromètre indique que l'accélération d'un dispositif mécanique est sinusoïdale de fréquence 40 Hz .

Si l'amplitude de cette accélération est de $100\ m / s^2$, déterminer l'amplitude du déplacement et de la vitesse correspondantes.

Nombre de degrés de liberté – coordonnées généralisées

EXERCICE 11

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O contenu dans le plan XOY.

1/Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce point ?

2/Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point ?

EXERCICE 12

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

EXERCICE 13

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.

1/Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques, quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide ?

2/ Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement de ce solide ?

3/ Quel est le nombre de degrés de liberté d'un solide qui possède :

a/ un point fixe

b/deux points fixes ?

EXERCICE 14

On considère une haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a, de diamètre et de masse négligeables.

1/Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses ?

2/Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

Rappels mathématiques

Exercice 2

a/ $1 - j\sqrt{3}$ $\quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$ rd

donc $Z = 2e^{-j\frac{\pi}{6}}$

b/ -2 $\quad |Z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

$\cos\varphi = -1$ et $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\pi$ rd

donc $Z = 2e^{-j\pi}$

c/ $5j$ $\quad |Z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

$\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ rd

donc $Z = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$

d/ $(2j)^2 + 3j + 8 = 3j + 4$ $\quad |Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\cos\varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin\varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = 0{,}92$ rd

donc $Z = 5e^{j0{,}92}$

e/ $\frac{3}{\sqrt{3} - j} = \frac{3}{\sqrt{3} - j} \cdot \frac{\sqrt{3} + j}{\sqrt{3} + j} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}j$

$|Z| = \frac{3}{4}\sqrt{3 + 1} = \frac{3}{2}$ $\quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\sin\varphi = \frac{1}{2}$ donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $Z = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$

f/ $\frac{3}{(\sqrt{3} - j)^2} = \frac{3}{2(1 - \sqrt{3}j)} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}j}{1 + \sqrt{3}j} = \frac{3}{8}(1 + \sqrt{3}j)$

$|Z| = \frac{3}{8}\sqrt{1 + 3} = \frac{3}{4}$ $\quad \cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d'où $\varphi = \frac{\pi}{6}$ et $Z = \frac{3}{4}e^{j\frac{\pi}{6}}$

g/ $\frac{\sqrt{3} - j}{3 - 4j}$

Exercice 3 $\quad \ddot{x} + 4x = 0$

x déplacement $x(t)$

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$: vitesse

$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}$: accélération

$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ équation caractéristique

$k^2 + 4 = 0 \quad k_{1,2} = \pm 2j$

$\Delta = 0 - 16 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 4j$

$k_1 = 2j$; $k_2 = -2j$ racines complexes

$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

C_1, C_2 ?

$C_1 = A \sin\varphi$ et $C_2 = A\cos\varphi$

$x(t) = A\sin\varphi \cos 2t + A\cos\varphi \sin 2t$

donc $x(t) = A\sin(2t + \varphi)$

A, φ ?

$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t$

$1 = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 \Rightarrow C_1 = 1$

$0 = -2C_1 \times 0 + 2C_2 \times 1 \Rightarrow C_2 = 0$

$x(t) = \cos 2t$

$\dot{x}(t) = 2A\cos(2t + \varphi)$

$1 = A\sin(2 \times 0 + \varphi) = A\sin\varphi$

$0 = 2A\cos(2 \times 0 + \varphi) = 2A\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$x(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2})$

Exercice 4

1/ $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$

équation caractéristique :

$k^2 + 5k + 4 = 0$; $\Delta = 9$

il y a deux racines réelles

$\sqrt{\Delta} = 3$; $k_1 = -1$, $k_2 = -4$

$x(t) = A\,e^{-t} + B\,e^{-4t}$

$\begin{cases} x(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = -A e^{-t} - 4B e^{-4t} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -A - 4B = 0$

$\Rightarrow A = -4B$

donc : $B = -\frac{1}{3}$ et $A = \frac{4}{3}$

d'où $x(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$

2/ $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

équ cara : $k^2 + 4k + 4 = 0$, $\Delta = 0$

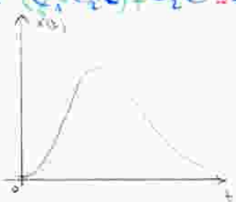
$k_{1,2} = -2$ racine double

$x(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t)$

$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \Rightarrow \dot{x}(t) = -2e^{-2t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-2t} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow C_2 = 2$

$x(t) = e^{-2t}(2t)$



3/ $\ddot{x} + 0{,}3\dot{x} + 4x = 0$

équ carac : $k^2 + 0{,}3k + 4 = 0$

$\Delta = 0{,}3^2 - 4\times 4 \approx -16$; $\sqrt{\Delta} = \pm 4j$

$k_1 = -0{,}15 + 2j$ $k_2 = -0{,}15 - 2j$

$x(t) = e^{-0{,}15t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

$= A\,e^{-0{,}15t}\sin(2t + \varphi)$

$x(0) = 1 \Rightarrow A\sin\varphi = 1$

$\dot{x}(t) = 2A\,e^{-0{,}15t}\cos(2t + \varphi) - \sin(2t+\varphi)\, 0{,}15\,A\,e^{-0{,}15t}$

$\dot{x}(0) = 2A\cos\varphi - 0{,}15\,A\sin\varphi = 0$

$2\cos\varphi = 0{,}15\sin\varphi$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{0{,}3}$

$\varphi = 85{,}7°$

$A \simeq 1$

Exercice 5

1/ $\ddot{x} + 4x = 5$

$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ — particulière — Homogène — solution générale.

$x_H(t) = A\sin(2t + \varphi)$

$x_p(t) = \text{constante} = C$

$\dot{x}_p = 0$ $0 + 4\times C = 5$

$\ddot{x}_p = 0$ $\boxed{C = 5/4}$

donc $x_p(t) = A\sin(2t + \varphi) + 5/4$

4/ $\ddot{x} + 4x = 5\cos 3t$

$x_H(t) = A\sin(2t + \varphi)$

$x_p(t) = M\cos 3t + N\sin 3t$

— Méthode [illegible]

$\dot{x}_p(t) = \frac{dx_p}{dt} = -3M\sin 3t - 3N\cos 3t$

$\ddot{x}_p(t) = -9M\cos 3t - 9N\sin 3t$

$= -9x_p$

$\ddot{x}_p + 4x_p = 5\cos 3t$

$-5x_p = 5\cos 3t$

$x_p = -\cos 3t$

$x(t) = A\sin(2t + \varphi) - \cos 3t$

Exercice 7

$x(t) = 10 \cos \frac{\pi}{5} t$

$x(t) = x_0 \cos \omega t$

$= x_0 \cos 2\pi f t$

$= x_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$

$x(t)$ [mm] et t [s]

a/ $\frac{\pi}{5} = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{1}{10}$

$f = 0{,}1\ Hz$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}1} \Rightarrow T = 10\ s$

b/ $x_0 = 10\ mm$ $\quad \dot{x}(t) = -2\pi \sin \frac{\pi}{5} t$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x\,\omega \sin \omega t$

$= \dot{x}_0 \sin \omega t$

$\Rightarrow \dot{x}_0 = -x_0 \omega = -10 \frac{\pi}{5} = -2\pi$

$\dot{x}_0 = 2\pi\ mm/s$

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}$

$= -x_0 \omega^2 \cos \omega t$

$= -\ddot{x}_0 \cos \omega t$

donc $\ddot{x}_0 = -x_0 \omega^2 = -10 \frac{\pi^2}{25}$

$\ddot{x}_0 = -4\ mm/s^2$

$\ddot{x}(t) = -4 \cos \frac{\pi}{2} t$

c/ à $t = 0s$

$x(0) = 10\ mm$

$\dot{x}(0) = 0\ mm/s$ $\quad \Rightarrow$ sens physique

$\ddot{x}(0) = -4\ mm/s^2$

à $t = 1{,}2s$

$x(1{,}2) = 7{,}29\ mm$.

$\dot{x}(1{,}2) = -4{,}3\ mm/s$

$\ddot{x}(1{,}2) = 1{,}23\ mm/s^2$

Exercice 8

$x(t) = C \cos(100t + \psi)$

$x(0) = 4\ mm$, $\dot{x}(0) = 1\ m/s$

a/ C, ψ ?

$\dot{x}(t) = -C\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -100\, C \sin(100t + \varphi)$

$x(0) = 4\ mm = 4 \cdot 10^{-3}\ m = C \cos\varphi \quad \ldots (1)$

$\dot{x}(0) = 1\ m/s = -100\, C \sin\varphi \quad \ldots (2)$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{-100\, C \sin\varphi}{C \cos\varphi} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}}$

$\Rightarrow -100\, tg\,\varphi = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}}$

$\Rightarrow tg\,\varphi = -\frac{1}{0{,}4}$

$\Rightarrow \varphi = Arctg\left(-\frac{1}{0{,}4}\right) = Arctg(-2{,}5)$

$\Rightarrow \psi = -68{,}19 \simeq -70°$

(1) $C \cos(-70) = 4 \Rightarrow C = \frac{4}{\cos 70}$

$\Rightarrow C = 11{,}7\ mm \simeq 12\ mm$

b/ $x(t) = C \cos(100t + \varphi) = C \cos(\omega t + \varphi)$

$= A \cos \omega t + B \sin \omega t$

A, B ? $\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\begin{cases} a = \omega t \\ b = \psi \end{cases}$

$C \cos(\omega t + \psi) = C[\cos \omega t \cos \psi - \sin \omega t \sin \psi]$

$\Rightarrow A = C \cos \psi$

$B = -C \sin \psi \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2}$

Exercice 9

$x(t) = 3 \cos \omega t + 2 \sin \omega t$

$A = 3$; $B = 2$

$C = \sqrt{A^2 + B^2} = 3{,}6$

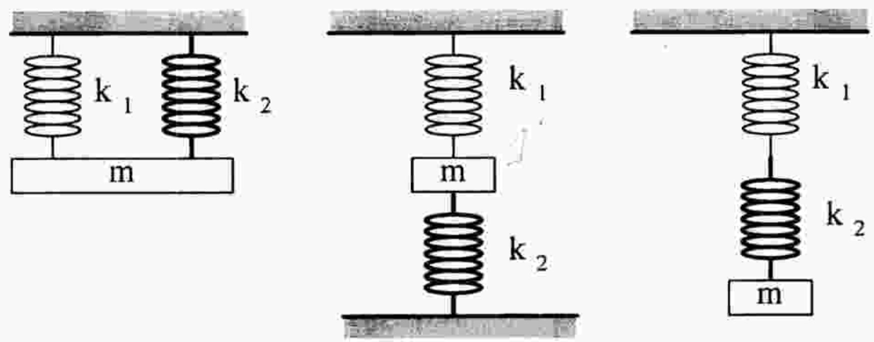
$3 = 3{,}6 \cos \psi \Rightarrow \cos \psi = \frac{3}{3{,}6} = 0{,}83$

$\psi = 36°$

OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

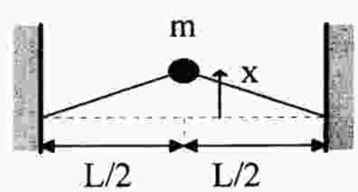
Exercice 1: Association de ressorts

Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes suivants:



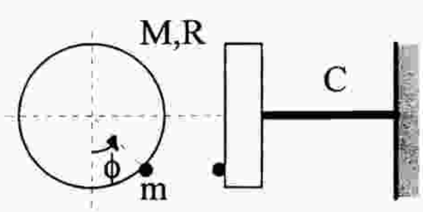
Exercice 2: Corde plombée

Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une table horizontale. Elle est fixée à deux bâtis fixes par deux cordes de masse négligeable tendues horizontalement. En supposant que la tension T des cordes reste constante lors du mouvement, calculer la période des oscillations pour de faibles amplitudes du mouvement dans la direction x.

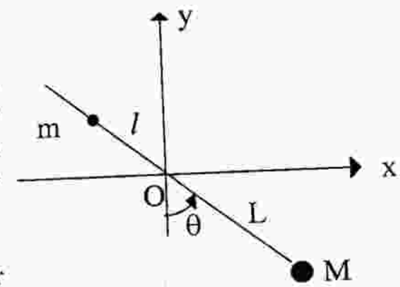


Exercice 3 : Pendule de torsion

Une tige d'acier de constante de torsion C est soudée par son extrémité au centre d'un disque homogène de masse M et de rayon R. L'autre extrémité est encastrée dans un bâti fixe. Une masse m est soudée au point le plus bas du disque. On tourne le disque d'un angle ϕ_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'expression en fonction du temps de l'angle $\phi(t)$ d'écart du système par rapport à sa position d'équilibre. On néglige la flexion de la tige d'acier.



Exercice 4 : Métronome

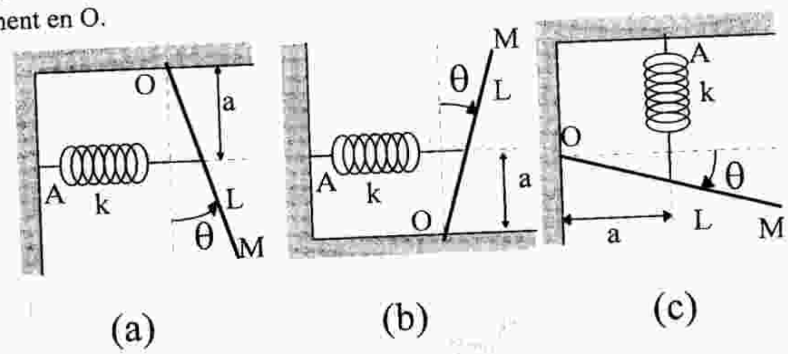


Un métronome est schématisé sur la figure ci-contre. La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable; elle est mobile sans frottements autour de O. La masse M étant en bas, on l'écarte d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?
2) Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.
3) A.N.: Sachant que M= 80g, m = 20g et L=4cm, déterminer la distance l pour que la période du métronome soit égale à 2 s.
4) On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?

Exercice 5 :

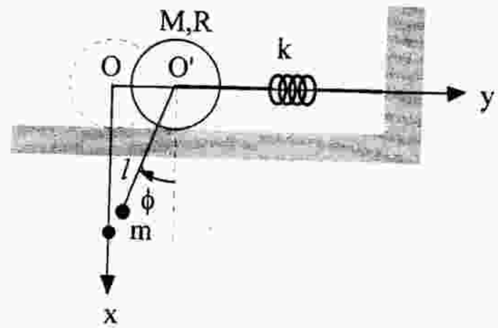
Dans les figures ci-dessous, une tige homogène de masse M et de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O.



1) Quelle est la déformation du ressort à l'équilibre, sachant qu'à cette position θ=0?
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
3) A quelle condition le système de la figure (b) peut-il osciller? Quelle est la nature du mouvement lorsque cette condition n'est pas satisfaite?
4) Expliquer pourquoi la période des oscillations est indépendante de g dans le cas de la figure (c).
5) Calculer l'effort appliqué sur le mur au point A.

Exercice 6 :

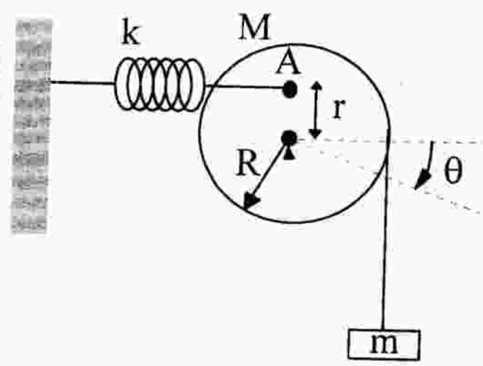
On considère le dispositif schématisé sur la figure ci-contre. Un disque homogène de masse M et de rayon R est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort de raideur k. Une tige rigide, de longueur l, de masse négligeable, est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.



Déterminer la pulsation propre du système. Sachant qu'à t=0, la tige est écartée d'un angle petit ϕ_0 par rapport à la verticale et lâchée sans vitesse initiale, déterminer l'expression de $\phi(t)$. Donner l'expression de la vitesse de la masse m quand la tige passe par la verticale.

Exercice 7:

Dans le système ci-contre, la corde roule sans glisser autour du cylindre de masse M=5kg et de rayon R=40cm, qui tourne autour de son axe fixe. Elle porte à son extrémité une masse m=1kg. Un ressort de raideur k = 600 N/m, fixé à un bâti fixe, est accroché au point A distant de r=20cm de l'axe du cylindre.



1) Sachant qu'à l'équilibre $\theta = 0$ et dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude, établir l'équation différentielle du mouvement. Donner l'expression de θ en fonction du temps pour les conditions initiales suivantes :

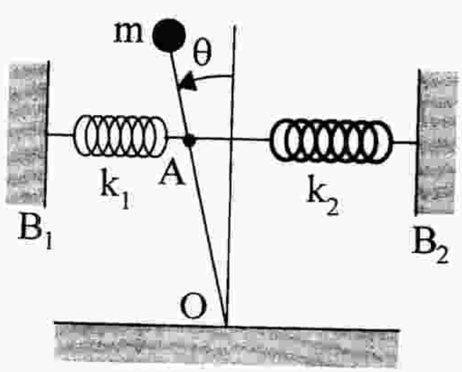
$\theta(t=0) = 5°$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

2) Au bout de cinq périodes d'oscillation, la masse m se décroche; quelle est la nature du mouvement à partir de cet instant? Autour de quelle position se font les oscillations? Calculer la nouvelle période du mouvement et l'amplitude des oscillations.

3) Tracer le graphe représentant les variations de θ en fonction du temps pour $0<t<10$s.

Exercice 8 :

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur l. La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan du mouvement. Le point A de la tige, tel que OA=a, est relié à deux bâtis fixes B_1 et B_2 respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. A l'équilibre, la tige est verticale.



a) Sachant qu'à l'équilibre, les ressorts ne sont pas déformés, établir l'équation différentielle du mouvement du système.

b) Si m, k_1, k_2 et l sont donnés, quelle condition doit satisfaire la longueur a pour que le système puisse osciller?

c) Cette condition étant satisfaite, déterminer l'expression de la pulsation propre du système.

Oscillations libres des Systèmes à un degré de Liberté

Exercice 1

On calcule la fréquence

a-

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = U_K = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 x^2$

$U_m - mgx = 0$ à l'équi...

L'équation de Lagrange

$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}(K_1 + K_2) x^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -(K_1 + K_2) x$

$m\ddot{x} + (K_1 + K_2) x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{(K_1 + K_2)}{m} x = 0$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}} = 2\pi f$

$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$

b- On applique la loi de Newton.

On écarte m de $x > 0$ et on lache.

à l'équilibre :

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$ donc

$K_1(l_1 - l_{01}) - K_2(l_2 - l_{02}) = mg$

m est en mouvement. $\sum \vec{F} = m\ddot{x}$

$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\ddot{x}$ on projecte

$-mg + K_1(l_1 - l_{01} - x) - K_2(l_2 - l_{02} + x) = m\ddot{x}$

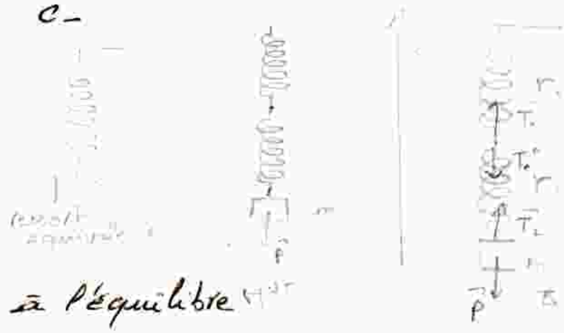
$\Rightarrow -K_1 x - K_2 x = m\ddot{x}$

$-x(K_1 + K_2) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{(K_1 + K_2)}{m} x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$

c-



à l'équilibre

$\begin{cases} mg = k_1 x_{01} \\ k_1 x_{01} = k_2 x_{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = \frac{mg}{k_1} \\ x_{02} = \frac{mg}{k_2} \end{cases}$

déplacement de m est $x_0 = x_{01} + x_{02}$

donc : $x_0 = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$

On écarte m de $x > 0$ vers le haut

$-mg + k'(x + x_0) = m\ddot{x}$

$-k'x = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k'}{m} x = 0$

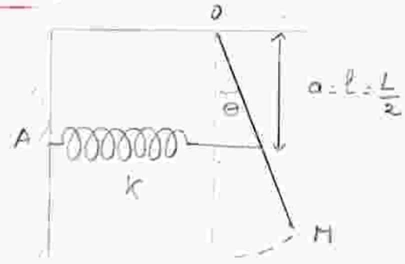
avec : $k' = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$

d'où : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m k_1 k_2}}$

donc $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m k_1 k_2}}$

Exercice 5 :

1er Cas



$J_0/a = \frac{ML^2}{12}$; $J = J_0 + Ma^2 \Rightarrow J = \frac{ML^2}{3}$

a : distance entre G et (Δ)

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot{\theta}^2$

Une déformation θ_0 à l'équilibre

$U = U_K + U_m$

$U_K = \frac{1}{2} K [a(\theta+\theta_0)]^2 \Rightarrow U_K = \frac{1}{2} K a^2 (\theta+\theta_0)^2$

$\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Leftrightarrow mg = -\frac{dU}{dy}$

$U_m = -mg \int_{\ell}^{\ell\cos(\theta+\theta_0)} dy$

Pour les petites oscillations

$\cos(\theta+\theta_0) = 1 - \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U_m = -mg\ell\left[1 - \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}\right] + mg\ell$

$U_m = mg\ell \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U = U_K + U_m \Rightarrow U = \left[\frac{1}{2}(Ka^2 + mg\ell)\right](\theta+\theta_0)^2$

à l'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (Ka^2 + mg\ell)(\theta+\theta_0)$

$(Ka^2 + mg\ell)\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$

donc : $\boxed{U = \frac{1}{2}(Ka^2 + mg\ell)\theta^2}$

$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(Ka^2 + mg\ell)\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(Ka^2 + mg\ell)\theta$

donc $\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + (Ka^2 + mg\ell)\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \left[\frac{3(Ka^2 + mg\ell)}{ML^2}\right]\theta = 0$; $\omega_0^2 = \frac{3(Ka^2 + mg\ell)}{ML^2}$

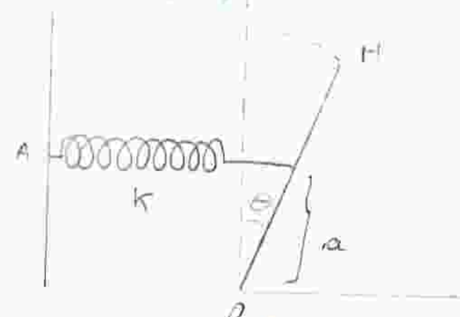
$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A et φ des constantes

On doit les trouver à partir des conditions initiales $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$

$F_K = Kx = K a \theta(t)$

2e Cas



$J = \frac{ML^2}{3}$; $T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

$U = U_K + U_m$ et $U_K = \frac{1}{2} K a^2 (\theta+\theta_0)^2$

$-\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Leftrightarrow mg = \frac{dU}{dy}$

$U_m = mg \int_{\ell}^{\ell\cos(\theta+\theta_0)} dy$

$U_m = -mg\ell \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U = \left[\frac{1}{2}(Ka^2 - mg\ell)\right](\theta+\theta_0)^2$

à l'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (Ka^2 - mg\ell)(\theta+\theta_0) \Rightarrow \theta_0 = 0$

$\boxed{U = \frac{1}{2}(Ka^2 - mg\ell)\theta^2}$

$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(Ka^2 - mg\ell)\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(Ka^2 - mgl)\theta$$

donc : $\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + (Ka^2 - mgl)\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left[\frac{3(Ka^2 - mgl)}{ML^2}\right]}_{=\omega_0^2}\theta = 0$$

Condition de stabilité

$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0 \Rightarrow Ka^2 - mgl > 0$

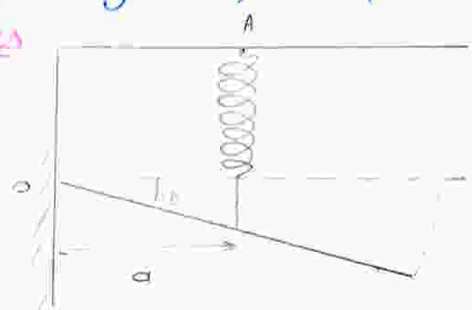
Condition d'oscillation : $\omega_0^2 > 0$

$Ka^2 > mgl$: régime oscillatoire $\omega_0^2 > 0$

$Ka^2 = mgl$: régime critique

$Ka^2 < mgl$: régime apériodique

3^e Cas



$J = \frac{ML^2}{3}$; $T = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\dot{\theta}^2$

$U_K = \frac{1}{2}Ka^2(\theta + \theta_0)^2$

$U_m = -mg\int_0^{l\sin(\theta+\theta_0)} dy$

pour θ petit $\sin(\theta + \theta_0) \simeq \theta + \theta_0$

$U_m = -mg\frac{L}{2}(\theta + \theta_0)$

$U_T = \frac{1}{2}\left[Ka^2(\theta + \theta_0)^2 - mgL(\theta + \theta_0)\right]$

$= \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + Ka^2\theta\theta_0 + \frac{1}{2}Ka^2\theta_0^2$ c^{te}

$- mgL\theta - mgL\theta_0$

$$\boxed{U_T = \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + (Ka^2\theta_0 - mgL)\theta + c^{te}}$$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = Ka^2\theta + (Ka^2\theta_0 - mgL)$

$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow Ka^2\theta_0 - mgL = 0$

condition d'équilibre

$U_T = \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + c^{te}$

avec $\theta_0 = \frac{mgL}{Ka^2}$

$L = T - U = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Ka^2\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = Ka^2\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}$

donc :

$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Ka^2\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{3Ka^2}{ML^2}\right)}_{\omega_0^2 =}\theta = 0$$

condition de stabilité

$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ $\quad Ka^2 - mgl > 0$

Exercice 6 :

$T = T_{disque\,M} + T_m$

$T_M = T_R + T_t$ / $T_R = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$

$T_t = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$ avec $\dot{y} = R\dot{\varphi}$, $J = \frac{1}{2} MR^2$

donc $T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} MR^2\right)\dot{\varphi}^2$

$T_m = ?$ $\vec{Om}_{(e)} \begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = -l\sin\varphi \end{cases}$

$\vec{om} = \vec{oO} + \vec{Om}$

$\vec{oO} \begin{cases} x = 0 \\ y = R\varphi \end{cases}$; $\vec{om} \begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = R\varphi - l\sin\varphi \end{cases}$

$T_m = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$\dot{x} = -l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$\dot{y} = -l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + R\dot{\varphi}$

$f'(\varphi) = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$\dot{x}^2 = l^2 \sin^2\varphi\, \dot{\varphi}^2$

$\dot{y}^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2$

$= l^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\dot{\varphi}^2 + Rl\varphi^2\dot{\varphi}^2$

$\sin\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3}$, $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\dot{\varphi}^2$

$= (l^2 + R^2 - 2Rl)\dot{\varphi}^2$

$= (l - R)^2\dot{\varphi}^2$

$\dot{x} = l\varphi\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{x}^2 = l^2\varphi^2\dot{\varphi}^2$

$\dot{y} = R\dot{\varphi} - l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\dot{\varphi} = R\dot{\varphi} - l\dot{\varphi} - l\frac{\varphi^2}{2}\dot{\varphi}$

$= (R - l)\dot{\varphi}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (R-l)^2\dot{\varphi}^2$ donc $T_m = \frac{1}{2} m (R-l)^2 \dot{\varphi}^2$

$T = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R-l)^2\right]\dot{\varphi}^2$

$U = U_K + U_m + U_M$

$U_K = \frac{1}{2} K (R\varphi)^2 = \frac{1}{2} K R^2 \varphi^2$

Si on a un [illegible]

$U_{K'} = \frac{1}{2} K' (2R\varphi)^2$

$= 2K'R^2\varphi^2$

K'

Rotation + translat°

$U_M = 0$ et $U_m = ?$

$\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Rightarrow mg = -\frac{dU}{dx}$

donc $U_m = -mg\int_{l}^{l\cos\varphi} dx$

$= -mgl\cos\varphi + mgl$

$= -mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + mgl$

$\frac{1}{2} mgl\varphi^2$

$U = \frac{1}{2}(KR^2 + mgl)\varphi^2$

$L = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R-l)^2\right]\dot{\varphi}^2$
$- \frac{1}{2}\left[(KR^2 + mgl)\right]\varphi^2$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi} + \left[\frac{KR^2 + mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-l)^2}\right]\varphi = 0$

$\omega_0^2 = \frac{KR^2 + mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-l)^2}$

$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$

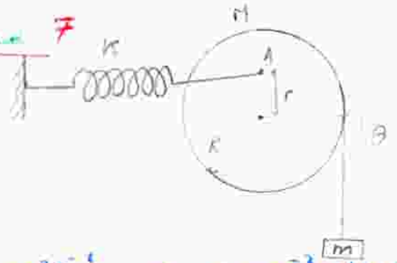
$\varphi = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

à $t = 0$: $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\varphi} = 0$ ... $A = \varphi_0$

$B = 0$ donc $\varphi = \varphi_0 \cos\omega_0 t$

$\dot{\varphi} = -\varphi_0\,\omega_0 \sin\omega_0 t$

Exercice 7



1) $\theta(t)$?

$T_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$; $T_M = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$

$U_K = \frac{1}{2} K r^2 \theta^2$, $U_M = 0$

$U_m = mg \int dy = \ldots$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{1}{2}(m + M) R^2 \ddot{\theta} + K r^2 \theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \boxed{\frac{2(K r^2 + mgR)}{(m+M) R^2}} \theta = 0$$

$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

avec $\omega = \sqrt{\frac{K r^2 + mgR)2}{(m+M) R^2}} = \sqrt{\frac{600 \cdot 20^2 + \ldots)2}{(1+5)40^2}} = 5$

$\theta(0) = A \cos\varphi \quad 5°$

$\dot{\theta}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta}(0) = -A\omega \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi = 0$ d'où $A = 5°$

donc $\theta(t) = 5 \cos(5t + \varphi)$

Exercice 8

a) Equation différentielle du M^{vt}

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$

compression de k_1 : $-a\theta$

allongement de k_2 : $a\theta$

$-\vec{P} = -\overrightarrow{grad} U \Rightarrow mg = \frac{dU}{dy}$

$U_m = mg \int_{\ell}^{\ell\cos\theta} dy$ avec $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

pour θ petit

donc : $U_m = -mg\ell \frac{\theta^2}{2}$

d'où $U = \frac{1}{2} K_1 (-a\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (a\theta)^2 - mg\ell \frac{\theta^2}{2}$

$L = T - U = -\frac{1}{2}(K_1 a^2 + K_2 a^2 - mg\ell)\theta^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\Rightarrow m\ell^2 \ddot{\theta} + (K_1 a^2 + K_2 a^2 - mg\ell)\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{K_1 a^2 + k_2 a^2 - mg\ell}{m\ell^2}\right)\theta = 0$$

b) Condition d'oscillation

pour le système soit osciller

$$\frac{(K_1 + K_2) a^2 - mg\ell}{m\ell^2} > 0$$

c) L'expression de la pulsation ω_0

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

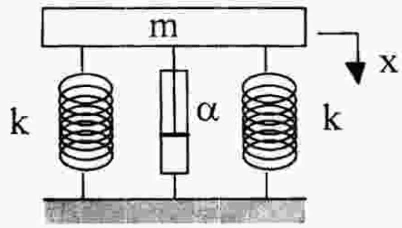
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(K_1 + K_2) a^2 - mg\ell}{m\ell^2}}$$

OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

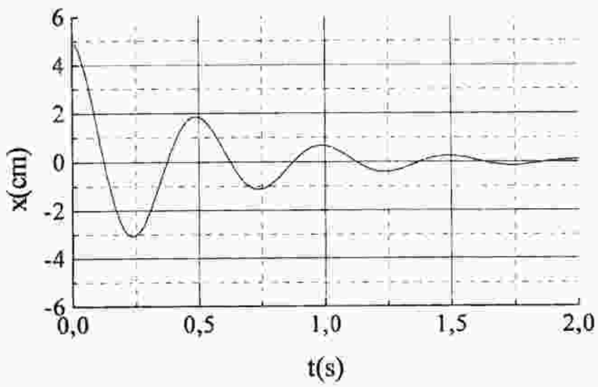
Exercice 1 : Une masse m = 20 kg est montée sur deux ressorts de raideur k=4 kN/m et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α=130 kg/s. A l'instant initial, la masse est écartée de 5 cm de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

a) Calculer le déplacement et la vitesse de la masse m en fonction du temps.

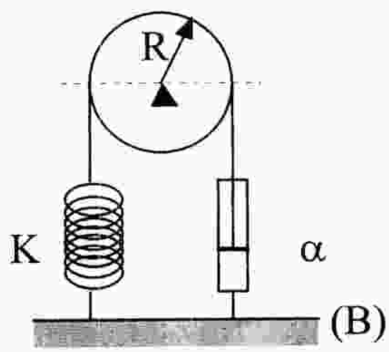
b) Quels sont le déplacement et la vitesse à l'instant t=1 s?



Exercice 2 : Un bloc de masse 25 kg est monté sur un support en caoutchouc, de masse négligeable, qui se comprime de 6.1cm sous ce poids. Quand le bloc vibre librement, on enregistre les positions de la masse après l'avoir déplacé de 5cm à partir de sa position d'équilibre (voir figure ci-contre). Sachant que le tapis de caoutchouc peut être symbolisé par un ressort de raideur K associé à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , calculer ces coefficients K et α .

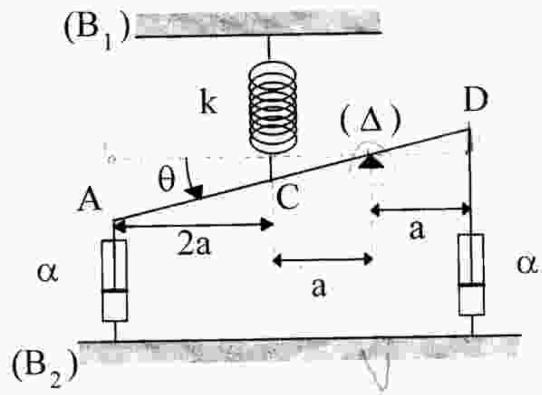


Exercice 3 : Le système de la figure ci-contre est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R en rotation autour de son axe de révolution fixe. Un fil inextensible, de masse négligeable, entraîne le cylindre sans glissement sur sa périphérie ; ses deux extrémités sont reliées à un bâti fixe (B) par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Quelle la valeur critique du coefficient α ?



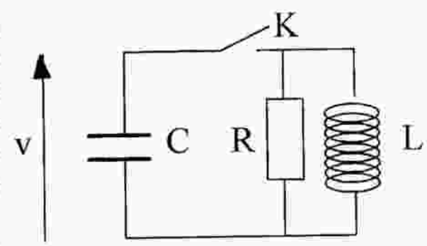
Exercice 4 :

Le système mécanique de la figure ci-contre est constitué d'une tige rectiligne AD, homogène, de masse M=3kg et de longueur L=2m. Cette tige peut tourner, dans le plan vertical, sans frottement, autour d'un axe horizontal (Δ) fixe. Les extrémités A et D de la tige sont reliées au bâti fixe B_2 par deux amortisseurs identiques de coefficient de frottement visqueux α. Le point C, milieu de la tige, est relié au bâti B_1 par un ressort de raideur k. A l'équilibre, la tige est horizontale.



Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période 1s. On constate qu'au bout de 5 pseudo-périodes, l'amplitude est égale à 20 % de l'amplitude initiale. En déduire la valeur numérique de α puis celle de k.

Exercice 5 : Le circuit ci-contre est constitué d'un condensateur de capacité C=1µF, d'une bobine d'inductance L=0.1mH et d'une résistance R pouvant prendre les valeurs 1Ω , 5Ω et 1kΩ. Le condensateur est initialement chargé sous une tension de 5V. A l'instant t=0s, on ferme brusquement l'interrupteur K.



1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension v(t) aux bornes du condensateur.

2) Pour les trois valeurs de la résistance:

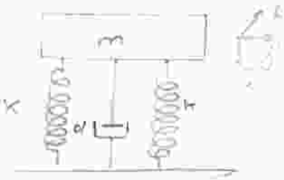
a) Quelles sont les valeurs de δ et ω_0 ?

b) En déduire les variations de v(t) au cours du temps.

c) Tracer le graphe de v(t) en fonction du temps.

Oscillations libres de systèmes amortis à un degré de liberté

Exercice 1 :



$\vec f = -\alpha \vec v$ (force de frottement visqueuse)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (Toutes les forces dérivent d'un potentiel)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \phi$ (force généralisée associée à la force qui ne dérive pas d'un potentiel)

$\phi = \vec f \frac{\partial \vec r}{\partial q}$ $\quad \vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$

$\vec r = x\vec i$ et $q = x$

$\vec f = -\alpha \dot x \vec i$

$\phi = -\alpha \dot x \vec i \frac{\partial x \vec i}{\partial x} = -\alpha \dot x\, \vec i \vec i \frac{\partial x}{\partial x}$

$\phi = -\alpha \dot x$

$L = T - U \quad L = \frac{1}{2} m \dot x^2 - k x^2 + c^{te}$

$D = \frac{1}{2}\alpha \dot x^2$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot x} = \phi$

$\ddot x + \frac{\alpha}{m}\dot x + \frac{2k}{m} x = 0$

Equation caractéristique :

$r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{2k}{m} = 0$ on pose :

$\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$

donc : $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$

$\delta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{130}{2\times 20} = \frac{13}{4} \Rightarrow \delta = 3,25\ s^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 10^3 \times 4}{20}} \quad \omega_0 = 20\ s^{-1}$

$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 = 3,25^2 - 20^2 < 0$

on a $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$

$r_1 = -\delta + \sqrt{\Delta'} = -\delta + i\omega_a$

$r_2 = -\delta - \sqrt{\Delta'} = -\delta - i\omega_a$

$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = D e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

$x(t) = E e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \theta)$

$x(0) = 5\,cm$ et $\dot x(0) = 0$

$\dot x(t) = -\delta E e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \theta) + \omega_a E e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \theta)$

$$\begin{cases} x(0) = E\sin\theta \\ \dot x(0) = -\delta E\sin\theta + \omega_a E\cos\theta \end{cases}$$

d'où $E = \frac{x(0)}{\sin\theta}$

$-\delta \frac{x(0)}{\sin\theta}\sin\theta + \omega_a \frac{x(0)}{\sin\theta}\cos\theta = 0$

$\Rightarrow -\delta + \omega_a \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$ car $x(0) \neq 0$

$tg\,\theta = \frac{\omega_a}{\delta}$

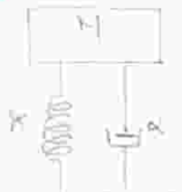
$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{tg^2\theta} = 1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}$

donc $\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}}$

$$\boxed{x(t) = x(0)\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}}\; e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \theta) \qquad tg\,\theta = \frac{\omega_a}{\delta}}$$

Exercice 2

$F_\alpha = -\alpha v = -\alpha \dot y$



$T = \frac{1}{2} m \dot y^2$ $\quad U = U_K + U_m$

$\sum \vec F = \vec 0$ à l'équilibre $Ky_0 - mg = 0$

$U_K = \frac{1}{2} K (y + y_0)^2$; $U_m = -mg(y + y_0)$

$U = \frac{1}{2} K y^2 + K y y_0 + \frac{1}{2} K y_0^2 - mgy - mgy_0$

$U = \frac{1}{2} K y^2 + (Ky_0 - mg)\, y + c^{te}$

condition d'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

$Ky_0 - mg = 0$ donc $U = \frac{1}{2} K y^2 + c^{te}$

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot y^2$ et $L = T - U$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot y}$

donc $m \ddot y + K y = -\alpha \dot y$

$\Rightarrow m \ddot y + \alpha \dot y + K y = 0$

$\ddot y + \frac{\alpha}{m} \dot y + \frac{K}{m} y = 0 \Rightarrow \ddot y + 2\delta \dot y + \omega_0^2 y = 0$

$y(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ / $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

$D = \frac{1}{n} \log \frac{y(t)}{y(t + nT_a)} = \delta T_a \Rightarrow \delta = \frac{D}{T_a}$

$= \frac{1}{2} \log \frac{5}{0,8} \Rightarrow D = 0,91$ et $\delta = 1,83\, s^{-1}$

on a $\delta = \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \alpha = 2\delta m$

$\alpha = 91,63\ Kg\, s^{-1}$

$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \Rightarrow \omega_a^2 = \frac{4\pi^2}{T_a^2} = \frac{40}{T_a^2}$

$\omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2 = \frac{40 + D^2}{T_a^2}$

donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{40 + D^2}{T_a^2}}$

$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = m \omega_0^2 = m \left(\frac{40 + D^2}{T_a^2}\right)$

$= 25 \left(\frac{40 + 0,91^2}{0,5^2}\right)$

$K = 4[illegible]4\ Kg/s^2$

Exercice 3

α ?

$T = \frac{1}{2} J \dot\theta^2 = \frac{1}{2} (MR^2) \dot\theta^2$

$U_K = \frac{1}{2} K x^2$ / $x = R \sin\theta = R\theta$

donc $U_K = \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$; $U_M = 0$

$L = T - U = \frac{1}{2} M R^2 \dot\theta^2 - \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta}$ / $D = \frac{1}{2} \alpha \dot x^2 = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot\theta^2$

$M R^2 \ddot\theta + K R^2 \theta = -\alpha R^2 \dot\theta$

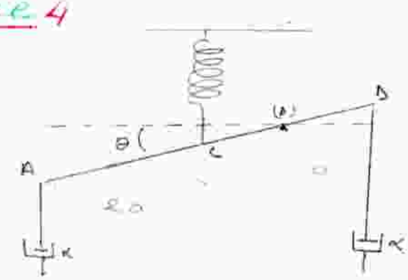
$\ddot\theta + \frac{\alpha}{M} \dot\theta + \frac{K}{M} \theta = 0$

$\Rightarrow \ddot\theta + 2\delta \dot\theta + \omega_0^2 \theta = 0$

$\delta = \frac{\alpha}{2M}$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

critique $\frac{\alpha^2}{4M^2} = \frac{K}{M}$

Exercice 4



$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ / $J = \frac{M L^2}{12} + M a^2 = \frac{7 M a^2}{3}$

donc : $T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} M a^2\right)\dot{\theta}^2$

$U = U_K + U_m$

$U_K = \frac{1}{2} K a^2 (\theta + \theta_0)^2$

$U_m = -m g a (\theta + \theta_0)$

donc : $U = \frac{1}{2} K a^2 \theta^2 + K a^2 \theta \theta_0 - m g a \theta + c^{te}$

$U = \frac{1}{2} K a^2 \theta^2 + \theta (K \theta_0 - m g) a + c^{te}$

condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$

$K a \theta_0 - m g = 0$; $U = \frac{1}{2} K a^2 \theta^2 + c^{te}$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ / $\mathcal{D}_1 = \frac{1}{2} \alpha a^2 \dot{\theta}^2$

$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{2} \alpha \, 9 a^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}(10 \alpha a^2)\dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}$ / $L = T - U$

$\frac{7}{3} M a^2 \ddot{\theta} + 10 a^2 \dot{\theta} + K a^2 \theta = 0$

$x = a\theta$, $\dot{x} = a\dot{\theta}$, $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{2(15\alpha)}{7M}\dot{\theta} + \frac{3K}{7M}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

avec : $\delta = \frac{15\alpha}{7M}$ et $\omega_0^2 = \frac{3K}{7M}$

$\frac{\theta_5}{\theta_0} = 0,2 \Rightarrow \frac{\theta_0}{\theta_5} = 5$

$\mathcal{D} = \frac{1}{n} \log\left(\frac{\theta(t_0)}{\theta(t_0 + n T_a)}\right) = \delta T_a$

$\mathcal{D} = \frac{1}{5} \log 5 = 0,32$ $\quad \delta = \frac{D}{T_a} = 0,32 \, s^{-1}$

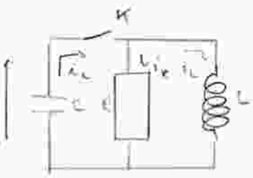
$\alpha = \frac{7M}{15}\delta = 0,448$

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{40 + \Delta^2}{T_a^2} = \frac{3K}{7M}$

$K = \frac{7M(40 + \Delta^2)}{3 T_a^2} = 842,[illegible]$

Exercice 5

$t = 0$, $V = 5$ Volt
$C = 1\mu F$, $L = 0{,}1 mH$
$R = 1\Omega$ ou 5Ω ou $1K\Omega$



1/ Equation différentielle :

Loi des noeuds en A $i_c = i_R + i_L$

Branche en parallèle sur AB

$V = V_C = V_R = V_L$

$V_R = R i_R$ et $V_L = L \frac{di_L}{dt}$

$V_c = \frac{q}{c}$ on cherche $V_c(t)$

$i_c = \frac{V_c}{R} + i_L \Rightarrow i_L = i_c - \frac{V_c}{R}$

$\Rightarrow V_c = \frac{L d}{dt}\left(i_c - \frac{V_c}{R}\right) = L\frac{di_c}{dt} - \frac{L}{R}\frac{dV_c}{dt}$

$q = CV_c$

$i_c = -\frac{dq}{dt}$ car décharge

$L\frac{d}{dt}\left(-\frac{d}{dt}CV_c\right) - \frac{L}{R}\frac{dV_c}{dt} = V_c$

$-LC\ddot{V}_c - \frac{L}{R}\dot{V}_c = V_c \Rightarrow \ddot{V}_c + \frac{1}{RC}\dot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c = 0$

$\Rightarrow \ddot{V}_c + 2\delta\dot{V}_c + W_0^2 V_c = 0$

avec : $W_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{10^{-4} \times 10^{-6}} = 10^{10}$

$W_0 = 10^5 s^{-1}$

2/ $R = 1\Omega$ $\delta = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^5 > W_0$

régime amorti

$V_c(t) =$

$R = 5\Omega$ $\delta = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{10^{-5}} = 10^5 = W_0$

régime critique.

$V_c(t) =$

$R = 1K\Omega$ $\delta = 10^2 < W_0$

régime pseudo-périodique.

$V_c(t) = 0{,}025\, e^{-500t} \sin(99998{,}71t + \ldots)$

conditions : $V_c(0) = 5$ volt

$i_c = -\frac{C\, dV_c}{dt} = 0$

$V_c(t) = 0{,}025\, e^{-\delta t}(\sin\theta + 5\cos\theta)$

Module $\sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

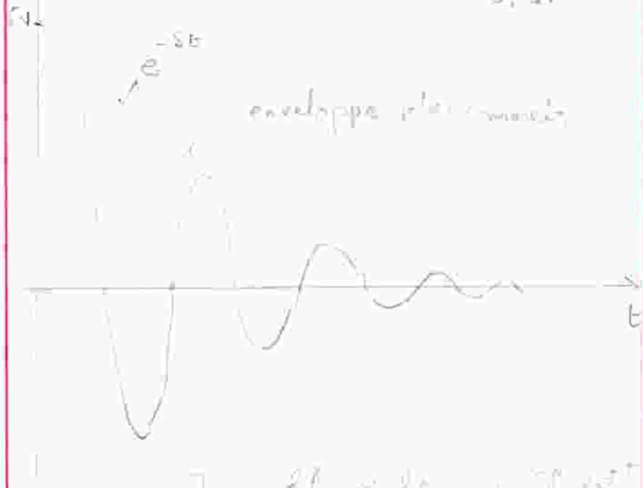
$= 0{,}025\sqrt{26}\, e^{-\delta t}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{26}}}_{\sin\varphi}\sin\theta + \underbrace{\frac{5}{\sqrt{26}}}_{\cos\varphi}\cos\theta\right)$

$\tan\varphi = \frac{1}{5} \Rightarrow \varphi = 1{,}373$

$V_c(t) = 0{,}1274\, e^{-\delta t}\cos(99998{,}71t - 1{,}373)$

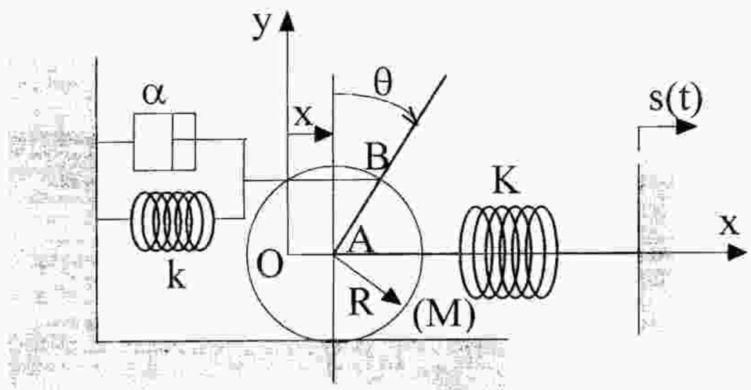
$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\varphi\sin\theta$

Décrément $D = \ln\frac{V_i}{V_{i+1}} = \delta T_0$



OSCILLATIONS FORCEES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice 1 :



Un cylindre plein et homogène, de masse M et de rayon R, peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Il est relié à un bâti fixe par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux α fixés au point B comme l'indique la figure ci-dessus. Un autre ressort de raideur K relie le point A de l'axe du cylindre à un second bâti animé d'un mouvement sinusoïdal d'élongation $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$. A l'équilibre, le point A se trouve à l'origine O du système de coordonnées, et le point B est à la verticale au dessus du point A. On étudie les oscillations de faible amplitude du cylindre autour de sa position d'équilibre.

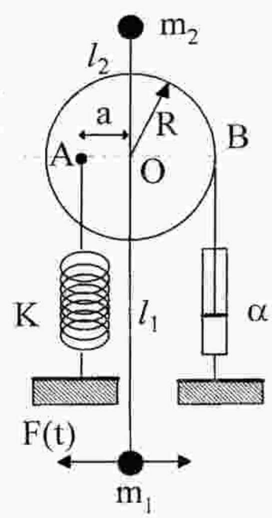
1°) Déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U du système en fonction de $x = R\theta$.

2°) Etablir l'équation différentielle décrivant le mouvement du cylindre.

3°) Déterminer la solution x(t) en régime permanent en donnant l'expression de son amplitude et de son déphasage par rapport à s(t), en fonction de la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3M}(K+3k)}$.

4°) Déterminer la valeur maximale de l'amplitude de x(t) si le coefficient de qualité Q est tel que Q=1 et dans le cas où K=3k.

Exercice 2 : Un disque circulaire homogène, E de masse M, de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal 0. Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par O. Les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement l_1 et l_2. Un ressort vertical, de constante de raideur K a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance a de O. En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force $F(t)=F_0 \cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.



Valeurs numériques :

$M=1kg$, $m_1 = m_2 = 0.1kg$, $K=16N/m$, $R=20cm$, $l_1 =50cm$,

$l_2 =25cm$, $a=10cm$, $g=10m/s^2$, $\alpha=7.25 10^{-2}$ kg/s.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

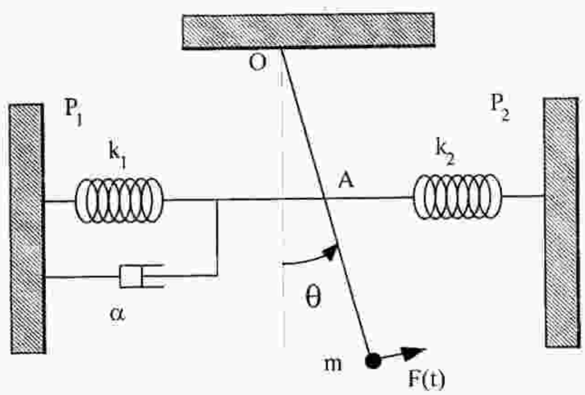
b) Trouver sa solution en régime permanent.

c) Calculer le facteur de qualité Q du système.

d) Déterminer la valeur de F_0 pour qu'à la résonance l'amplitude maximale soit égale à $\pi/30$ rad.

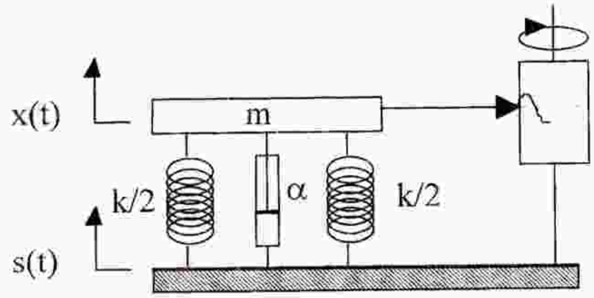
Exercice 3 :

La masse m, représentée sur la figure ci-contre, est soudée à l'extrémité de la tige de longueur l de masse négligeable. Cette masse est soumise à une force perpendiculaire, sinusoïdale de pulsation ω. L'autre extrémité est articulée au point O. La tige est reliée au point A au bâti fixe B_1 par un ressort de coefficient de raideur k_1 et un amortisseur dont le coefficient de frottement vaut α. Elle est, en outre, reliée au bâti fixe B_2 par un ressort de raideur k_2. La distance OA est égale à $l/2$.



1. Déterminer l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation ω. En déduire la pulsation de résonance.
2. Déterminer la puissance instantanée et la puissance moyenne fournie au système.
3. Déterminer la puissance instantanée et la puissance moyenne dissipée dans le système. Conclusion.

Exercice 4 : Le dispositif mécanique ci-contre représente le schéma de principe d'un appareil de mesure de vibrations. La masse m est liée par deux ressorts et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, un support rigidement lié au système mécanique dont on veut étudier les vibrations. Le mouvement du support est repéré par s(t) tandis que le mouvement de la masse est repéré par x(t). On étudie des vibrations sinusoïdales de la forme $s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$.



L'origine est prise à la position d'équilibre.

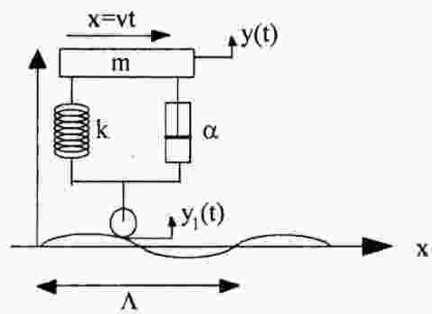
1) Ecrire le lagrangien du système. En déduire l'équation du mouvement de la masse m en fonction de la coordonnée relative $y(t) = x(t) - s(t)$.

2) Déterminer la solution stationnaire y(t).

3) Dans le cas de ressorts de faible raideur, la pulsation propre ω_0 est petite devant la pulsation Ω. Donner dans ce cas l'expression de y(t). Montrer que l'on peut ainsi déterminer facilement l'amplitude S_0 de la vibration (on a réalisé ainsi un vibromètre).

4) Lorsque la raideur des ressorts est élevée, la pulsation propre ω_0 est grande devant la pulsation Ω des vibrations. Montrer , dans ce cas, que l'on peut déterminer facilement l'accélération du support (on a ainsi réalisé un accéléromètre).

Exercice 5 : Un véhicule roulant est un système complexe à plusieurs degrés de liberté. La figure ci-contre peut être considérée comme une première approximation d'un véhicule qui se déplace sur une route ondulée décrite par le profil y_1 (t). Dans ce modèle simplifié, on suppose que:



- La raideur élastique des pneus est infinie, c'est-à-dire que les ondulations de la route sont intégralement transmises à la suspension du véhicule.
- Les roues ne décollent pas de la chaussée.
- On s'intéresse uniquement au déplacement vertical y(t) du véhicule dans le plan de la figure.
- On se place dans le cas simple où le véhicule se déplace horizontalement à une vitesse constante v sur une route à profil sinusoïdal $y_1(x)=Y_1 \sin(2\pi x/\Lambda)$.

1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de la coordonnée y du véhicule.

2) En déduire l'amplitude Y du mouvement du véhicule dans le sens vertical .

3) Application numérique m=350 kg, k=350 kN/m, v=100km/h, Λ=5m, Y_1 =20cm;

a) pour α=2000 N.s/m,

b) pour α=200 N.s/m.

Exercice 6 : Les machines tournantes (moteurs électriques, turbines, machines à laver, etc...) peuvent être le siège de vibrations importantes car très souvent le centre de masse ne coïncide pas avec l'axe de rotation. Pour limiter ces vibrations on utilise des supports antivibratoires constitués généralement de caoutchouc renforcé. En raison de leurs propriétés mécaniques ces supports peuvent être modélisés par un amortisseur en parallèle avec un ressort.

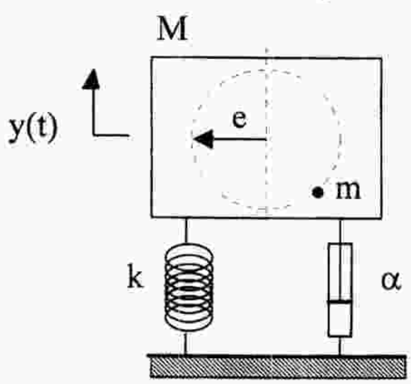


Figure 1

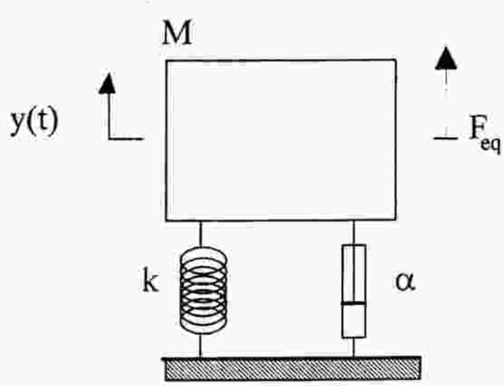


Figure 2

On se propose d'étudier à titre d'exemple le cas d'une machine à laver le linge (figure1). Soit M la masse de cette machine. La partie tournante est constituée d'un tambour de rayon e tournant à une vitesse angulaire constante ω. On considère que la masse tournante est constituée par le linge de masse m. Pour des raisons de simplicité, on suppose que le lave-linge ne peut effectuer que des mouvement verticaux repérés par la coordonnée y.

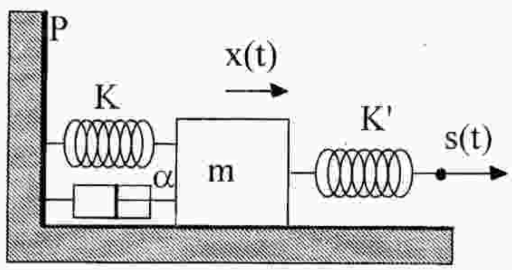
1) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée y.

2) Montrer qu'un tel dispositif est équivalent au schéma simplifié de la figure 2; donner l'expression de F_{eq}.

3) Dans l'hypothèse des faibles amortissements ($\delta << \omega_0$), tracer et commenter le graphe de l'amplitude Y du déplacement vertical du lave-linge en fonction de la vitesse de rotation.

4) Calculer l'amplitude de la force transmise au sol à la résonance.

Exercice 7 : Soit une masse m liée à un support P par un ressort de constante de raideur K et par un amortisseur à frottement visqueux de coefficient α. L'autre extrémité de la masse est liée à un ressort de constante de raideur K'. Le point d'attache de K' est soumis à un déplacement s(t) sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude S_0.



1/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m. En déduire la pulsation propre ω_0 et la force excitatrice agissant sur m.

2/ Trouver le déplacement en régime permanent de la masse m et établir l'expression de son amplitude de vibration X_0 en fonction de la pulsation ω.

3/ Calculer le coefficient d'amortissement α pour que l'amplitude des mouvements de la masse m soit égale à $S_0/10$ lorsque $\omega=\omega_0$.

A.N.: $K = K' = 10$ N/m ; $m = 0{,}1$ kg ; $S_0 = 1$ cm

4/ Déterminer le module de l'amplitude de la force transmise au support P.

5/ On définit comme facteur de transmission T, le rapport entre le module de l'amplitude de la force transmise au support P et celui de l'amplitude de la force excitatrice agissant sur la masse m :

$$T = \frac{|F_{trans}|}{|F_{exc}|}$$

a/ Déterminer T.

b/ Calculer T pour $\omega = \sqrt{2}\omega_0$

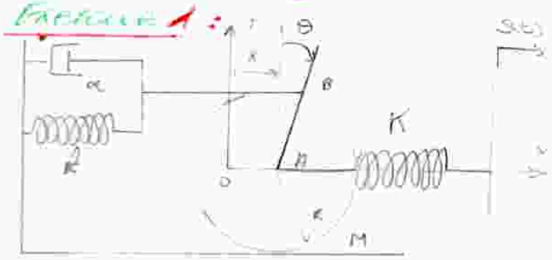
A.N.: $K = K' = 10$ N/m ; $m = 0{,}1$ kg et $\alpha = 100$ kg/s

c/ Que devient T pour $\omega >> \omega_0$? Conclusion.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3M}(K+3k)}$$

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

Exercice 1 :



1/ T et U en fonction de $X = R\theta$

. $T = T_{Rotation} + T_{Translation}$

$T_{Rot} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ / $J = \frac{1}{2} M R^2$

$T_{Rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} M \dot{x}^2$

$T_{Trans} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$

donc $T = \frac{3}{4} M \dot{x}^2$

. $U = U_K + U_k$

$U_k = \frac{1}{2} k (2R\theta)^2 = \frac{1}{2} 4k x^2$

$U_K = \frac{1}{2} K \left[R\theta - s(t)\right] = \frac{1}{2} K (x - s)^2$

donc : $U = 2kx^2 + \frac{1}{2} K (x - s)^2$

2/ Equation différentielle

$L = T - U = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 - 2kx^2 - \frac{1}{2} K (x - s)^2$

$D = \frac{1}{2} \alpha (2R\dot{\theta})^2 = 2\alpha \dot{x}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

$\frac{3}{2} M \ddot{x} + 4\alpha \dot{x} + (4k + K) x = K s$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{8\alpha}{3M} \dot{x} + \frac{2}{3M}(4k + K) x = \frac{2K}{3M} S$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2K}{3M} S$

3/ $X(t)$?

$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$

avec : $X_0(\omega) = \dfrac{\frac{1}{2} \omega_0^2 S_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$

et $tg(\varphi) = -\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

4/ $X(t)$ max / $Q = 1$

on a : $Q = \dfrac{X_0(\omega_0)}{X_0(0)} = 1$

$X_0(0) = \frac{S_0}{2} = X_0(\omega_0)$

$\Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \omega_0$

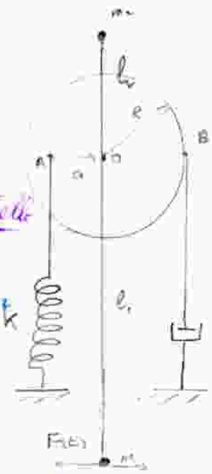
$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0 \Rightarrow$ système résonant

X_0 max est obtenu pour

$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

$X_0(\omega_R) = \frac{S_0}{\sqrt{3}}$

Exercice 2 :



1) Equation différentielle

. $T = T_M + T_{m_1} + T_{m_2}$

$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2$

$T = \left[\frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right] \dot{\theta}^2$

. $U = U_K + U_{m_1} + U_{m_2}$

$U = \frac{1}{2} K a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_1 - m_2 l_2) g \theta^2$

$L = T - U$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F(t) \cdot l_1$

$D = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$

$\left(\frac{1}{2} M R^2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right) \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta}$

$+ (K a^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2) \theta = F(t) l_1$

$= l_1 F_0 \cos \omega t$

$\ddot{\theta} + \left[\dfrac{\alpha R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\right] \dot{\theta}$

$+ \left[\dfrac{K a^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2}{\frac{1}{2} M R^2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\right] \theta = \dfrac{l_1 F_0 \cos \omega t}{\frac{1}{2} M R^2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}$

$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A F_0 \cos \omega t$

avec :

$$\omega_0^2 = \frac{Ka^2 + m_1 g \ell_1 - m_2 g \ell_2}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}$$

$$= \frac{a^2 \cdot 16 + 0{,}1 \cdot 10\,(0{,}5 - 0{,}25)}{\frac{1}{2}\,1 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}1\,(0{,}5^2 + 0{,}25^2)}$$

$\boxed{\omega_0^2 = 8}$

$$2\delta = \frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}$$

$$= \frac{7{,}25 \cdot 10^{-2} \times 0{,}2^2}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}1\,(0{,}5^2 + 0{,}25^2)} = 0{,}057$$

$\boxed{\delta = 0{,}028}$

$$A = \frac{\ell_1}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}$$

$$= \frac{0{,}5}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}1\,(0{,}5^2 + 0{,}25^2)}$$

$\boxed{A = 9{,}76}$

donc :

$$\ddot{\theta} + 0{,}057\,\dot{\theta} + 8\,\theta = 9{,}76\,F_0 \cos \omega t$$

b) La solution en régime permanent :

$$\theta(t) = \frac{9{,}76\,F_0}{8 - \omega^2} = B(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{-0{,}057\,\omega}{8 - \omega^2}$

et $$B(\omega) = \frac{9{,}76\,F_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2\right]^{1/2}}$$

c) Facteur de qualité

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\sqrt{2}}{0{,}057}$$

$\Rightarrow \boxed{Q = 49{,}6}$

d) F_0 ?

Pour $\omega = \omega_0$ on veut que la tige oscille entre 0 et sa valeur maximale qui est alors $2 \cdot \frac{9{,}76}{8} F_0$

Il faut donc que : $B(\omega_0) = \frac{9{,}76\,F_0}{8}$

$$B(\omega_0) = \frac{9{,}76\,F_0\,\beta}{2\delta\,\omega_0} = \frac{9{,}76\,F_0\,\beta}{8} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$\Rightarrow \beta = \frac{2\delta}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \beta = 0{,}02$

La valeur maximale θ_{max} est égale à $2 \cdot \frac{9{,}76\,F_0}{8}$ si

On veut qu'elle soit égale à $\frac{\pi}{30}$

il faut : $2 \cdot \frac{9{,}76\,F_0}{8} = \frac{\pi}{30}$

donc : $F_0 = \frac{8\pi}{30 \cdot 2 \cdot 9{,}76}$

$F_0 = 0{,}045\,N$

Exercice 3

$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$

$x = \ell \sin\theta = \ell\theta$ pour θ petit

$y = -\ell\cos\theta$

$\dot{x}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$ et $\dot{y}^2 = \ell^2\theta^2\dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$

$U_{K_1} = \frac{1}{2} K_1 \frac{\ell^2}{4}\theta^2$ et $U_{K_2} = \frac{1}{2} K_2 \frac{\ell^2}{4}\theta^2$

$\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Rightarrow mg = -\frac{\partial U}{\partial y}$

$U_m = -mg \int_{\ell}^{\ell\cos\theta} dy$

$= -mg\ell\cos\theta + mg\ell$

$= -mg\ell\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + mg\ell$

$U_m = mg\ell\frac{\theta^2}{2}$

donc : $U = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{K_1 + K_2}{4}\right)\ell^2 + mg\ell\right]\theta^2$

$D = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{4}\ell^2\dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F(t)\,\ell$

$m\ell^2\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4}\ell^2\dot{\theta} + \left(\frac{K_1+K_2}{4}\ell^2 + mg\ell\right)\theta = F(t)\ell$

$m\ell\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4}\ell\dot{\theta} + \left(\frac{K_1+K_2}{4}\ell + mg\right)\theta = F(t)$

$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left(\frac{K_1+K_2}{4m} + \frac{g}{\ell}\right)\theta = \frac{F(t)}{m\ell}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F(t)}{\ell m}$

avec : $\delta = \frac{\alpha}{8m}$ et $\omega_0^2 = \frac{K_1+K_2}{4m} + \frac{g}{\ell}$

$\theta(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

$A(\omega) = \frac{F_0 / m\ell}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$

$tg\,\varphi(\omega) = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\quad \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$

$F(t) = F_0\cos\omega t$

$\theta(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

$x(t) = \ell\,\theta(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

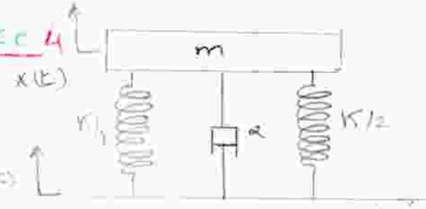
$P_F(t) = F(t)\,\dot{x}(t) = F\ell\dot{\theta}$

$\dot{x}(t) = -\omega B(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$

$P_F(t) = -F_0\cos\omega t\,\omega B(\omega)\sin(\omega t + \varphi)$

$P_\alpha(t) = \alpha\,\dot{x}^2(t)$

Exercice 4



1) Equation du M^{vt}

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}K(x-S)^2\right)$

$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K (x-S)^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

avec : $D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}-\dot{S})^2$

$m\ddot{x} + K(x-S) + \alpha(\dot{x}-\dot{S}) = 0$

On a : $y(t) = x(t) - S(t)$

$\Rightarrow x(t) = y(t) + S(t)$

$m(\ddot{y} + \ddot{S}) + Ky + \alpha\dot{y} = 0$

$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + Ky = -m\ddot{S}$

On a : $S(t) = S_0 \cos wt$

donc $\ddot{S}(t) = -w^2 S_0 \cos wt$

d'où l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = w^2 S_0 \cos wt$

$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + w_0^2 y = w^2 S_0 \cos wt$

avec : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $w_0^2 = \frac{K}{m}$

la solution est : $y(t) = A\cos(wt + \varphi)$

avec $A(w) = \frac{w^2 S_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}}$

et $tg\varphi = \frac{-2\delta w}{w_0^2 - w^2}$

Exercice 3

$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

$x = l \sin\theta = l\theta$ pour θ petit

$y = -l\cos\theta$.

$\dot{x}^2 = l^2\dot{\theta}^2$ et $\dot{y}^2 = l^2\theta^2\dot{\theta}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$

$U_{K_1} = \frac{1}{2} K_1 \frac{l^2}{4}\theta^2$ et $U_{K_2} = \frac{1}{2} K_2 \frac{l^2}{4}\theta^2$

$\vec{P} = -\vec{grad}\, U \Rightarrow mg = -\frac{\partial U}{\partial y}$

$U_m = -mg \int_{l}^{P(t)} dy$

$= -mgl\cos\theta + mgl$

$= -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + mgl$

$U_m = mgl\frac{\theta^2}{2}$

donc : $U = \frac{1}{2}\left[\frac{(K_1 + K_2)}{4} l^2 + mgl\right]\theta^2$

$D = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{4} l^2\dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F(t) \cdot l$

$m l^2\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4} l^2\dot{\theta} + \left(\frac{K_1 + K_2}{4} l^2 + mgl\right)\theta = F(t) l$

$m l\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4} l\dot{\theta} + \left(\frac{K_1 + K_2}{4} l + mg\right)\theta = F(t)$

$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left(\frac{K_1 + K_2}{4m} + \frac{g}{l}\right)\theta = \frac{F(t)}{ml}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F(t)}{lm}$

avec : $\delta = \frac{\alpha}{8m}$ et $\omega_0^2 = \frac{K_1 + K_2}{4m} + \frac{g}{l}$

$\theta(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

$A(\omega) = \frac{F_0 / ml}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$

$tg\,\varphi(\omega) = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\quad \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$

$F(t) = F_0\cos\omega t$

$\theta(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

$x(t) = l\,\theta(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

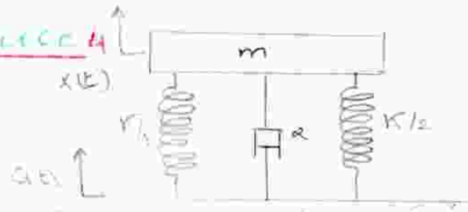
$P_F(t) = F(t)\,\dot{x}(t) = F\,l\,\dot{\theta}$

$\dot{x}(t) = -\omega B(\omega)\sin(\omega t + \varphi_\omega)$

$P_F(t) = -F_0\cos(\omega t)\,\omega B(\omega)\sin(\omega t + \varphi_\omega)$

$P_A(t) = -\alpha\,\dot{x}^2(t)$

Exercice 4



1) Equation du M^{vt}

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}K (x-s)^2\right)$

$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K (x-s)^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

avec : $D = \frac{1}{2}\alpha (\dot{x}-\dot{s})^2$

$m\ddot{x} + K(x-s) + \alpha(\dot{x}-\dot{s}) = 0$

on a : $y(t) = x(t) - s(t)$

$\Rightarrow x(t) = y(t) + s(t)$

$m(\ddot{y}+\ddot{s}) + Ky + \alpha\dot{y} = 0$

$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + Ky = -m\ddot{s}$

on a : $s(t) = s_0 \cos wt$

donc $\ddot{s}(t) = -w^2 s_0 \cos wt$

d'où l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{K}{m} y = w^2 s_0 \cos wt$

$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + w_0^2 y = w^2 s_0 \cos wt$

avec : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $w_0^2 = \frac{K}{m}$

la solution est : $y(t) = A\cos(wt+\varphi)$

avec $A(w) = \frac{w^2 s_0}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+4\delta^2 w^2}}$

et $tg\,\varphi = \frac{-2\delta w}{w_0^2 - w^2}$

Exo 4 2e degré lib.

1/ $U = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$

2/ $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_m^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

$L = T - U$

$\frac{1}{2} m R^2$

R^2

$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$

$\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2} m \ddot{x}_1 - \frac{m}{2} \ddot{x}_1$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_1^2\right)$$

$-k$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_1 - \frac{m}{2} \ddot{x}_2 + k x_1$$

$$= \frac{k}{2m}$$

Exo 7 1° degré forcé

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad U = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K' (\Delta - x)^2$

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

$m \ddot{x} + K x - K'(\Delta - x) = -\alpha \dot{x}$

$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + (K + K') x = K' \Delta(t)$

$\omega_0^2 = \frac{K + K'}{m}$ et $F(t) = K' \Delta(t)$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{K' \Delta(t)}{m}$$

$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ / $\Delta(t) = \Delta_0 \cos \omega t$

$$x_0 = \frac{K' \Delta_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

3/ $\omega = \omega_0 \qquad x_0 = \frac{K' \Delta_0}{2 m \delta \omega_0}$

4/ $F_{Trans} = k x + \alpha \dot{x}$

$= k x_0 \cos(\omega t - \varphi) - \alpha \omega x_0 \sin(\omega t - \varphi)$

F_{Trans}

avec $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha \omega}{k}$

$K' \ll K$

$F_{trans} \simeq 0$

$= k x_0 \simeq 0$

$= \alpha \dot{x} - \alpha \omega x_0$

$F_{\text{inertie}} \simeq 0 \quad F_{\alpha} \simeq 0 \Rightarrow F_{\text{frott}} \simeq 0$

Exo 6

$x_m = e \cos \omega t$

$y_m = y + e \sin \omega t$

$$\vec{v}_m = \begin{pmatrix} -e\omega \sin \omega t = \dot{x}_m \\ \dot{y} + e\omega \cos \omega t = \dot{y}_m \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)$

$T_m = \frac{1}{2} m (e^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2e\omega\dot{y}\cos\omega t)$

$T = T_M + T_m \qquad T_M = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$

$U = \frac{1}{2} K (y - y_0)^2 + M g y + m g y_m$

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{y}^2$

$\left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow K y_0 = (M+m) g$

$\frac{\partial L}{\partial y} = -Ky + K y_0 - Mg - mg$

$= -ky$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (M+m)\dot{y} + e\omega \cos\omega t \times m$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = (M+m)\ddot{y} - m e \omega^2 \sin \omega t$

$(M+m)\ddot{y} + \alpha \dot{y} + k y = m e \omega^2 \sin \omega t$

$(M+m)\ddot{y} = \vec{F}_R + \vec{F}_D + \vec{F}_{ex}$

$\rightarrow F_{ex} = m e \omega^2 \sin \omega t$

Entrée

$$L_s = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2} M\right)\dot{x}_1^2 + m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[(2K) x_1^2 + \frac{mg}{L} x_2^2\right]$$

1/ [illegible]

2/ $M = 2m$, $\frac{K}{M} = \frac{g}{L} = \omega_0^2$

[illegible]

Exercice 5

Ecrivons le profil de la route (x) en fonction du temps t

$y(x) = A \sin(2\pi x/\lambda)$ $\quad x = Vt$

$y(t) = A \sin(2\pi V/\lambda) t$

1/ Equation différentielle

$U = U_K + U_m$

$= \frac{1}{2} K (Y - y)^2 + Mgy$

$y = A \sin 2\pi x/\lambda$

donc : $U = \frac{1}{2} K Y^2 \, K y \, A \sin(2\pi V/\lambda) t$

$T = \frac{1}{2} M \dot{Y}^2$

$\mathcal{L} = T - U$ $\quad$ et $\quad \mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha (\dot{Y} - \dot{y})^2$

$= \frac{1}{2} \alpha \left(\dot{Y} - 2\pi \frac{VA}{\lambda} \cos 2\pi \frac{Vt}{\lambda}\right)^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}}$$

$M\ddot{Y} + \alpha \dot{Y} + KY = KA \sin \omega t + \omega \alpha A \cos \omega t$

avec $\omega = 2\pi V/\lambda$

$$\ddot{Y} + 2\beta \dot{Y} + \omega_0^2 Y = \delta \sin(\omega t + \Psi)$$

$\beta = \frac{\alpha}{2M}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{K}{M}$ $\quad \delta = A\omega_0^2 \sqrt{1 + 4\xi^2 \Omega^2}$

$\xi = \beta/\omega_0$ $\quad \Omega = \omega/\omega_0$, $\quad tg\, \Psi = 2\xi\Omega$

2/ La solution de cette équation est la somme d'une solution de l'équation homogène $\ddot{Y} + 2\beta \dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$ et d'une solution particulière. La solution homogène est du type oscillatoire amorti car nous sommes en présence de frottement faible $(\beta < \omega_0)$. Elle tend exponentiellement vers 0. Il ne reste plus alors qu'après un certain laps de temps que la solution particulière

$Y = A(\omega, \beta) \sin(\omega t + \varphi)$

$A = \delta \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right)^{-1/2}$

$= r \left(\frac{1 + 4\xi^2\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2} \right)^{1/2}$

$Tg\, \varphi = -2\beta\omega \Big/ \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\right)$

3 - Applications numériques

$\omega_0^2 = K/M = 10^3\, s^{-2}$, $\quad \omega^2 = 4\pi^2 V^2/\lambda^2$

$= 1225\, s^{-2}$

a) $\alpha = 2 \cdot 10^3$ M m/s

$\beta = \alpha/2M = 2{,}86\, s^{-1} \Rightarrow A = 6{,}8$ cm

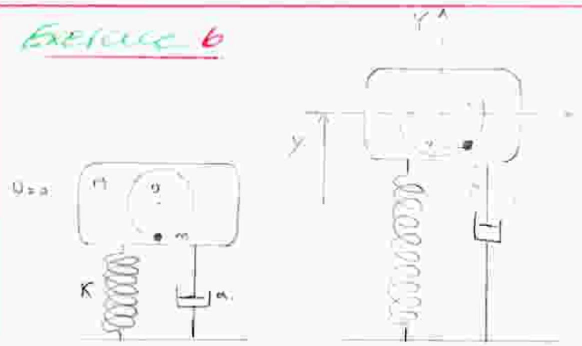
b) $\alpha = 2 \cdot 10^2$ M m s

$\beta = 0{,}286\, s^{-1} \Rightarrow A = 9$ cm

Note

R[illegible] $\omega = 35\, s^{-1}$ [illegible] $\omega_0 = 31\, s^{-1}$ [illegible] 6,8 cm [illegible] 9 cm [illegible]

Exercice 6



1°/ Equation différentielle :

les coordonnées de M à t : $x = 0$ et $y = y$

les coordonnées de m $\begin{cases} x = a \sin\theta & \text{et} \\ Y = y - a\cos\theta \\ \theta = \omega t \end{cases}$

$U = U_K + U_m + U_M$

$U = \frac{1}{2}Ky^2 + mg(y - a\cos\theta) + Mgy$

$U = \frac{1}{2}Ky^2 + c^{te}$

$T = T_M + T_m$

$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{Y}^2)$

$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(a^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2\omega a\dot{y}\sin\omega t)$

$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(a^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2\omega a\dot{y}\sin\omega t)$
$- \frac{1}{2}Ky^2 - c^{te}$

$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$$

$$(M+m)\ddot{y} + \alpha\dot{y} + Ky = ma\omega^2\cos(\omega t + \pi)$$

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{M+m}\dot{y} + \frac{K}{M+m}y = \frac{m}{M+m}a\omega^2\cos(\omega t + \pi)$$

2°/ l'équation obtenue est celle d'un système oscillatoire amorti forcé de masse $M+m$ avec une force d'excitation

$F_{exc} = ma\omega^2\cos(\omega t + \pi)$

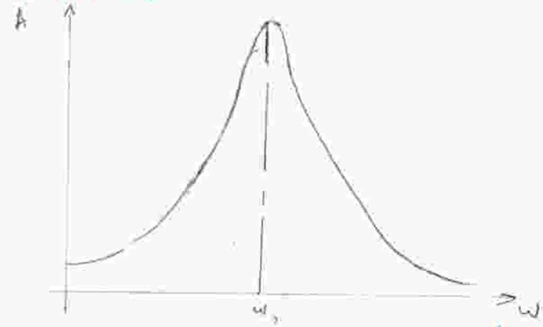
3°/ En régime permanent la solution est :

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec : $A(\omega) = \left(\frac{m}{M+m}a\omega^2\right) / \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{1/2}$

et $\omega_0^2 = \frac{K}{M+m}$ et $\delta = \frac{\alpha}{2(M+m)}$

Pour un faible amortissement $\delta \ll \omega_0$



On peut admettre que la résonance a lieu pour ω très voisin de ω_0. Pour $\omega \gg \omega_0$ ou $\omega \ll \omega_0$ l'amplitude des oscillations est très faible.

4°/ L'amplitude de la force transmise au sol à la résonance

Pour $\omega = \omega_0$, $A = \frac{m}{M+m}\frac{a\omega_0^2}{2\delta\omega_0}$

$= \frac{ma\omega_0}{\alpha}$

La force transmise au sol est

$$\vec{F} = +K\vec{y} + \alpha\dot{\vec{y}} + m\vec{g}$$

Exercice 7

1°/ L'équation différentielle

$T = T_m = \frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$U = U_K + U_{K'} = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K' (s - x)^2$

$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2 - \frac{1}{2} K' (s-x)^2$

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

$m\ddot{x} + K x - K'(s - x) + \alpha \dot{x} = 0$

$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + (K + K')x = K' s$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \left(\frac{K+K'}{m}\right)x = \frac{K'}{m} s$

$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{K'}{m} s$

avec : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{K+K'}{m}$

$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$

2°/ Le deplacement en régime permanent.

$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$

avec $x_0 = \frac{(K'/m)\, s_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$

et $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

3°/ $\frac{\alpha}{s}$? $\boxed{\omega = \omega_0}$

$x_0 = \frac{K' s_0}{2 m \delta \omega_0} = \frac{s_0}{\mu o}$

on a : $\alpha = 2m\delta$

$\frac{K'}{\mu o} = 2m\left(\frac{\alpha}{2m}\right)\omega_0 = \alpha\sqrt{\frac{K+K'}{m}}$

$100 = \alpha \sqrt{\frac{20}{0,1}} \Rightarrow \alpha = \sqrt{5}$ ...

4°/ Le module de l'amplitude de la force transmise

$F_{Trans} = kx - \alpha\dot{x}$

$= k x_0 \cos(\omega t - \varphi)$

$- \alpha \omega x_0 \sin(\omega t - \varphi)$

$|F_{Trans}| = \sqrt{k^2 + \alpha^2\omega^2}\, x_0 \cos(\omega t + \varphi' - \varphi)$

avec $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\alpha\omega}{K}$

5°/ a) $\frac{T}{s}$? $T = \frac{|F_{Trans}|}{|F_{exc}|}$

$T = \frac{\sqrt{k^2 + \alpha^2\omega^2}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta\omega^2}} \cdot \frac{\cos(\omega t - \varphi - \varphi')}{\cos\omega t}$

b) $\omega = \omega_0\sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\delta\sqrt{2}\,\omega_0}{m\,\omega_1^2} = \frac{-\alpha\sqrt{2}\,\omega_0}{K + K'}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\omega_0}{k}$ si $K' \ll K$

$\varphi' = -\varphi$

$T \simeq 1$

c) $\omega \gg \omega_0$ $T \to 0$

$F_{Trans} \simeq 0$ x_0 Très petit

$x_0 \simeq \frac{cte}{\omega^2} \to 0$

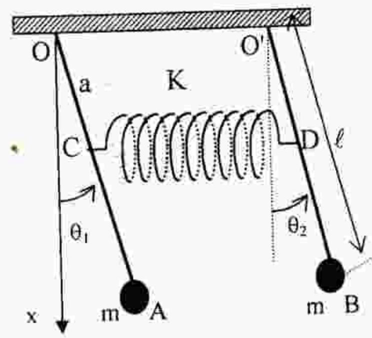
$F_{ressort} = kx_0 \simeq 0$

$|F_\alpha| = \alpha\dot{x} = \alpha\omega x_0 = \alpha\frac{cte}{\omega} \to 0$

U.S.T.H.B. faculté de Physique Module : PHYS 3 (ST2) Année Universitaire 2007-2008

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

Exercice 1 :



Deux pendules simples, de même longueur ℓ, de même masse m, mobiles dans un même plan vertical, sont reliés par un ressort de raideur k; sa longueur est choisie de façon que les deux pendules soient verticaux à l'équilibre. On pose:

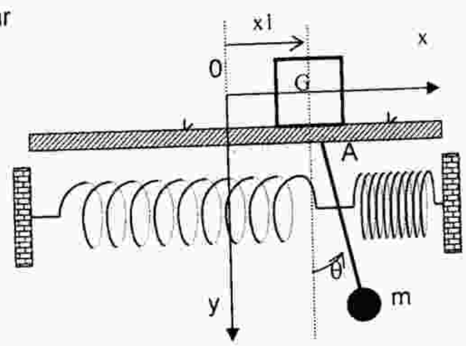
OC = O'D = a ; $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA})=\theta_1$ et $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{O'B})=\theta_2$.

Les conditions initiales imposées sont les suivantes:

à t = 0, $\theta_1(0)=0,\ \theta_2(0)=\theta_0,\ \dot\theta_1(0)=\dot\theta_2(0)=0$.

1. On suppose que les mouvements sont des oscillations de faible amplitude. Déterminer les équations différentielles en θ_1 et θ_2 qui régissent le mouvement du système.
2. On pose $\varphi_1=\theta_1+\theta_2$ et $\varphi_2=\theta_1-\theta_2$. Montrer qu'il existe un système d'équations différentielles découplées en φ_1 et φ_2. Résoudre le système dans ce cas.
3. Trouver les solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ des deux pendules et tracer les courbes donnant leur variation en fonction du temps. Que deviennent ces solutions lorsque le couplage est lâche (k faible).

Exercice 2 :



On considère le système de la figure ci-contre constitué par un cube de masse M qui glisse sans frottement sur un plan horizontal; un pendule simple constitué par une tige de longueur L et de masse négligeable terminée par une masse ponctuelle m, effectue des oscillations autour d'un axe horizontal passant par le centre de gravité G du cube. Le milieu A de la tige est relié à deux bâtis fixes par deux ressorts identiques de raideur k. La position de chacun des éléments de ce système est repérée par rapport au système de coordonnées xOy. A l'équilibre le point G est confondu avec O, la tige est verticale et les ressorts ne sont pas déformés.

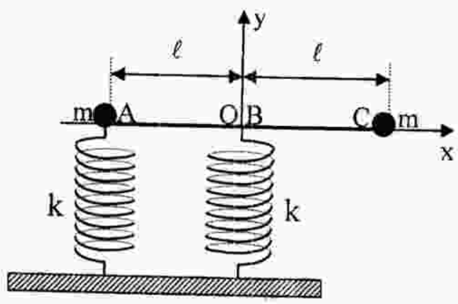
1. Calculer, en fonction de x_1 et θ, les coordonnés du point G et de la masse m dans le repère xOy.
   a/ En déduire l'énergie cinétique du système.
   b/ Calculer l'énergie potentielle du système.
2. En déduire l'expression du Lagrangien dans le cas des oscillations de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre. Etablir les équations différentielles du mouvement.
3. En posant $x_2=\frac{L}{2}\theta$ et dans le cas où m = M et $\frac{k}{m}=\frac{2g}{3L}$, montrer que ces équations différentielles peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases}2m\ddot{x}_1+2k\,x_1+2m\ddot{x}_2+2k\,x_2=0\\ m\ddot{x}_1+k\,x_1+\beta m\ddot{x}_2+2\beta k\,x_2=0\end{cases}$$

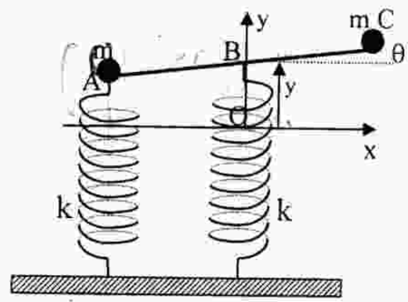
   Donner la valeur numérique de β.
4. Calculer les pulsations propres de ce système en fonction de $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Exercice 3 :

Le système représenté par la figure ci-dessous est constitué d'une tige de longueur 2ℓ et de masse négligeable, terminée à ses extrémités A et C par des masses identiques m. Les points A et B de la tige sont reliés à un bâti fixe par deux ressorts identiques de raideur k. La position du système est décrite par les coordonnées généralisées y (ordonnée du point B) et θ (écart angulaire de la tige par rapport à l'horizontale). A l'équilibre, la tige est horizontale.



position d'équilibre



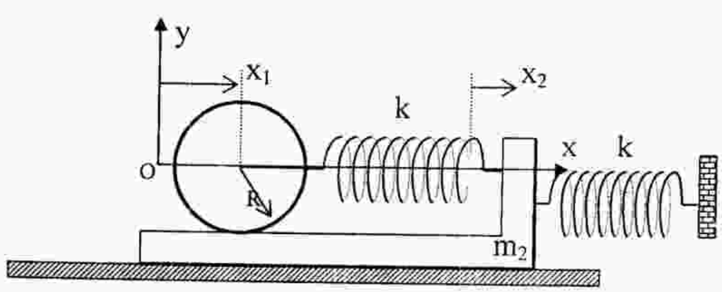
en mouvement

1. a. Donner les coordonnées des points A et C. En déduire l'expression de l'énergie cinétique totale.
   b. Calculer l'énergie potentielle totale pour une position (y,θ). En déduire les déformations d_A et d_B des deux ressorts à l'équilibre. Sont-ils comprimés ou étirés?
   c. Donner l'expression du lagrangien du système. On pose $z = \ell\theta$, montrer que pour les petits mouvements, ce lagrangien est une fonction quadratique de $y,\ z,\ \dot{y},\ \dot{z}$.

2. Pour les petits mouvements:
   a. Trouver les pulsations propres du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
   b. A l'instant t = 0, B est confondu avec le point O et la barre fait avec l'horizontale un angle θ_0 tel que $\ell\theta_0 = a$. Le système est abandonné ainsi sans vitesse initiale. Déterminer l'expression, en fonction du temps, de l'ordonnée y_A du point A.

Exercice 4:

Un cylindre homogène de masse m_1 et de rayon R peut rouler sans glisser au-dessus d'un plateau de masse m_2 qui peut coulisser sur un bâti horizontal. Un premier ressort de raideur k relie l'axe du cylindre au plateau, lui même relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un second ressort de raideur k. Ecarté de sa position d'équilibre puis relâché, le système effectue des oscillations de très faibles amplitudes. On décrit ce système à l'aide des deux coordonnées x_1 et x_2 mesurées dans un référentiel xOy lié au sol.



1. Calculer l'énergie potentielle de ce système.

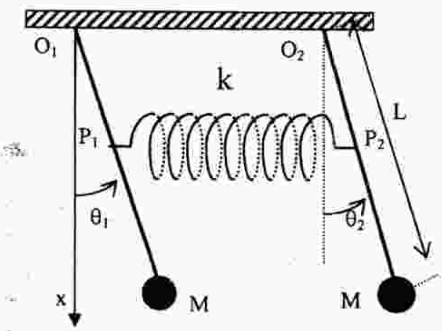
2. Montrer que son énergie cinétique s'écrit sous la forme:

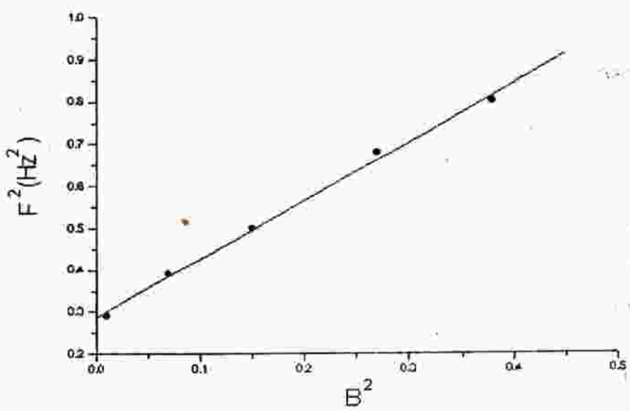
$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)\dot{x}_1^2-\frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{5m}{2}\right)\dot{x}_2^2 \quad \text{avec } m_1=m \text{ et } m_2=2m$$

3. Déterminer les pulsations propres du système.
4. Trouver les modes propres associés à chacune de ces pulsations propres et écrire les solutions générales régissant le mouvement du système.

Exercice 5:

Soient deux pendules pesants simples identiques composés chacun d'une masse supposée ponctuelle M fixée à l'extrémité d'une tige rigide de longueur L et de masse négligeable. Ils sont couplés par un ressort horizontal de raideur K, également de masse négligeable, fixé aux tiges au points P_1et P_2 tels que $O_1P_1= O_2P_2 = a$. A l'équilibre, les tiges sont verticales. L'ensemble effectue des oscillations de faibles amplitudes dans le plan vertical. On notera θ_1 et θ_2 les écarts angulaires respectifs des deux tiges





par rapport à la position d'équilibre (figure 1). On posera enfin $\beta = a/L$, $\omega^2_p= g/L$ (g étant l'accélération de la pesanteur) et $\omega^2_e = K/M$.

FIGURE 1 **FIGURE 2**

1. Etablir les équations du mouvement.
2. En déduire les pulsations propres du système.
3. Déterminer la forme des solution correspondant aux conditions initiales suivantes:

a) $\theta_1(t=0) = \theta_2(t=0) = \theta_0$, $\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$.

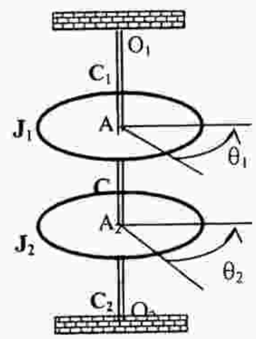
b) $\theta_1(t=0) = -\theta_2(t=0) = \theta_0$, $\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$.

4. La figure 2 représente la variation du carré f^2 de l'une des deux fréquences propres mesurées en fontion de β^2, c'est à dire quand on déplace les points P_1et P_2 le long des tiges. Déduire de ce qui précède les valeurs de ω_p et de ω_e.

Exercice 6 :

La figure ci-dessous représente un système constitué par deux disques circulaires horizontaux portés par trois fils O_1A_1, A_1A_2 et A_2O_2, de constantes de torsion C_1, C et C_2 respectivement, tendus suivant une même verticale O_1O_2. On désigne par J_1 et J_2 les moments d'inertie des deux disques par rapport à l'axe O_1O_2 passant par leurs centres de gravité. Le système est décrit par les angles θ_1 et θ_2 de rotation des disques à partir de leurs positions d'équilibre.

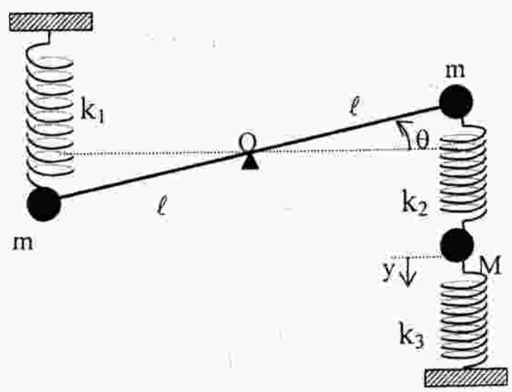
A l'équilibre, $\theta_1 = \theta_2 = 0$.



1) Ecrire les équations du mouvement du système et calculer ses pulsations propres.
2) Que deviennent ces pulsations propres dans le cas où $J_1 = J_2 = J$ et $C_1 = C_2 = C$. Déterminer dans ce cas les solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sachant qu'à t = 0, $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$.
3) Quelles sont les conditions initiales appropriées pour que le système vibre: a) dans le premier mode propre; b) dans de seconde mode propre.
4) En utilisant les conditions précédentes, déterminer les coordonnées principales qui permettent de découpler le système.

Exercice7

Le système de la figure ci-contre est constitué d'une tige de longueur 2ℓ, de masse négligeable, portant à chacune de ses extrémités une masse m. Un ressort de raideur k_1 relie l'une des extrémités de la tige à un bâti fixe tandis que l'autre extrémité est couplée à un oscillateur (M, k_3) par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_2. On repère ce système à deux degrés de liberté par les paramètres de position y et θ. En prenant $M = 2m$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$:

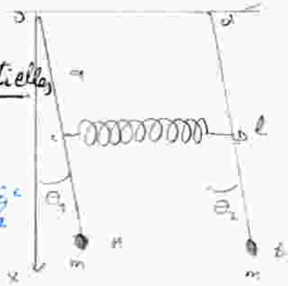


1) Etablir les équations différentielles régissant les petites oscillations.
2) Déterminer les pulsations propres et les rapports des amplitude de chacun des modes.
3) Ecrire les solutions générales $y(t)$ et $\theta(t)$.

4

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

Exercice 1



1°/ Equations différentielles

$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$

$T = \frac{1}{2} m l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l_2^2 \dot{\theta}_2^2$

$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$

$U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_K = \ldots$

$= -mgl \cos\theta_1 - mgl \cos\theta_2 + \frac{1}{2} K (a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)^2 + c^{te}$

pour θ petit $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

et $\sin\theta \simeq \theta$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2}(mgl)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(mgl)\theta_2^2 + \frac{1}{2} K (a\theta_2 - a\theta_1)^2 + c^{te}$

$U = \frac{1}{2}(mgl)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} K a^2 (\theta_2 - \theta_1)^2$

$L = T - U$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} ml^2 \ddot{\theta}_1 + (mgl + Ka^2)\theta_1 - Ka^2\theta_2 = 0 \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 + (mgl + Ka^2)\theta_2 - Ka^2\theta_1 = 0 \end{cases}}$$

2°/

$$\begin{cases} ml^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgl(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ ml^2(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + (mgl + 2Ka^2)(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2$ et $\varphi_2 = \theta_1 - \theta_2$

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + mgl\,\varphi = 0 \\ ml^2 \ddot{\varphi}_2 + (mgl + 2Ka^2)\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + (g/l)\varphi_1 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \left[(g/l) + \frac{2Ka^2}{ml^2}\right]\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$\varphi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$\varphi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

donc $\theta_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$

$\theta_1(t) = \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$

$\theta_2(t) = \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2Ka^2}{ml^2}}$

Exercice 2

1°/ Les coordonnés du point G

$\vec{Om} = \vec{OG} + \vec{Gm}$

$\vec{OG} \begin{cases} x = x_1 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\vec{Gm} \begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$

donc : $\vec{Om} \begin{cases} x = x_1 + l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$

$T = T_M + T_m$

$\dot{x} = \dot{x}_1 + l\dot{\theta}$

$\dot{y} = -l\sin\theta \cdot \dot{\theta} = -l\theta\dot{\theta}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}_1^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1 l\dot{\theta} + (l\theta\dot{\theta})^2$

$T_m = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x} l\dot{\theta})$

$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2$

donc $T = \frac{1}{2}\left[(m+M)\dot{x}_1^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + 2m\dot{x}l\dot{\theta}\right]$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$

$U_{K_1 K_2} = \frac{1}{2}\left[2K\left(x_1 + \frac{l}{2}\theta\right)^2\right]$

$\vec{P} = -\vec{grad}\,U \Rightarrow mg = -\frac{\partial U}{\partial y}$

$U_m = -mg \int dy$

donc : $U_m = -mgl\cos\theta + mgl$

$$U_m = mgl\frac{\theta^2}{2}$$

d'où $U = \frac{1}{2}\left[2K\left(x_1 + \frac{l}{2}\theta\right)^2 + mgl\theta^2\right]$

2°/ L'expression de Lagrangien

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

avec : $L = T - U = \frac{1}{2}\left[(m+M)\dot{x}_1^2 + ml^2\dot{\theta}^2\right]$

$m\dot{x}l\dot{\theta} - \frac{1}{2}\left[2K\left(x_1 + \frac{l}{2}\theta\right)^2 + mgl\theta^2\right]$

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} + 2K\left(x_1 + \frac{l}{2}\theta\right) = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}_1 + 2K\left(x_1 + \frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2} + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

3°/ Les équations différentielles

$$x_2 = \frac{l}{2}\theta \; ; \; m = M \text{ et } \frac{K}{m} = \frac{2g}{3l}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{x}_2 + 2K(x_1 + x_2) = 0 \\ 2ml\ddot{x}_2 + ml\ddot{x}_1 + 2K(x_1 + x_2)\frac{l}{2} + 2mgx_2 = 0 \end{cases}$$

car $l\theta = 2x_2 \Rightarrow l\ddot{\theta} = 2\ddot{x}_2$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{x}_2 + 2K(x_1 + x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{x}_2 + Kx_1 + m\left(\frac{K}{m} + \frac{2g}{l}\right)x_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\frac{2g}{3l} = \frac{K}{m} \Rightarrow \frac{2g}{l} = \frac{3K}{m}$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{x}_2 + 2Kx_1 + 2Kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{x}_2 + Kx_1 + 4Kx_2 = 0 \end{cases}$$

d'où on tire $\beta = 2$

4°/ Les pulsations propres en fonction de ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 + 4\omega_0^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A + 2(2\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \\ \omega_0^2 - \omega^2 & 2(2\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2(\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega_0^2 - \omega^2) - (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 0$

$2\left[2\omega_0^4 - \omega_0^2\omega^2 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4\right]$

$- \left[\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4\right] = 0$

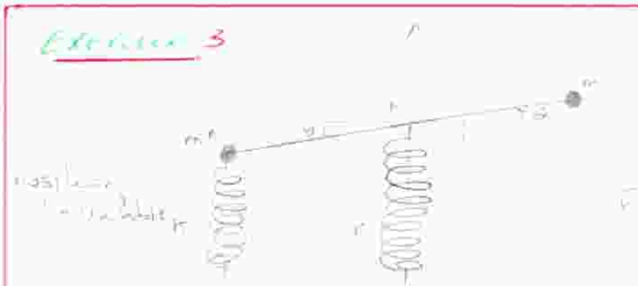
$\Rightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 3\omega_0^2) = 0$

donc : $\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{K}{m}$

$$\omega_2^2 = 3\omega_0^2 = 3\frac{K}{m}$$

Force amortie

Exercice 3



1°/ a- les coordonnées des points A et C

$$\begin{cases} x_A = -\ell\cos\theta \\ y_A = y - \ell\sin\theta \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_c = \ell\cos\theta \\ y_c = y + \ell\sin\theta \end{cases}$$

L'énergie cinétique :

$T = T_A + T_C$

$T_A = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2)$

$T_A = \frac{1}{2} m [(\ell\dot\theta\sin\theta)^2 + (\dot y - \ell\dot\theta\cos\theta)^2]$

$T_A = \frac{1}{2} m [(\ell\dot\theta)^2\sin^2\theta + \dot y^2 + (\ell\dot\theta)^2\cos^2\theta$

$- 2\dot y \, \ell\dot\theta\cos\theta)$

$T_c = \frac{1}{2} m [(\ell\dot\theta)^2\sin^2\theta + \dot y^2 + (\ell\dot\theta)^2\cos^2\theta$

$+ 2\dot y \, \ell\dot\theta\cos\theta]$

donc : $T = \frac{1}{2} m [2(\ell\dot\theta)^2 + 2\dot y^2]$

$T = m((\ell\dot\theta)^2 + \dot y^2)$

b- l'énergie potentielle

$U = U_{K_A} + U_{K_B} + U_{m_A} + U_{m_c}$

$U_{m_A} = mg\,y_A + c^{te} = mg(y - \ell\sin\theta) + c^{te}$

$U_{m_c} = mg\,y_c + c^{te} = mg(y + \ell\sin\theta) + c^{te}$

$U_{K_A} = \frac{1}{2} K (y_A + d_A)^2 = \frac{1}{2} K (y - \ell\sin\theta + d_A)^2$

$U_{K_B} = \frac{1}{2} K (y_B + d_B)^2 = \frac{1}{2} K (y + d_B)^2$

$U = \frac{1}{2} K (y - \ell\sin\theta + d_A)^2 + \frac{1}{2} K (y + d_B)^2$

$+ 2mg\,y + c^{te}$

Equilibre :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y}(y=0, \theta=0) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(y=0, \theta=0) = 0 \end{cases}$$

- $\frac{\partial U}{\partial y}(y=0, \theta=0) =$

$K(y - \ell\sin\theta + d_A) + K(y + d_B) + 2mg = 0$

$= K d_A + K d_B + 2mg = 0 \quad \ldots (1)$

- $\frac{\partial U}{\partial \theta}(y=0, \theta=0) =$

$-K(\ell\cos\theta)(y - \ell\sin\theta + d_A) = 0$

$= -K\ell d_A = 0 \quad \ldots (2)$

donc : $d_A = 0$

$d_B = -\frac{2mg}{K}$

- le ressort A ne se déforme pas
- le ressort B se comprime de $\frac{2mg}{K}$

$U = \frac{1}{2} K [(y - \ell\sin\theta)^2 + 2y\,\ell\sin\theta]$

$+ \frac{1}{2}(K(y^2 + d_B^2 + 2d_B y)) + 2mg\,y + c^{te}$

$= Ky^2 + \frac{1}{2} K (\ell\sin\theta)^2 - Ky\,\ell\sin\theta$

$+ (K d_B + 2mg) y + c^{te}$

$U = Ky^2 + \frac{1}{2} K (\ell\sin\theta)^2 - Ky\ell\sin\theta + c^{te}$

c- L'expression de Lagrangien

$z = \ell\theta \; ; \; \sin\theta \simeq \theta$

$U = Ky^2 + \frac{1}{2} K (\ell\theta)^2 - Ky(\ell\theta) + c^{te}$

$U = Ky^2 + \frac{1}{2} K z^2 - Ky\,z + c^{te}$

$T = m[(\ell\dot\theta)^2 + \dot y^2] = m(\dot z^2 + \dot y^2)$

$L = T - U$

$L = m(\dot z^2 + \dot y^2) - Ky^2 - \frac{1}{2} K z^2 + Kyz + c^{te}$

$L = a\dot x^2 + b\dot y^2 + c\dot z^2 + ex^2 + fy^2 + gz^2$

$+ hxy + Ixz + Fyz$

est une équation non de termes d'ordre ≥ 3

2°) a- les pulsations propres en fonction de ω_0 / $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m\ddot y + 2Ky - Kz = 0 \\ 2m\ddot z + Kz - Ky = 0 \end{cases}$$

On suppose y et z sinusoïdales

Notation complexe.

$y = A\cos(\omega t + \varphi_A) = A\exp(j\omega t + \varphi_A)$

$z = B\cos(\omega t + \varphi_B) = B\exp(j\omega t + \varphi_B)$

$\dot{y} = j\omega y \quad ; \quad \dot{z} = j\omega z$

$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad ; \quad \ddot{z} = -\omega^2 z$

$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} + \omega_0^2 y - \frac{\omega_0^2}{2} z = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\omega_0^2}{2} z - \frac{\omega_0^2}{2} y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 y + \omega_0^2 y - \frac{\omega_0^2}{2} z = 0 \\ -\omega^2 z + \frac{\omega_0^2}{2} z - \frac{\omega_0^2}{2} y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\, y - \frac{\omega_0^2}{2} z = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} y + (\frac{\omega_0^2}{2} - \omega^2)\, z = 0 \end{cases}$

admet une solution $(y, z) \neq (0, 0)$

Si det $= 0$

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & \frac{\omega_0^2}{2} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)(\frac{\omega_0^2}{2} - \omega^2) - (\frac{\omega_0^2}{2})^2 = 0$

$(\omega^2)^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2 \omega^2 + \frac{\omega_0^4}{4} = 0$

$\Delta = \frac{9}{4}\omega_0^4 - \frac{4\omega_0^4}{4} = \frac{5}{4}\omega_0^4 = (\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0^2)^2$

$\omega_1^2 = (\frac{3+\sqrt{5}}{4})\,\omega_0^2 \quad , \quad \omega_2^2 = (\frac{3-\sqrt{5}}{4})\,\omega_0^2$

Si $\omega = \omega_1 \Rightarrow y = y_1$ et $z = z_1$

$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_1^2)\, y_1 - \frac{\omega_0^2}{2} z_1 = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} y_1 + (\frac{\omega_0^2}{2} - \omega_1^2)\, z_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\omega_0^2)\, y_1 - \frac{\omega_0^2}{2} z_1 = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} y_1 + \left[\frac{\omega_0^2}{2} - (\frac{3+\sqrt{5}}{4})\,\omega_0^2\right] z_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\omega_0^2)\, y_1 - \frac{\omega_0^2}{2} z_1 = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} y_1 + \left[\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\omega_0^2\right] z_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{4} y_1 - \frac{1}{2} z_1 = 0 \\ -\frac{1}{2} y_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4} z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y_1 \\ z_1 = -\frac{1}{2}\frac{4}{1+\sqrt{5}} y_1 \end{cases}$

$y_1 = A_1 \exp(j\omega_1 t + \varphi_1)$

$z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1 \exp(j\omega_1 t + \varphi_1)$

Si $\omega = \omega_2 \Rightarrow y = y_2$ et $z = z_2$

$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_2^2)\, y_2 - \frac{\omega_0^2}{2} z_2 = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} y_2 + (\frac{\omega_0^2}{2} - \omega_2^2)\, z_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - (\frac{3-\sqrt{5}}{4})\,\omega_0^2)\, y_2 - \frac{\omega_0^2}{2} z_2 = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} y_2 + \left[\frac{\omega_0^2}{2} - (\frac{3-\sqrt{5}}{4})\,\omega_0^2\right] z_2 = 0 \end{cases}$

- On considère le dispositif suivant où les tiges de masses négligeables sont solidaires. A l'équilibre les masses m_1 et m_3 sont sur la même horizontale.
- On suppose que les oscillations sont de faible amplitude.

1°/ Déterminer l'énergie cinétique et potentielle.

2°/ Déterminer à partir de l'énergie potentielle la condition d'équilibre du système puis simplifier l'expression de l'énergie potentielle.

3°/ A quelle(s) condition(s) les oscillations sont-elles possibles?

4°/ calculer la valeur de la pulsation propre du système.

1°/ $T = T_1 + T_2 + T_3$

$= \frac{1}{2}(J_1 + J_2 + J_3)\dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2)\dot{\theta}^2$

$U = U_K + U_{m_1} + U_{m_2} + U_{m_3}$

$U_K = \frac{1}{2} K y^2 = \frac{1}{2} K L_3^2 \theta^2$

Une déformation $d\theta$

$U_{m_1} = -m_1 g \int_0^{L_1 \sin(\theta+\theta_0)} dy = -m_1 g L_1 (\theta + \theta_0)$

$U_{m_2} = m_2 g \int_{L_2}^{L_2 \cos(\theta+\theta_0)} dy = -m_2 g L_2 \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$U_{m_3} = m_3 g \int_0^{L_3 \sin(\theta+\theta_0)} dy = m_3 g L_3 (\theta + \theta_0)$

$U = \frac{1}{2} K L_3^2 (\theta+\theta_0)^2 - m_2 g L_2 \frac{(\theta+\theta_0)^2}{2}$

$- m_1 g L_1 (\theta+\theta_0) + m_3 g L_3 (\theta+\theta_0)$

$= \frac{1}{2} K L_3^2 \theta^2 + K L_3^2 \theta\theta_0 - \frac{1}{2} m_2 g L_2 \theta^2$

$- m_2 g L_2 \theta\theta_0 - m_1 g L_1 \theta + m_3 g L_3 \theta$

$= \frac{1}{2}(K L_3^2 - m_2 g L_2)\theta^2$

$+ \theta\left(K L_3^2\theta_0 - m_2 g L_2\theta_0 - (m_1 L_1 - m_3 L_3) g\right) = 0$

cond d'équilibre : $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$

$K L_3^2 \theta_0 = (m_1 L_1 + m_2 L_2 \theta_0 - m_3 L_3) g$

donc : $U = \frac{1}{2} K L_3^2 \theta^2 - \frac{1}{2} m_2 g L_2 \theta^2$

$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2)\dot{\theta}^2$

$- \frac{1}{2}(K L_3^2 - m_2 g L_2)\theta^2$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$= (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2)\ddot{\theta}$

$+ (K L_3^2 - m_2 g L_2)\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{K L_3^2 - m_2 g L_2}{m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2}\theta = 0$

[illegible]

$K L_3^2 - m_2 g L_2 > m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2$

$\omega_0^2 = \frac{K L_3^2 - m_2 g L_2}{m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + m_3 L_3^2}$

Exercice 7

1°/ Les équations différentielles

- $T = T_m + T_m + T_M$

$= \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} M \dot y^2$

- $U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3}$

$= \frac{1}{2} K_1 l^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 (l\theta - y)^2 + \frac{1}{2} K_3 y^2$

On prend $x = l\theta$

$T = \frac{1}{2}\left[2m\dot x^2 + M\dot y^2\right]$

$U = \frac{1}{2}\left[K_1 x^2 + K_2 (x-y)^2 + K_3 y^2\right]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad / \; L = T - U$$

$L = \frac{1}{2}\left[2m\dot x^2 + M\dot y^2\right] - \frac{1}{2}\left[K_1 x^2 + K_2 (x-y)^2 + K_3 y^2\right]$

$$\begin{cases} 2m\ddot x + K_1 x + K_2 (x-y) = 0 \\ M\ddot y + K_3 y + K_2 (y-x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot x + (K_1 + K_2) x - K_2 y = 0 \\ M\ddot y + (K_2 + K_3) y - K_2 y = 0 \end{cases} \quad / \; M = 2m$$

$K_1 = K_2 = K_3 = K$

$$\begin{cases} 2m\ddot x + 2Kx - Ky = 0 \\ 2m\ddot y + 2Ky - Kx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot x + \overbrace{\left(\frac{K}{m}\right)}^{\omega_0^2} x - \frac{K}{2m} y = 0 \\ \ddot y + \frac{K}{m} x - \frac{K}{2m} y = 0 \end{cases}$$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$

2°/ Les pulsations propres

$\ddot x(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot y(t) = -\omega^2 B\cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{cases} -\omega^2 A + \omega_0^2 A - \frac{\omega_0^2}{2} B = 0 \\ -\omega^2 B + \omega_0^2 B - \frac{\omega_0^2}{2} A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A - \frac{\omega_0^2}{2} B = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{2} A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det : (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 = 0$

- $\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{2} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{K}{2m}$
- $\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} = 0 \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{3\omega_0^2}{2} = \frac{3K}{2m}$

Les vecteurs propres

Le 1er : $\omega^2 = \omega_1^2$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2} & \frac{\omega_0^2}{2} \\ \frac{\omega_0^2}{2} & \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_1 = B_1 \Rightarrow A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le 2nd : $\omega^2 = \omega_2^2$

$-\frac{\omega_0^2}{2} A_2 - \frac{\omega_0^2}{2} B_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -B_2$

$\Rightarrow A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

à $t = 0$: $x(t) = x_0$, $y(t) = 0$

$\dot x(t) = \dot y(t) = 0$

$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$y(t) = A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$x(0) = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$

$y(0) = A_1 \cos\varphi_1 - A_2 \cos\varphi_2$

$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$\dot{y}(t) = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$\dot{x}(t) + \dot{y}(t) \Rightarrow 2A_1 \omega_1 \sin\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$

$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) \Rightarrow 2A_2 \omega_2 \sin\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0$

donc : $\begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 - A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$

$x(t) = \frac{x_0}{2}\left(\cos \frac{\omega_0}{2} t + \cos \frac{3\omega_0}{2} t\right)$

$y(t) = \frac{x_0}{2}\left(\cos \frac{\omega_0}{2} t - \cos \frac{3\omega_0}{2} t\right)$

$\cos(a+b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos(a-b) = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

- $x(t) = \underbrace{x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t}_{\text{amplitude}} \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t$

$x(t) = x_0 \cos\omega_B t \cos\omega_0' t$

- $y(t) = x_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t$

$y(t) = x_0 \sin\omega_B t \sin\omega_0' t$

ω_B : pulsation de battement.

ω_0' : pulsation d'oscillation.

$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_B \Rightarrow \frac{2\pi}{T_B} = \frac{2\pi}{2}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$

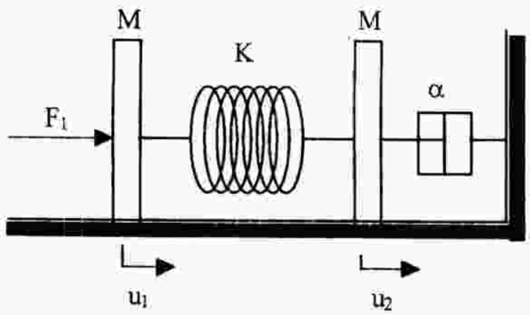
$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \omega_0'$

Phys 3

U.S.T.H.B. Faculté de Physique Phys3 (ST2)

Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

Exercice 1 :



On considère le système à deux degrés de liberté représenté par la figure ci-dessus. Il est constitué par deux masses identiques M reliées par un ressort de raideur K. La seconde masse est reliée à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, tandis que la première masse est soumise à une force sinusoïdale F_1 de pulsation ω. Les deux masses glissent sans frottement sur le plan horizontal. u_1 et u_2 représentent les positions respectives de chacune des masses par rapport à l'équilibre.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées u_1 et u_2.
2. Dans le cas où α est négligeable devant $\left(M\omega-\frac{K}{\omega}\right)$, calculer en régime permanent sinusoïdal l'amplitude complexe $\tilde{V}_2$ de la vitesse de la seconde masse en fonction de l'amplitude de $\tilde{F}_1$.
3. En déduire l'amplitude complexe $\tilde{F}_2$ de la force transmise à l'amortisseur.
4. Calculer le coefficient de transmission $\beta=\left|\tilde{F}_2/\tilde{F}_1\right|$.
5. Si $\omega \gg \sqrt{K/M}$, montrer que le coefficient de transmission β s'écrit sous la forme :

   $\beta=\dfrac{a}{M^2\omega^3}$; donner alors l'expression de a en fonction de α et K.

Exercice 2 :

Le système représenté sur la figure ci-dessus est assujetti à se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal. La tige de longueur 2L est sans masse. Le mouvement du système peut être décrit par les coordonnées généralisées θ et y. θ représente l'angle de rotation de la tige autour du centre de masse G; y est le déplacement du centre de masse par rapport à la position d'équilibre. On considère les mouvements de faible amplitude et on suppose qu'à l'équilibre $\theta=0$ et $y=0$. Au point G on applique une force sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude F_0 et dirigée selon OY.

1. Donner les coordonnées dans le repère XOY, des points A et B ainsi que celle de chacune des masses ponctuelles m.

Phys 3

4. Pour quelle valeur particulière, non nulle, de la pulsation d'excitation ω, le courant I_1 est-il nul ?

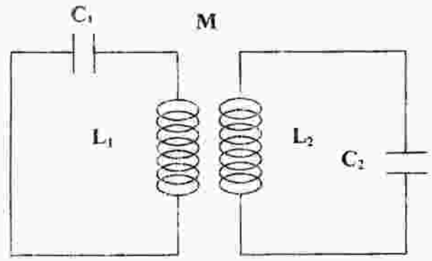


Fig.1

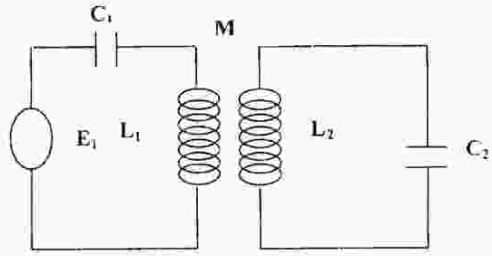


Fig.2

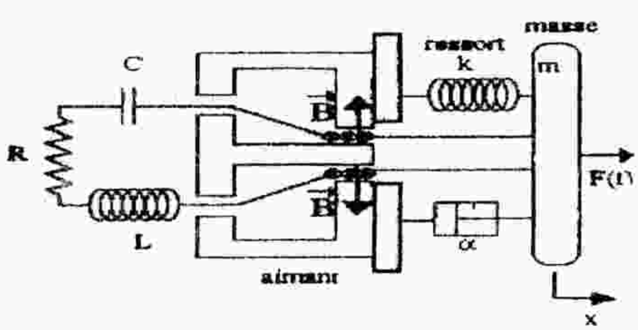
5. On suppose que le générateur "ε_1" fonctionne à la pulsation calculée à la question **4**. Calculer alors la f.e.m. induite par le deuxième circuit dans le premier et expliquer en une phrase, pourquoi il ne peut y avoir d'oscillations forcées dans le premier circuit.

Exercice 6:

Dans le circuit ci-dessous, utilisé en récepteur, la bobine est mobile et est liée à une masse m rappelée à une position d'équilibre par un ressort de constante de raideur k. Ce système est amorti et la constante d'amortissement est α. La masse m est repérée, par rapport à sa position d'équilibre, par la coordonnée x. On applique, sur la tige une force F(t) de type sinusoïdale, d'amplitude F_0 et de pulsation ω.

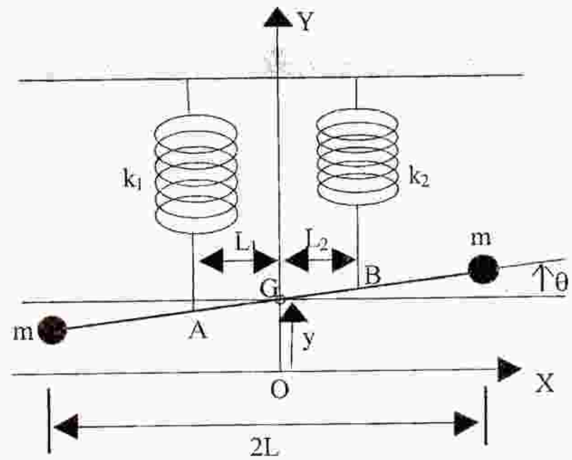
1. Le circuit électrique est-il traversé par un courant lorsque :
   a/ $B = 0$ et $F_0 = 0$
   b/ $B = 0$ et $F_0 \neq 0$
   c/ $B \neq 0$ et $F_0 \neq 0$
   d/ $B \neq 0$ et $F_0 = 0$

2. Etablir les équations integro-différentielles régissant le fonctionnement de ce système. En déduire l'impédance mécanique Z = f(t) / v(t), f(t) étant la forme complexe de F(t) et v(t) celle de x(t).
3. Calculer le rendement du système
4. A quelle pulsation ω_0, ce rendement est-il maximal ? Donner, alors, sa valeur .



8

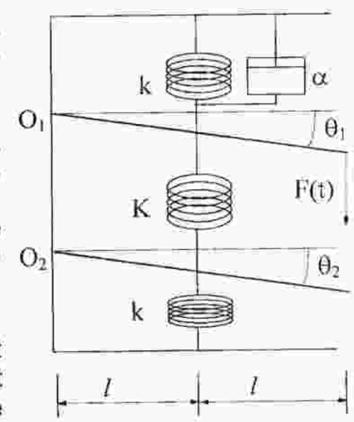
Phys 3



2. Etablir les équations différentielles du mouvement de θ et y.
3. Montrer qu'il existe une valeur de la pulsation ω pour laquelle le centre de masse G reste immobile. Quelle est la nature du mouvement dans ce cas ?
4. On suppose maintenant que $k_1L_1 = k_2L_2$. Calculer, en régime permanent sinusoïdal, les expressions de θ et y en fonction du temps. Quelle est la nature du mouvement dans ce cas ?

Exercice 3 :

Le système ci-contre est constitué de deux tiges rectilignes identiques , homogènes de masse m et de longueur 2*l*. Ces deux tiges sont reliées, en leur milieu, à deux bâtis fixes par deux ressorts identiques de raideur k. De plus elles sont couplées par un ressort de raideur K. A l'équilibre les tiges sont horizontales. Elles oscillent dans un plan vertical, autour de leurs extrémités respectives O_1 et O_2 en effectuant des oscillations de faible amplitude représentées par les angles θ_1 et θ_2 .On pose $y_1 = l\,\theta_1$, $y_2 = l\,\theta_2$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



Les différents frottements supposés faibles sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α. Le système est soumis à une force extérieure sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω. Cette force verticale agit sur l'extrémité de la première tige.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour y_1 et y_2.
2. En utilisant l'analogie force-tension, donner les équations intégro-différentielles qui régissent le système électrique analogue au système mécanique étudié. On précisera soigneusement toutes les grandeurs mécaniques et électriques respectivement analogues. En déduire le schéma électrique analogue.

Phys 5

Exercice 4 :

A/ Sur la figure 1, la masse M est reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k . La barre homogène, de masse m = M/2 et de longueur 2L, est reliée en son milieu à la masse M, par un ressort de raideur k, et pouvant osciller autour d'un point fixe O. Le système effectue des oscillations de faible amplitude dans le plan vertical. On suppose qu'à l'équilibre la barre est horizontale. On pose : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, et on appelle $y_1(t)$ le déplacement de la masse M par

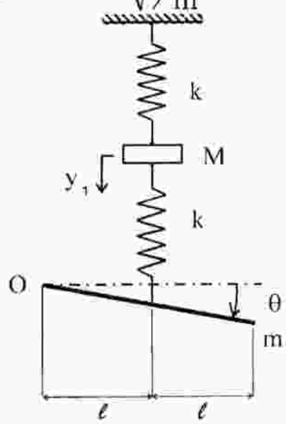


Figure (1)

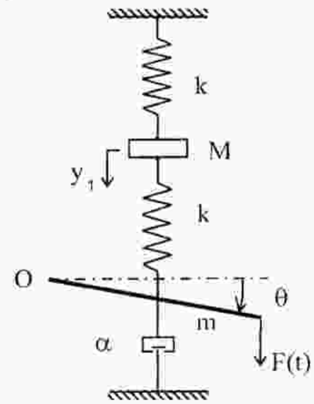


Figure (2)

rapport à la position d'équilibre et $y_2(t) = L\theta(t)$ où $\theta(t)$ est l'écart angulaire de la barre par rapport à l'horizontale.

1. Etablir les équations différentielles en $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
2. Déterminer les pulsations propres du système en fonction de ω_0 .

B/ On veut maintenant étudier les oscillations du système autour de la position d'équilibre lorsqu'il est soumis à une force extérieure sinusoïdale verticale d'amplitude F_0 et de pulsation ω . Les différents frottements, supposés visqueux, sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α (voir figure 2). On suppose que F(t) reste verticale pour de faibles oscillations.

1. Déterminer les équations différentielles en $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
2. En déduire les équations aux vitesses $y_1(t)$ et $y_2(t)$ en fonction de ω_0 .
3. Déterminer les solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour la pulsation $\omega = \omega_0 / \sqrt{2} = \sqrt{k/m}$.
4. Calculer alors la puissance moyenne fournie au système pour cette pulsation.

Exercice 5 :

On considère un système électrique formé de deux circuits LC-série couplés par induction mutuelle de coefficient M (M<0 ou M>0) voir figure 1. .

1. Etablir les équations différentielles qui régissent le système, en utilisant les courants de mailles comme coordonnées généralisées.
2. On cherche des solutions de la forme $i_1 = I_1 \exp(j\omega t)$ et $i_2 = I_2 \exp(j\omega t)$.
   Calculer les pulsations propres du système en fonction des paramètres $\Omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}$, $\Omega_2 = 1/\sqrt{L_2C_2}$, $\alpha_1 = M/L_1$ et $\alpha_2 = M/L_2$. Que représentent Ω_1 et Ω_2 ?
3. On alimente le circuit L_1C_1 avec une tension $\varepsilon_1 = E_1 \exp(j\omega t)$ E_1 étant réel.
   Calculer les amplitudes complexes I_1 et I_2 des courants de maille.
   Calculer l'impédance complexe aux bornes du générateur "ε_1" .

5

Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

Exercice 1

① Equations différentielles

$$T = \frac{1}{2} M \dot{U}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{U}_2^2 = \frac{1}{2} M (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2} K (U_1 - U_2)^2$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} M (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2) - \frac{1}{2} K (U_1 - U_2)^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial U_1} = F_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial U_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{U}_2} \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha \dot{U}_2$$

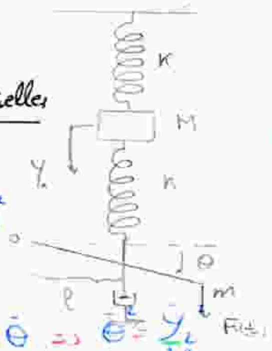
$$\begin{cases} M \ddot{U}_1 + K (U_1 - U_2) = F_1 \\ M \ddot{U}_2 - K (U_1 - U_2) + \alpha \dot{U}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \ddot{U}_1 + K U_1 - K U_2 = F_1 \\ M \ddot{U}_2 + \alpha \dot{U}_2 + K U_2 - K U_1 = 0 \end{cases}$$

② $\overline{V}_2$? α négligeable devant $(M\omega - \frac{K}{\omega})$

Exercice 4

A/ Oscillations libres



①- Equations différentielles

$T = T_m + T_M$

$T_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(m \frac{4L^2}{3} \right) \dot{\theta}^2$

$T_M = \frac{1}{2} M \dot{y}_1^2$

on a : $y_2 = L\theta \Rightarrow \dot{y}_2 = L\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{y}_2^2}{L^2}$

donc : $T = \frac{1}{2}\left[M\dot{y}_1^2 + \frac{4}{3} m \dot{y}_2^2 \right]$

$U = U_{K_1} + U_K + U_m + U_M$ → cond. d'équilibre

$U_{K_1} = \frac{1}{2} K y_1^2$; $U_{K_2} = \frac{1}{2} K (y_1 - y_2)^2$

$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\, U = -\frac{\partial U}{\partial y}$ ~ 0

$U = \frac{1}{2}\left[K y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]$

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left[M\dot{y}_1^2 + \frac{4}{3} m \dot{y}_2^2 \right] - \frac{1}{2}\left[K y_1^2 + K(y_1 - y_2)^2 \right]$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 0$

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + K y_1 + K(y_1 - y_2) = 0 \\ \frac{4}{3} m \ddot{y}_2 + K(y_2 - y_1) = 0 \end{cases} \quad / \; M = 2m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 + \frac{K}{m} y_1 - \frac{K}{2m} y_2 = 0 \\ \frac{4}{3}\ddot{y}_2 + \frac{K}{m} y_1 - \frac{K}{m} y_1 = 0 \end{cases}$$

$y_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$; $y_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$

② Les pulsations propres

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{K}{m}\right) A - \frac{K}{2m} B = 0 \\ -\frac{K}{m} A + \left(-\frac{4}{3}\omega^2 + \frac{K}{m}\right) B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \frac{K}{m} & -\frac{K}{2m} \\ -\frac{K}{m} & -\frac{4}{3}\omega^2 + \frac{K}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \frac{4}{3}\omega^2) - \frac{\omega_0^4}{2} = 0$

$4\omega^4 - 7\omega_0^2\omega^2 + \frac{3}{2}\omega_0^4 = 0$

$(4\omega^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2)(\omega^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2) = 0$

$\omega_1^2 = \frac{3}{8}\omega_0^2$ et $\omega_2^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2$

B) Oscillations forcées amorties

① Equations différentielles

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha \dot{y}^2$

donc : $\frac{2}{3} M\ell^2\ddot{\theta} + K(\ell\theta - y_1) + \alpha\ell^2\dot{\theta} = 2F(t)\ell$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\ddot{y}_1 + K y_1 + K(y_1 - y_2) = 0 \\ \frac{2}{3} M\ddot{y}_2 + K(y_2 - y_1) + \alpha\dot{y}_2 = 2F(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 + \frac{K}{2m} y_1 + \frac{K}{2m}(y_1 - y_2) = 0 \\ \frac{4}{3}\ddot{y}_2 + \frac{K}{m}(y_2 - y_1) + \frac{\alpha}{m}\dot{y}_2 = \frac{2}{m} F(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 - \frac{\omega_0^2}{2} y_2 = 0 \\ \frac{4}{3}\ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{y}_2 = \frac{2}{m} F(t) \end{cases}$$

②- Equations aux vitesses

$$\begin{cases} j\omega \dot{y}_1 + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\dot{y}_1 - \frac{\omega_0^2}{2j\omega}\dot{y}_2 = 0 \\ j\frac{4}{3}\omega\dot{y}_2 + \left(\frac{\omega_0^2}{j\omega} + \frac{\alpha}{m}\right)\dot{y}_2 - \frac{\omega_0^2}{j\omega}\dot{y}_1 = \frac{2}{m}F(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} j\omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\dot{y}_1 + j\frac{\omega_0^2}{2\omega}\dot{y}_2 = 0 \\ \frac{\alpha}{m} + j\omega\left(\frac{4}{3} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\dot{y}_2 + j\frac{\omega_0^2}{\omega}\dot{y}_1 = \frac{2}{m}F(t) \end{cases}$$

L'impédance : $Z_e(\omega) = \frac{F(t)}{\dot{y}_2}$

$\dot{y}_1 = \frac{-j\frac{\omega_0^2}{2\omega}}{j\omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\dot{y}_2$

$Z_e(\omega) = m\left[\frac{\alpha}{m} + j\omega\left(\frac{4}{3} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \frac{\frac{\omega_0^4}{2\omega^2}}{j\omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\right] = \frac{2F(t)}{\dot{y}_2}$

$= m\left[\frac{\alpha}{m} + j\omega\left(\frac{4}{3} - 2\right) + \frac{\omega_0^2}{j\omega(1 - 2)}\right] = \frac{2F(t)}{\dot{y}_2}$

car $\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2}$

$= \alpha - jm\frac{2}{3}\omega + j\frac{\omega_0^2}{\omega} = \frac{2F(t)}{\dot{y}_2}$

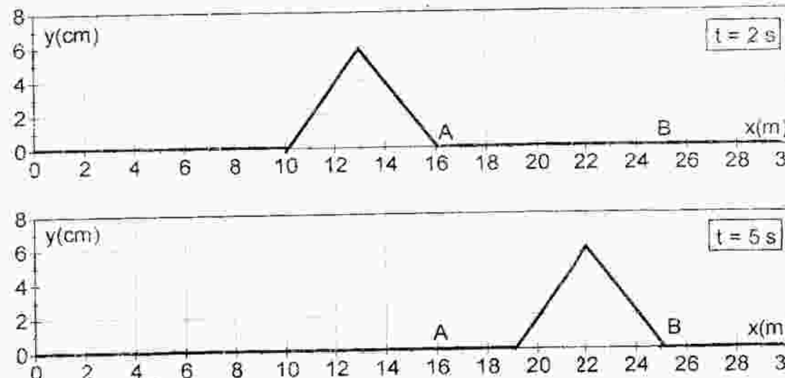
$\alpha + jm\omega\frac{4}{3} = \frac{2F(t)}{\dot{y}_2}$

U.S.T.H.B
Faculté de Physique
Phys3 LMD ST2

Généralités sur les ondes
Cordes Vibrantes

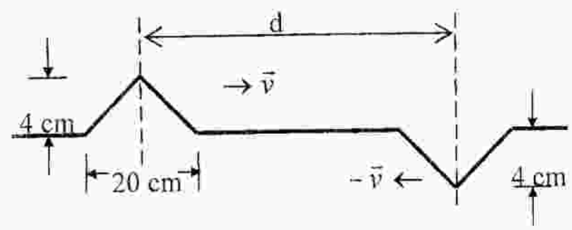
Exercice 1

La figure ci-dessous représente l'aspect d'un ébranlement se propageant le long d'une corde indéfiniment longue. L'aspect de la corde est représenté aux instants $t = 2$ s et $t = 5$ s.



1- Calculer la vitesse de propagation de cet ébranlement. Quelle est la position de l'ébranlement à $t = 0$?
2- A quel instant t_1 le point B aura t - il une amplitude maximale ?
3- A quel instant t_2 le point B revient-il à sa position initiale ?
4- A quel instant t_3 le point M retrouvera-t-il pour la première fois une élongation nulle ?
5- Tracer sur un même graphe les amplitudes $y_A(t)$ et $y_B(t)$ des points A et B de la corde.
6- Représenter la courbe de vitesse $\dot{y}_B(t)$ du point B.

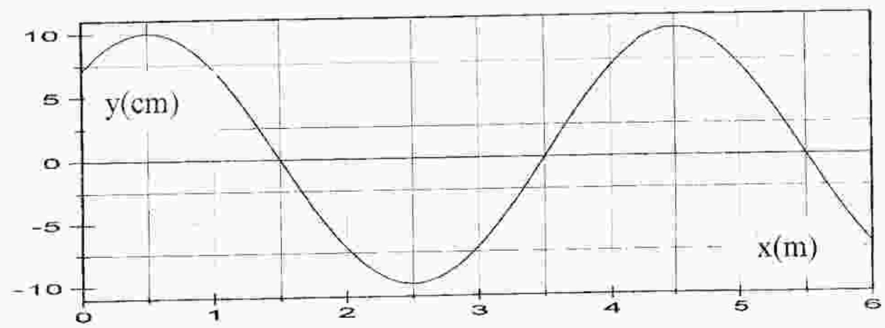
Exercice 2



1- Deux ébranlements de même amplitude mais de signes opposés se dirigent l'un vers l'autre à 20 m/s sur une corde. La figure ci-contre les représente à $t = 0$. Si les deux ébranlements sont distants de $d =$ 60cm, dessinez la configuration de la corde aux instants 10, 15 et 30 ms.
2- Répondre aux mêmes questions si l'ébranlement de droite est du même signe que celui de gauche.

Exercice 3

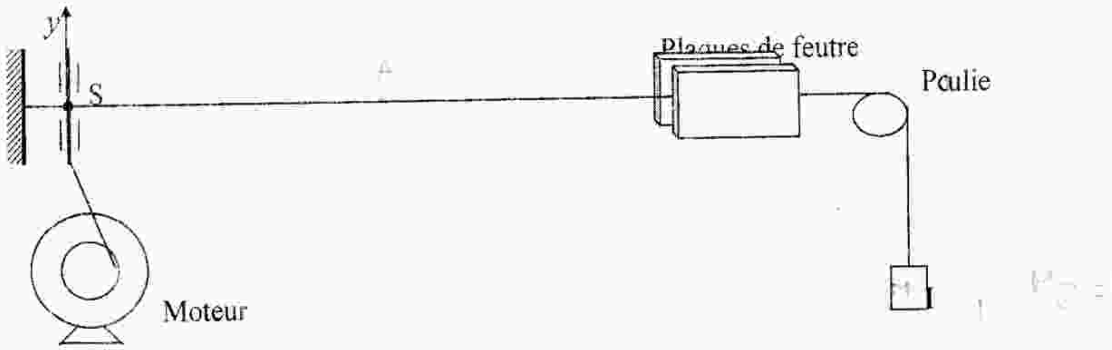
Une onde transversale sinusoïdale, se propage le long d'une corde dans le sens des x négatifs à la vitesse $V = 10$m/s. La figure ci-dessous illustre le déplacement des particules sur la corde en fonction de la position à un instant t.



Calculer :
a) l'amplitude de cette onde,
b) sa longueur d'onde,
c) sa vitesse de phase,
d) sa période,
e) la vitesse maximale d'une particule sur la corde.
f) Quelle est l'équation de cette onde ?

Exercice 4

Le dispositif représenté sur la figure ci-dessous permet de communiquer à l'extrémité S d'une corde tendue horizontalement, une vibration verticale d'équation : $y(t) = 5 \sin\omega t$ (en cm). Le moteur utilisé à cet effet, tourne à la vitesse de 3600 tr/mn.



La vitesse des ondes transversales dans une corde de masse linéique μ subissant une tension F est donnée par : $V = \sqrt{F/\mu}$.

1- La longueur totale de la corde est $L = 5\,\text{m}$ et sa masse est $m = 100$ g. Quelle doit être la masse M du poids tenseur agissant sur le brin vertical de la corde, pour que la longueur d'onde des vibrations transversales de pulsation ω soit $\lambda = 1\,\text{m}$.

2- Juste avant la poulie, la corde est pressée à frottement doux entre deux plaques de feutres, empêchant toute réflexion de se produire.

a) Ecrire l'expression en fonction du temps de l'élongation $y(x,t)$ du point A tel que $SA = x$ à l'instant t

b) Donner les abscisses des points qui vibrent en phase avec S et de ceux qui vibrent en opposition de phase avec S.

c) Représenter sur un même graphe le mouvement de S entre les instants $t = 0$ et $t = 1/30\,\text{s}$ et le mouvement du point A tel que $x = 2{,}75\,\text{m}$.

d) Représenter l'aspect de la corde sur un même graphe aux instants $t = 0$ et $t = 1/600\,\text{s}$, entre $x = 0$ et $x = 4\,\text{m}$.

Exercice 5

Le dispositif proposé dans l'exercice 4 peut être utilisé dans l'expérience de Melde. En effet, le moteur responsable des vibrations de la corde, peut être remplacé par un diapason dont la fréquence de vibrations, entretenues électriquement, est $f = 30$Hz.

1- On règle la masse M de façon qu'il n'y ait pas de nœud de vibration entre les deux extrémités du fil et l'on trouve $M = 720$ g. Déduire de cette expérience la masse $\boldsymbol{m}$ de la corde si la longueur L du fil entre le diapason et la poulie est de 2 mètres.

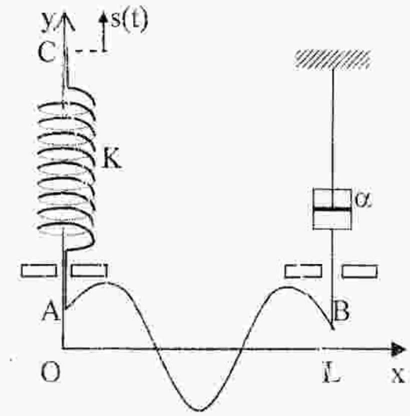
2- Quelles valeurs devra-t-on donner à f et à M pour obtenir entre les extrémités du fil un nœud de vibration, puis deux nœuds? On donne $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

Exercice 6

Une corde AB horizontale, de masse $m = 80\,\text{g}$ et de longueur $L = 2\,\text{m}$, est tendue avec une tension T réglable. La corde est reliée à son extrémité A d'abscisse $x = 0$ par un ressort de raideur K dont l'extrémité C est reliée à un vibreur. Celui-ci communique au ressort un mouvement sinusoïdal transversal d'amplitude $s_0 = 1\,\text{cm}$ et de pulsation $\omega = 100\,\pi$ rad/s :

$$s(t) = s_0\, e^{j\omega t}$$

L'autre extrémité B d'abscisse $x = \mathrm{L}$ de la corde est reliée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\alpha = 0{,}2\ \mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$. Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les mouvements transverses des points A, B et C. Un point M d'abscisse x est repéré à l'instant t par sa petite élongation $y(x,t)$. L'onde se propageant de A vers B est progressive.



1- Pour quelle tension T, exprimée en fonction de μ et α, l'onde qui se propage le long de la corde est progressive. En déduire la vitesse de phase V de l'onde et sa longueur d'onde λ.
2- Montrer que les extrémités A et B de la corde vibrent en phase.
3- Exprimer les forces qui s'exercent au point A et écrire l'équation différentielle du mouvement de ce point.
4- Etablir les expressions de l'amplitude y_0 et de la phase φ de l'élongation $y(0,t)$ du point A. En déduire l'élongation $y(x,t)$ d'un point quelconque de la corde. Dans quel cas la phase φ est nulle ? Que vaut dans ce cas l'amplitude de vibration de chaque point de la corde ?

Exercice 7

Deux cordes 1 et 2, de longueurs L_1 et L_2, sont reliées à la jonction O pour former une longue corde fixée à ses deux extrémités et tendue horizontalement avec une tension T contante (figure a). Les cordes 1 et 2 ont respectivement pour masses linéiques μ_1 et μ_2. On étudie les vibrations transversales sinusoïdales de ce système.

1- Montrer que ce système est équivalent au système représenté sur la figure b).
2- Ecrire les conditions aux limites pour la figure b).
3- En déduire l'équation aux pulsations propres.

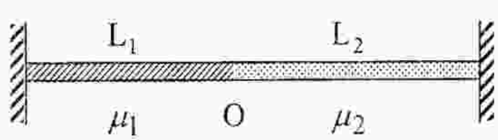


Figure a

$\Leftrightarrow$

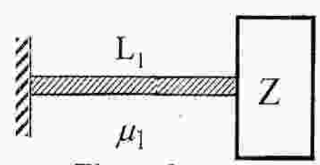
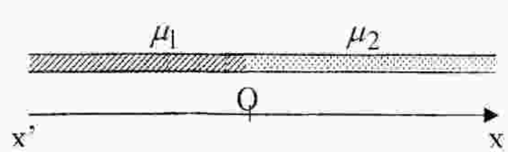


Figure b

Exercice 8

Deux cordes 1 et 2, de masses linéiques μ_1 et μ_2, sont soudées à la jonction O et sont tendues horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension T. On choisit l'abscisse $x = 0$ à la jonction O des deux cordes.

Soit une onde incidente de la forme $y_i(x,t) = a_i \exp j(\omega t - k_1 x)$ et venant de la gauche (région $x < 0$). Cette onde donne naissance, à la jonction O, une onde réfléchie $y_r(x,t)$ dans la région des $x < 0$ et une onde transmise $y_t(x,t)$ dans la région des $x > 0$.



1- Ecrire les expressions des ondes $y_1(x,t)$ pour la région des $x < 0$ et $y_2(x,t)$ pour la région des $x > 0$.
2- Exprimer la tension transversale instantanée :
- en tout point M d'abscisse x de la corde 1 (région $x < 0$),
- en tout point M d'abscisse x de la corde 2 (région $x > 0$).

3- Ecrire les deux équations de continuités au niveau de la jonction O pour le déplacement et la tension transversale.

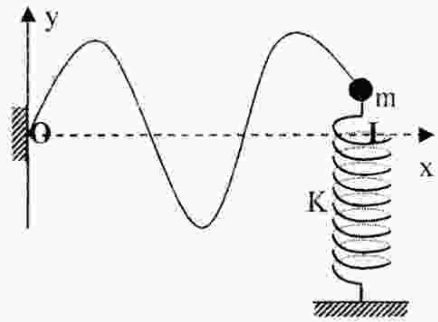
4- En déduire les coefficients de réflexion r et de transmission t en déplacement en fonction de μ_1 et μ_2.

5- <u>Application numérique</u> : calculer r et t lorsqu'un fil d'acier (corde 1) de diamètre $d_1 = 2\,\text{mm}$ est relié à la jonction O à un autre fil d'acier (corde 2) de diamètre $d_2 = 1\,\text{mm}$.

6- Application numérique : mêmes questions, l'onde incidente venant de la droite pour aller vers la jonction O.

Exercice 9

Une corde, de longueur L et de masse linéique μ, est soumise à une tension T constante. Soit V la vitesse de propagation des ondes transversales. La direction de la corde au repos est prise comme axe Ox .



Vibrations libres

la corde est fixée à l'une de ses extrémités $x = 0$; l'autre extrémité, $x = \text{L}$, est attachée à une lame vibrante qu'on assimile à une masse m reliée à un ressort de raideur K. On cherche les oscillations libres stationnaires de la forme : $y(x,t) = A(x)\,e^{j\omega t}$.

1- Ecrire l'équation différentielle satisfaite par l'amplitude $A(x)$.

2- Résoudre l'équation différentielle et exprimer la condition aux limites en $x = 0$.

3- En écrivant la condition aux limites en $x = \text{L}$, montrer que l'équation aux pulsations propres s'écrit :

$$tg\,\frac{\omega \text{L}}{V} = \frac{\dfrac{\text{T}\omega}{V}}{m\omega^2 - K}.$$

4- Que devient cette équation dans le cas où la masse m de la lame est faible. Proposer alors une méthode qui permet de déterminer les trois pulsations possibles les plus basses.

Vibrations forcées

La corde étant toujours attachée en $x = \text{L}$ à la lame vibrante, un vibreur communique maintenant à l'extrémité $x = 0$ un mouvement transversal sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ et d'amplitude a : $y(0,t) = a\,e^{j\omega t}$.

1- Calculer l'impédance mécanique de la corde en $x = \text{L}$. En déduire le coefficient de réflexion r_L en déplacement. Comment se comporte la corde dans ce cas ?

2- Déterminer l'équation $y(x,t)$ du mouvement de la corde en tout point M d'abscisse x, à l'instant t. Conclure .

3- Calculer l'amplitude et les positions des ventres de vibration. Pour quelles longueurs L observe-t-on le phénomène de résonance d'amplitude ?

4- Calculer la composante verticale de la force exercée par la corde sur le vibreur en $x = 0$.

Exercice 10

Une corde de longueur infinie, de masse linéique μ, est tendue sous la tension T. La direction de la corde au repos est parallèle à l'axe $x'Ox$. Une masse m est fixée à l'origine $x=0$ (figure a). On négligera le poids de la corde et celui de la masse m devant les autres forces.

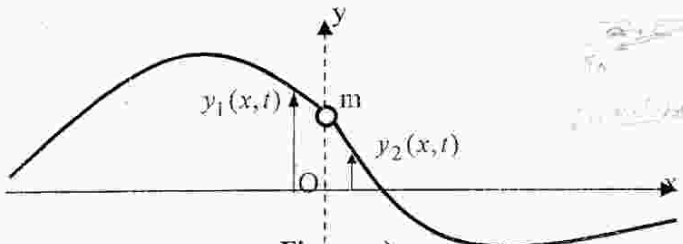


Figure a)

$\Leftrightarrow$

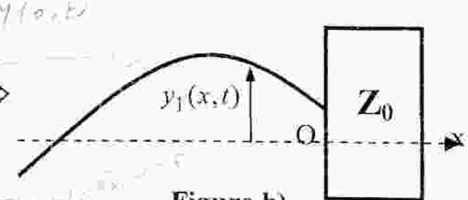


Figure b)

On considère une onde incidente de déplacement de la forme : $y_i(x,t) = a_i \exp j(\omega t - kx)$ venant de la gauche (région $x<0$) et se propageant dans le sens des x croissants. Elle donne naissance en $x=0$ à une onde réfléchie $y_r(x,t)$ et à une onde transmise $y_t(x,t)$. On notera r et t les coefficients complexes de réflexion et de transmission relatifs aux amplitudes des déplacements au point O.

1- Donner les expression complexes de l'onde transversale $y_1(x,t)$ pour la région des $x<0$ et de l'onde transversale $y_2(x,t)$ pour la région des $x>0$.

2- Montrer que la force transversale qui s'exerce sur la masse m s'écrit :

$$F_y(0,t) = T\left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0}\right].$$

3- Montrer que, compte tenu de la condition de continuité du déplacement en $x=0$ et de l'équation du mouvement de la masse m, les coefficients de réflexion r et de transmission t s'écrivent :

$$r = -\frac{jm\omega}{jm\omega + 2Z_c} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_c}{jm\omega + 2Z_c}, \quad \text{avec } Z_c = \sqrt{T\mu}.$$

Quelles sont les limites de ces deux coefficients lorsque $m \to 0$ et $m \to \infty$?

4- Montrer que le système de la figure a) est équivalent au système de la figure b) constitué d'une corde semi-infinie occupant la région des $x<0$ et fermée en O par une impédance Z_0 dont on calculera l'expression en fonction de Z_c, m et ω. Donner le coefficient de réflexion r en fonction de l'impédance réduite $Z_0' = Z_0/Z_c$.

5- Calculer l'impédance mécanique ramenée $Z(x)$ en tout point d'abscisse x ($x<0$), en fonction de Z_c, Z_0', k et x. Que vaut cette impédance pour les positions particulières suivantes :

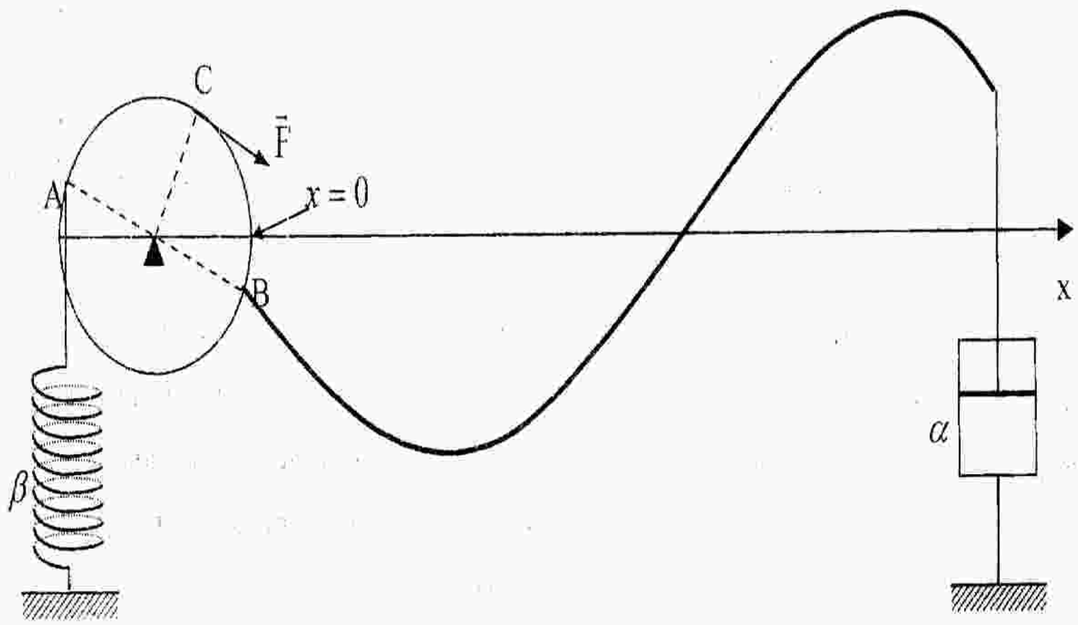
$a)\ x_n = n\frac{\lambda}{2}$ $\qquad b)\ x_n' = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, où λ est la longueur d'onde et $n = 0, -1, -2, \ldots$

6- Ecrire l'onde résultante de déplacement $y_1(x,t)$ sous la forme : $y_1(x,t) = A(x)\cdot y_i(x,t)$. Déterminer les positions et l'amplitude A_{min} des nœuds de déplacement ainsi que les positions et l'amplitude A_{max} des ventres de déplacement. En déduire le taux d'ondes stationnaire défini par le rapport $\rho = \frac{A_{max}}{A_{min}}$.

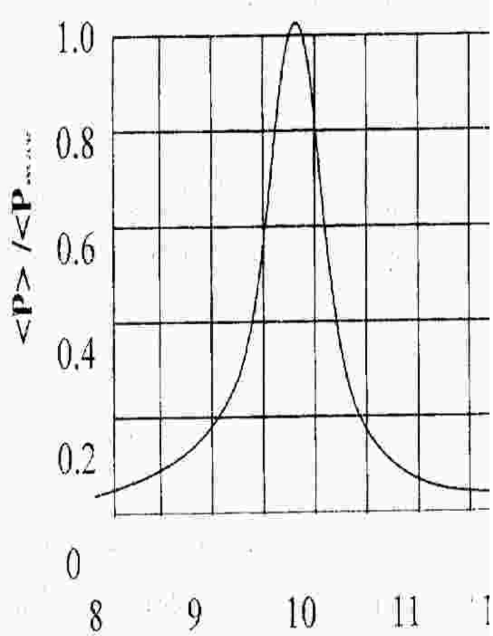
7- À quelle distance se trouve le premier maximum le plus proche de la terminaison $x=0$.

Exercice 11

On considère le système mécanique ci-contre constitué d'une poulie cylindrique de masse M et de rayon R. Les deux points diamétralement opposés A et B sont respectivement reliés à un ressort de raideur β et à une corde tendue, de masse non négligeable et dont la seconde extrémité est reliée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Un force sinusoïdale $F = F_0 \cos\omega t$ est appliquée tangentiellement à la poulie au point C. Lorsque le régime permanent est établie, la corde est le siège d'une onde progressive sinusoïdale.



1- Calculer l'impédance $Z(x)$ en chaque point de la corde en fonction des données du problème.
2- En déduire l'impédance d'entrée de la corde en $x = 0$.
3- En déduire la puissance moyenne fournie par la système oscillant à la corde.
4- La courbe ci-contre représente le rapport $<P>/<P_{max}>$ en fonction de la fréquence. $<P>$ est la puissance moyenne fournie à la corde et $<P_{max}>$ est la valeur maximale de cette puissance. Sachant que la masse de la poulie est $M = 0{,}5\,\text{kg}$ et que la tension du fil est $T = 10\,\text{N}$, calculer :



a) la raideur β du ressort
b) la masse linéique μ de la corde.

Generalités sur les Ondes "Cordes Vibrantes"

Exercice 3

$V = 10 m/s$

a°/ L'amplitude :

à partir du graphe : $A = 10$ cm

b°/ La longueur d'onde :

λ = période spaciale

$\lambda = 4,5 - 0,5 = 4$ cm

c°/ Vitesse de phase :

= vitesse du front d'onde

= vitesse d'un maximum

= vitesse de propagation de l'onde

$V = 10$ m/s

d°/ La période temporelle :

$$\lambda = VT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{V} = \frac{4}{10} = 0,4 S$$

e°/ La vitesse maximale d'une particule sur la corde :

$$Y(t,x) = A\cos\left(\omega t - \frac{x}{V}\right) \text{ (ou sin)}$$

$$= A\cos(\omega t - kx)$$

on a : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$V(x) = \dot{y}(t,x)$$

$$= -A\omega \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right)$$

$$= -V_{max} \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right)$$

$$V_{max} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = 10\frac{2\pi}{0,4} = 50\pi$$

$V_{max} = 157$ cm/s

f°/ L'équation de l'onde :

$$\ldots - \frac{1}{\ldots}\frac{\partial^2 y}{\ldots} = 0$$

Exercice 4

$V = (F/\mu)^{1/2}$, $L = 5$ m, $m = 100$ g, $\lambda = $

1°/ La masse M ?

$y(t) = 5\sin\omega t$

f = nbre de tour / seconde

$$f = \frac{3600}{60} = 60 \text{ Hz}$$

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= \frac{T}{\mu} = \frac{MgL}{M} \\ V &= \frac{\lambda}{T} = \lambda f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^2 f^2 = \frac{MgL}{m}$$

$$M = \frac{\lambda^2 f^2 m}{gL} = 7,34 \text{ Kg}$$

2°/ SA = x

a- L'expression $y(x,t)$?

$$y(\omega,t) = 5\sin\left(\omega t - \frac{x}{V}\right)$$

$$= 5\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right)$$

$$= 5\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T V}\right)$$

$$= 5\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

b- Les abscisses des points qui v

* en phase avec S

$$y(x,t) = S(t)$$

$$5\sin\omega t = 5\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 2n\pi \Rightarrow x_n = n\lambda$$

(0, 1, 2, 3, 4, 5)

* en opposition de phase avec

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\pi \Rightarrow x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

(0,5 / 1,5 / 3,5 / 4,5)

- Representation du M^vt du S et A / $t \in [0, 1/30]^s$, $x = 2,75\,m$

$y_s(t) = 5 \sin \omega t$

$y_{(x,t)} = 5 \sin(\omega t - 2\pi x)$

$\omega = 2\pi f = 2\pi\, 60 = 120\pi$

$y_{(x,t)} = 5 \sin(120\pi t - 2\pi \times 2,75)$

$= 5 \sin(120\pi t - 5,5\pi)$

$5,5\pi = 6\pi - \frac{\pi}{2}$

$y(x,t) = 5 \sin(120\pi t + \frac{\pi}{2})$

$= 5 \cos(120\pi t)$

$v = 60\ m/s \Rightarrow T = 1/60\ s$

$x = 2,75\ m \cdot \frac{\lambda}{\lambda\, m} = \frac{11\lambda}{4}$ / $\lambda = T v$

$\theta = \frac{x}{v} = \frac{11\lambda}{4v} = \frac{11T}{4} = 0,0458\ s$

$\notin [0 ; \frac{1}{30}]$

donc dans cette intervalle le point est au repos (ne bouge pas)

- Representation de l'aspect de la corde $x \in [0, 4]\,m$ $t = 0$ et $t = \frac{1}{60}\,s$

$y(x,t) = 5 \sin(120\pi t - 2\pi x)$

$t = 0 \Rightarrow y(x,0) = 5 \sin(-2\pi x) = 5 \sin(2\pi x)$

$t = \frac{1}{60}\,s \Rightarrow y(x,t) = 5 \sin\left(\frac{120\pi}{60} - 2\pi x\right)$

$= 5 \sin 2\pi(1 - x)$

$= -5 \sin 2\pi(x - 1)$

$= -5 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right)$

$t = \frac{1}{60}$

Exercice 5

$f = 30\,Hz$

1°/ masse m de la corde

$M = 720\,g$, $L = 2\,m$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{30}\,s$

$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t)$

$= 5\left[\sin\left(\omega t - \frac{x}{v}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{x}{v}\right)\right]$

$= 5 \times 2 \sin \omega t \cos \frac{\omega x}{v}$

$= f(t)\, g(x)$ onde stationnaire

il y a un noeud en $x = L$

position des noeuds

x? $y(x,t) = 0, \forall t \Rightarrow \cos \frac{\omega x}{v} = 0$

$\frac{\omega x}{v} = (2n+1)\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi x}{\lambda}$ $\lambda \neq$

$x = x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

1^e noeud $\rightarrow n = 0 \rightarrow x_0 = \frac{\lambda}{4}$

2^e noeud $\rightarrow n = 1 \rightarrow x_1 = \frac{3\lambda}{4}$

$x = L = x_0 = \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{F}{\mu}\right)^{1/2} \frac{T}{4}$

$f = 30\,Hz = \frac{1}{T}$

$L = \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{Mg}{\mu}\right)^{1/2} \frac{T}{4}$

$\mu = \frac{Mg}{\left(\frac{4L}{T}\right)^2} = \frac{m}{L}$

$m = \frac{MgL}{\left(\frac{4L}{T}\right)^2} = \frac{MgT^2}{16L} = \frac{0,72 \times 9,8 \times \left(\frac{1}{30}\right)^2}{16 \times 2}$

$= 0,245\,g$

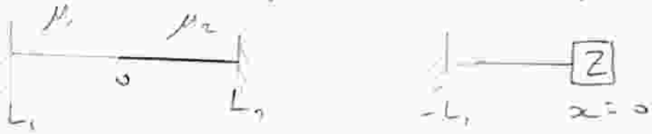
2°/ $L = 2\,m$ on a 1 noeud $\Rightarrow \lambda = L$

position de noeud $x = \frac{\lambda}{2}$

Exercice 7 :

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \, k\, tg(L-x)}{Z_c + jZ_L \, tg\, k(L-x)}$$

L'impédance pour x quelconque.



1/ $$Z(x) = Z_{c_2} \frac{Z_{L_2} + jZ_{c_2} \, tg\, k_2(L_2 x)}{Z_{c_2} + jZ_{L_2} \, tg\, k_2(L_2 - x)}$$

$Z_{L_2} \sim \infty$ limite fixe

$$\Rightarrow Z = Z_{c_2} \frac{1}{j\, tg\, k_2 L_2}$$

2/ Conditions aux limites pour fig(b)

$$Z(x') = Z_{c_1} \frac{Z + jZ_{c_1} k_1 \, tg(L_1 - x')}{Z_c + jZ k_1 \, tg\,(L_1 - x')}$$

$x' = 0 \qquad Z(x') \to \infty$ (pt fixe)

$x = L_1 \qquad Z(x') = Z$

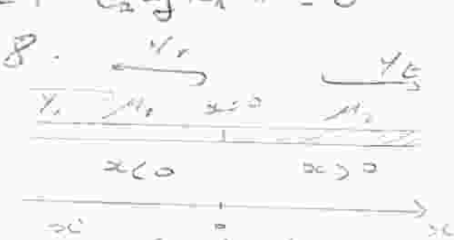
$x' = 0 \qquad Z(x') \to \infty$

$$\Rightarrow Z_{c_1} + jZ \, tg\, k_1 L_1 = 0$$

$$Z_{c_1} + Z_{c_2} \frac{tg\, k_1 L_1}{tg\, k_2 L_2} = 0$$

$$Z_{c_1} tg\, k_2 L_2 + Z_{c_2} tg\, k_1 L_1 = 0$$

Exercice 8.



1/ $y_i(x,t) = a_i \, e^{j(\omega t - k_1 x)}$

$y_r(x,t) = r a_i \, e^{j(\omega t + k_1 x)}$

$y_t(x,t) = t a_i \, e^{j(\omega t - k_2 x)}$

$y_2(x,t) = y_t = t a_i \, e^{j(\omega t - k_2 x)}$

2/ $$F_{y_1}(x,t) = -T_1 \frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}$$

$$F_{y_2}(x,t) = -T_2 \frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}$$

3/ conds de continuité

$x = 0 \qquad y_1(0,t) = y_2(0,t)$

$\Rightarrow a_i(1+r) = a_i t \Rightarrow t = 1 + r$

$F_1(0,t) = F_2(0,t) \Rightarrow t = (1-r)\frac{k_1}{k_2}$

$a_i(-jk_1 + jk_1 r) = -t\, j k_2 a_i$

$k_1(r-1) = -k_2 t \Rightarrow 1 - r = t \frac{k_2}{k_1}$

$$\begin{cases} 1 + r = t & (1) \\ 1 - r = t \dfrac{k_2}{k_1} & (2) \end{cases}$$

4/ ① + ② $\Rightarrow 2 = t\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$

$$2 = t\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1}\right) \Rightarrow t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$r = t - 1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} - 1 = \frac{2k_1 - k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$r = \frac{-k_2 + k_1}{k_1 + k_2} \quad / \quad k = \frac{\omega}{V}$$

$V = \sqrt{T/\mu}$

$$K = \omega\sqrt{\mu/T} = \frac{\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \; ; \; r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

5/ La masse volumique ρ :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{LS} = \frac{\mu}{S} \Rightarrow \mu = \rho S$$

$$t = \frac{2\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}} = \frac{2\, d_1}{d_1 + d_2} = \frac{4}{3}$$

car $S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

$$r = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 9

Vibrations libres

1°/ $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

$\frac{\partial^2 A(x) e^{j\omega t}}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{V^2} A(x) e^{j\omega t}$

avec : $y(x,t) = A(x) e^{j\omega t}$

$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = -k^2 A(x)$

$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + k^2 A(x) = 0$

$A(x) = a \cos(kx - \varphi)$

2°/ $x = 0 \quad A(x) = 0$

$a \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$A(x) = a \cos(kx - \frac{\pi}{2})$

$A(x) = -a \sin kx$

d'où $y(x,t) = -a \sin kx \, e^{j\omega t}$

3°/ $\Sigma F = m\gamma$

$-T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - Ky = m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

$-T a k \cos kx \, e^{j\omega t} + K a \sin kx \, e^{j\omega t} = m\omega^2 a \sin kx \, e^{j\omega t}$

$-Tk \cos kx = (-m\omega^2 + K) \sin kx$

$-Tk = (-m\omega^2 + K) \operatorname{tg} kx$

$\operatorname{tg} kx = \frac{-Tk}{-m\omega^2 + K} = \frac{Tk}{m\omega^2 - K}$

$x = L \quad \operatorname{tg} kL = \frac{Tk}{m\omega^2 - K}$

$\operatorname{tg} \frac{\omega}{V} L = \frac{T \frac{\omega}{V}}{m\omega^2 - K} \Rightarrow \operatorname{Tg}(\frac{L}{V}\omega) = \frac{\frac{T}{V}\omega}{m\omega^2 - K}$

$\operatorname{tg} \frac{\omega L}{V} = \frac{T\omega/V}{m\omega^2 - K} = -\frac{T}{VKL}\omega L$

$\theta = \frac{\omega L}{V} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = -\frac{T}{KL}\theta$ → pente

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad \theta_1 = \frac{\omega_1 L}{V}, \quad \theta_2 = \frac{\omega_2 L}{V}$

$\theta_3 = \frac{\omega_3 L}{V}$

Equation d'une droite de pente négative $-\frac{T}{KL}$

Vibrations forcées

1°/ $-T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - K y(x,t) = m\ddot{y}(x,t) = m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

$Z(x) = \frac{T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}} = \frac{Ky - m\ddot{y}}{\dot{y}}$

$= \frac{\frac{K}{j\omega}\dot{y} + j m\omega \dot{y}}{\dot{y}} = j\omega m - \frac{K}{j\omega}$

$Z(L) = j m\omega - j\frac{K}{\omega}$; $Z(L) = jm\omega(1 - \frac{K}{m\omega^2})$

pour $\omega^2 = \frac{K}{L} \Rightarrow Z(L) = 0$

$r = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_c} = 1$ reflexion totale sans changement de signe

2°/ $y(x,t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$

conds aux limite

- $x = 0$. $y(0,t) = S_0 e^{j\omega t}$
- $x = L \Rightarrow Z_L = 0 \Rightarrow \frac{B}{A} = 1 \Rightarrow B = A$

$S_0 e^{j\omega t} = (A + B) e^{j\omega t}$

$S_0 = A + B \qquad B = A e^{-2jkL}$

$Z(x) = -T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} / \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

$= \frac{Tjk(Ae^{-jkx} - Be^{jkx}) e^{j\omega t}}{j\omega(Ae^{-jkx} + Be^{jkx}) e^{j\omega t}}$

$Z_L = Z_c \frac{Ae^{-jkL} - Be^{jkL}}{Ae^{-jkL} + Be^{jkL}}$

$= Z_c \frac{A(e^{-jkL} - re^{jkL})}{A(e^{-jkL} + re^{-jkL})}$

$$Z_L = \frac{1 - r\, e^{2jkL}}{1 + r\, e^{2jkL}}$$

$$Z_L = 0 \Rightarrow 1 - r\, e^{2jkL} = 0$$

$$\Rightarrow r = e^{-2jkL}$$

$$B = A\, e^{-2jkL} \Rightarrow \frac{B}{A} = e^{-2jkL}$$

$$S_0 = A + A\, e^{-2jkL} = A(1 + e^{-2jkL})$$

$$A = \frac{S_0}{1 + e^{-2jkL}} \ ; \ B = \frac{S_0\, e^{-2jkL}}{1 + e^{-2jkL}}$$

$$y(x,t) = S_0 \frac{(e^{-jkx} + e^{-2jkx} \cdot e^{jkx})\, e^{jkL}}{(1 + e^{-2jkL})\, e^{jkL}}$$

$$= S_0 \frac{e^{jk(L-x)} + e^{-jk(L-x)}}{e^{jkL} + e^{-jkL}}\, e^{j\omega t}$$

$$= S_0 \frac{\cos k(L-x)}{\cos kL}\, e^{j\omega t}$$

$$y(x,t) = A(x)\, e^{j\omega t}$$

l'onde est stationnaire

pour extremité fix → masse Très grande.

$$Z_L = jm\omega\left(1 - \frac{K}{m\omega^2}\right)$$

$$r = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L} = \frac{-Z_c - j(m\omega - \frac{K}{\omega})}{Z_c + j(m\omega - \frac{K}{\omega})}$$

$$= \alpha + j\beta$$

il faut chercher le module et l'argument de dephasage /l'onde incidente $r = |r|\, e^{j\theta}$

$$|r| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \ ; \ tg\,\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$y(x,t) = A\, e^{-jkx}\left(1 + \frac{B}{A}\, e^{-2jkx}\right) e^{j\omega t}$$

3/ $y(x,t) = A\, e^{j(\omega t - kx)} + B\, e^{j(\omega t + kx)}$

onde stationnaire

$$A(x)_{max} = S_0 / \cos kL$$

$$\cos k(L-x) = 1$$

$$k(L-x) = n\pi \Rightarrow L - x = \frac{\lambda}{2} n$$

donc $x = L - n\frac{\lambda}{2}$ position des V

Resonnance

$L > \frac{n\lambda}{2} \Rightarrow x > 0$ pour observer le phénomène de resonnance il faut que : $\cos kL = 0$

$$k_n L = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\omega_n}{V} L = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$2\pi f_n \frac{L}{V} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$f_n = \frac{V}{4L}(2n+1)$$

4/ La composante verticale

$$F(0,t) = T \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$y(x,t) = \frac{-S_0 T k \sin k(L-x)}{\cos kL}\, e^{j\omega t}$$

$$F(x,t) = \frac{-K S_0 T\, tg\, k(L-x)}{\cos kL}\, e^{j\omega t}$$

$$x = 0 \Rightarrow F(0,t) = -k S_0 T\, tg\, L\, e^{j\omega t}$$

la force exercé pour la corde en $x = 0$

Exercice 10

1/ $y_1(x,t) = a_1\, e^{j(\omega t - kx)} + r a_1\, e^{j(\omega t + kx)}$

$$y_2(x,t) = a_1 t\, e^{j(\omega t - kx)}$$

$$F(0,t) = T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1$$

$$F(0,t) = T(tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1)$$

$$F(0,t) = T\left(\left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} - \left.\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}\right)$$

conds de continuités :

1/ $y_1(0,t) = y_2(0,t)$

2/ $\Sigma F = m\gamma$

$$F(0,t) = m\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} = m\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2}$$

$$① \Rightarrow 1 + r = t$$

$$m\omega^2 a_1 t e^{j\dots} = T\left(\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right)$$

$$m\omega^2 t = T[(1-r)-t]jk$$

$$1+r = t \Rightarrow t = \frac{2Z_c}{2Z_c + jm\omega}$$

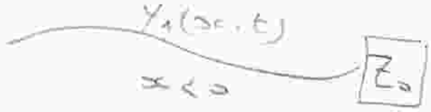
$$= \frac{m\omega^2}{2jkT - \omega^2 m}$$

- $m \to 0 \quad r = 0$
- $m \to \infty \quad r = -1$

pas de reflexion m devient un point fixe reflexion totale avec.

$$= \frac{-jm\omega}{jm\omega + 2Z_c} \quad \text{avec } \frac{KT}{\omega} = \frac{T}{V} = Z_c$$

$$= t - 1 = \frac{2Z_c}{jm\omega + 2Z_c}$$



$$(x) = -T\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} \Big/ \frac{\partial y_1(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{x=0}$$

$$\delta = F(0,t)$$

$$= T\left[\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right]$$

$$m\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2}$$

$$T\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} = m\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} - T\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}$$

$$(x) = \frac{m\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} - T\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}}{\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial t}}$$

$$= \frac{-m\omega^2 y_2(x,t) + jkTy_2(x,t)}{j\omega y_2(x,t)}\Bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{-m\omega^2 + jkT}{j\omega}\Bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{-m\omega^2}{j\omega} + \underbrace{\frac{kT}{\omega}}_{Z_c}$$

$$= jm\omega + Z_c$$

$$r = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} = \frac{Z_c - jm\omega - Z_c}{Z_c + Z_c + jm\omega}$$

$$= \frac{-jm\omega}{2Z_c + jm\omega}$$

$$r = |R|e^{j\varphi}$$

$$r = \frac{-1}{1 + \frac{2Z_c}{jm\omega}} = \frac{-1}{1 - j\frac{2Z_c}{m\omega}}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4Z_c^2}{(m\omega)^2}}} < 1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2Z_c}{m\omega}$$

Si $m \to 0 \Rightarrow r \to 0$

(pas de masse, pas de reflexion

Si $m \to \infty \Rightarrow r \to -1$

(corde fixé en $x=0$)

reflexion totale avec inversio

U.S.T.H.B, Faculté de Physique
PHYS3 LMD ST

ONDES ACOUSTIQUES DANS LES FLUIDES

EXERCICE 1

Soit I l'intensité acoustique d'une onde sonore et I_0 l'intensité de référence prise égale à $10^{-12}\,W/m^2$. On appelle I_{dB} le niveau d'intensité acoustique exprimé en décibel (dB) : $I_{dB}=10\log\frac{I}{I_0}$.

1° Calculer en décibels le seuil de douleur pour l'oreille humaine sachant que son intensité est $10\,W/m^2$.

2° Un des haut-parleurs d'une chaîne haute-fidélité (Hi-Fi) fonctionne et le niveau d'intensité acoustique où se trouve l'auditeur vaut 65 dB. Quelle est l'intensité du son perçu ?

3° Les deux haut-parleurs fonctionnent. Le seuil de douleur est-il atteint ? Quel est le niveau acoustique pour l'auditeur.

EXERCICE 2

1° Chez l'homme, l'amplitude de pression maximale tolérable par l'oreille (seuil de douleur) est $p_m = 28\,\text{Pa}$. Quelle est l'amplitude de déplacement u_m d'une telle onde sonore dans l'air à la fréquence $f = 1000\,\text{Hz}$. Calculer son intensité acoustique.

2° Mêmes questions si l'amplitude de pression minimale tolérable par l'oreille humaine (seuil d'audibilité) est $p_m = 2{,}8\cdot 10^{-5}\,\text{Pa}$ à la même fréquence.

On donne pour l'air : $\rho = 1{,}2\,\text{kg/m}^3$ et $V = 340\,\text{m/s}$.

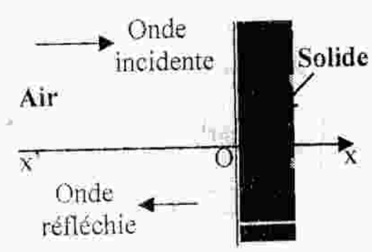
EXERCICE 3

On définit l'impédance acoustique spécifique d'un milieu par le rapport, en notation complexe, de la pression acoustique sur la vitesse des particules :

$$Z = \frac{p}{\dot{u}} \quad \text{(exprimée en Rayls)}$$

1° Calculer Z pour une onde progressive plane sinusoïdale se propageant vers les x croissants. A-N : on donne pour l'air $\rho = 1{,}21\,\text{kg/m}^3$ et $V = 343\,\text{m/s}$.

2° Une onde incidente $u_i(x,t) = u_0\, e^{j(\omega t - kx)}$, se propageant dans l'air, arrive en incidence normale sur la surface d'un solide dont l'impédance acoustique spécifique en x = 0 vaut $Z_0 = \frac{p(0,t)}{\dot{u}(0,t)}$.



a) Calculer, en un point d'abscisse x $(x \le 0)$, l'impédance ramenée $Z(x) = \frac{p(x,t)}{\dot{u}(x,t)}$ en fonction de $\rho V, Z_0$ et $tg(kx)$.

b) Quelle est la valeur de l'impédance $Z(-\lambda/4)$ ramenée au point $x = -\lambda/4$? Etudier les cas particuliers : $Z_0 \to \infty$; $Z_0 = \rho V$; $Z_0 = jX$ (où X est un réel positif) et donner pour chacune de ces impédances $p(-\lambda/4,t)$ et $\dot{u}(-\lambda/4,t)$.

c) Mêmes questions pour $x = -\lambda/2$.

EXERCICE 4

On considère deux milieux matériels semi-infinis, d'impédances caractéristiques $\rho_1 V_1$ et $\rho_2 V_2$, séparés par une interface plane en x = 0. Une onde de pression incidente $p_i(x,t)$ de pulsation ω et d'amplitude p_1 se propage dans le milieu (1) dans le sens des x croissants.

1° Ecrire, en fonction des coefficients de réflexion r et de transmission t en pression, les expressions des pressions réfléchie p_r et transmise p_t. En déduire les expressions des vitesses des particules $\dot{u}_i, \dot{u}_r$ et $\dot{u}_t$:

2° Ecrire les équations de continuité en x = 0. En déduire, en fonction de ρ_1, V_1, ρ_2 et V_2, les expressions de r et t.

3° Donner les intensités acoustiques moyennes I_i, I_r et I_t et définir les facteurs de réflexion R et de transmission T (en intensité) .

4° Application : une onde plane sinusoïdale ultrasonore de fréquence $f = 50\,\text{kHz}$, se propage dans l'eau $(\rho_1 = 1000\,\text{kg/m}^3; V_1 = 1450\,\text{m/s})$ avec une intensité $I_i = 4\,\text{W/m}^2$, et rencontre perpendiculairement la coque en acier d'un navire $(\rho_2 = 7800\,\text{kg/m}^3; V_2 = 5000\,\text{m/s})$.

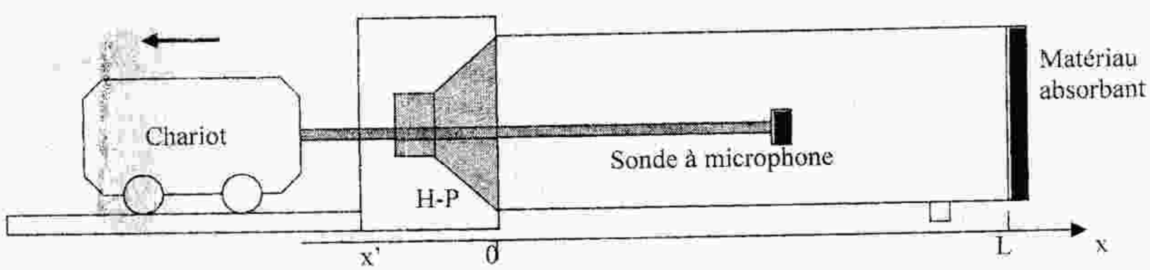
a) Calculer pour l'onde incidente dans l'eau, les amplitudes a_1 du déplacement des particules et p_1 de la pression acoustique.

b) Calculer pour l'onde réfléchie dans l'eau, l'intensité I_r et les amplitudes a'_1 et p'_1.

c) Calculer pour l'onde qui pénètre dans l'acier: I_t, a_2 et p_2.

EXERCICE 5

On considère un tuyau cylindrique de section S contenant un fluide de masse volumique ρ. Il est fermé en x = L par un matériau absorbant d'impédance acoustique complexe $Z_L = X + jY$, où X et Y sont deux nombres réels que l'on déterminera. Une source sonore (haut-parleur) placée en x = 0, émet des ondes acoustiques qui se propagent le long du tuyau à la vitesse V. Une sonde à microphone déplacée le long du tuyau grâce à un chariot, permet de mesurer l'amplitude de la pression en tout point x du tuyau.



On écrit la pression acoustique $p(x,t)$ en un point quelconque d'abscisse x du tuyau sous la forme $p(x,t) = A\,e^{j(\omega t - kx)} + B\,e^{j(\omega t + kx)}$.

1° a) Donner l'expression du coefficient de réflexion r_p en pression au point $x = \text{L}$ en fonction de Z_L et de l'impédance caractéristique Z_C du tuyau.

b) En écrivant r_p sous forme trigonométrique, soit $r_p = R\,e^{j\theta}$, montrer que la pression acoustique peut se mettre sous la forme :

$$p(x,t) = P(x)\, e^{j(\omega t - kx)}$$

où $P(x)$ est une fonction complexe de x à déterminer.

c) Déterminer les positions et l'amplitude P_{min} des minima de pression (nœuds) ainsi que les positions et l'amplitude P_{max} des maxima de pression (ventres).

En déduire le taux d'ondes stationnaires (T.O.S) défini par le rapport $s = \dfrac{P_{max}}{P_{min}}$.

2° En déplaçant la sonde à microphone de la terminaison x = L vers l'origine x = 0, on mesure les valeurs de P_{max} et P_{min} et on repère le minimum (nœud) de pression le plus proche de la terminaison x = L.

a) Sachant que le T.O.S mesuré est $s = 2$, en déduire la valeur de R.

b) Sachant que le premier nœud est à la distance $d = \dfrac{3}{8}\lambda$ de l'extrémité x = L, calculer la valeur de θ.

c) En déduire la valeur de l'impédance terminale Z_L.

On donne : $\rho = 1{,}2\ \text{kg/m}^3$; $V = 340\ \text{m/s}$ et $S = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$.

EXERCICE 6

Un tuyau de longueur semi-infinie et de section S_1 est raccordé en $x = 0$ à un second tuyau de longueur CD = d et de section $S_2 < S_1$, fermé en D par une paroi rigide (figure a). Ces tuyaux contiennent le même fluide de masse volumique ρ dans lequel se propagent les ondes acoustiques à la vitesse V. Les impédances caractéristiques des tuyaux de sections S_1 et S_2 sont respectivement $Z_1 = \rho V/S_1$ et $Z_2 = \rho V/S_2$.

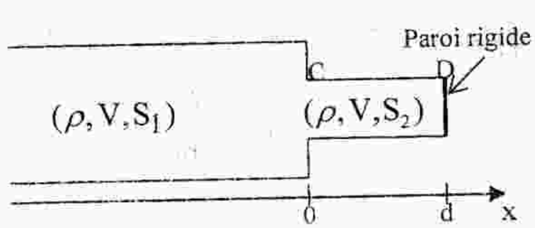


Figure a

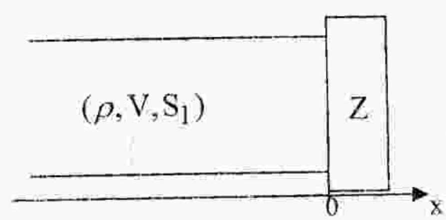


Figure b

I) Dans chacun des trois tuyaux, la pression acoustique s'écrit :

- tuyau semi-infini $(x \le 0)$: $p_1(x,t) = A_1\, e^{j(\omega t - kx)} + B_1\, e^{j(\omega t + kx)}$
- tuyau CD $(0 \le x \le d)$: $p_2(x,t) = A_2\, e^{j(\omega t - kx)} + B_2\, e^{j(\omega t + kx)}$

1° Ecrire les expressions respectives, $\dot{u}_1(x,t)$ et $\dot{u}_2(x,t)$, des vitesses particulaires dans les tuyaux de sections S_1 et S_2.

2° Ecrire les équations de continuité en x = 0 pour la pression acoustique $p(x,t)$ et pour le débit $S\dot{u}(x,t)$. En déduire les deux équations reliant les coefficients A_1, B_1, A_2 et B_2.

3° Ecrire la condition à la limite en $x = d$ pour la vitesse particulaire. En déduire une relation entre les coefficients A_2 et B_2.

4° En déduire le coefficient de réflexion en pression r = A_1 / B_1.

5° Trouver la condition sur d pour que la pression présente un nœud en $x = 0$.

6° La condition précédente étant satisfaite, déterminer en fonction A_1, l'amplitude de la pression acoustique sur la paroi rigide en $x = d$ dans le cas où $S_1 = 2S_2$.

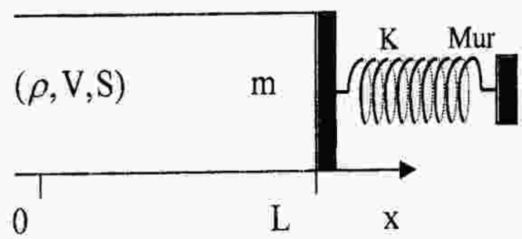
II) 1° Montrer qu'en régime de vibration harmonique, le système de la figure (a) peut être considéré comme un tuyau de longueur semi-infinie et de section S_1, fermé par une impédance Z (figure b) que l'on calculera.

2° Donner, en fonction de Z et Z_1, le coefficient de réflexion r en pression. Retrouver le résultat de la question I) 4°.

3° Trouver la condition sur d pour que l'impédance Z soit nulle. Retrouver le résultat de la question I) 5°. En déduire dans ce cas le coefficient de réflexion r.

EXERCICE 7

Un tuyau cylindrique de section S contient de l'air de masse volumique ρ. La vitesse de propagation des ondes acoustiques est V. Ce tuyau semi-infini est terminé à son extrémité, située en x = L, par un systèm masse-ressort représenté sur la figure ci-contre. La masse m peut glisser sans frottement à l'intérieur du cylindre. La constante de raideur du ressort est K.



Une onde acoustique plane sinusoïdale de pulsation ω d'intensité $I_0 = 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$ est envoyée de $-\infty$ dans le sens des x croissants. On donne : $\rho = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$; $V = 340\ \mathrm{m/s}$.

1° Calculer l'amplitude p_0 de l'onde de pression incidente.

2° Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la masse m. En déduire, pour le régime sinusoïdal, l'impédance acoustique terminale Z_L du tuyau en $x = L$.

3° Rappeler l'expression du coefficient de réflexion r de l'onde de pression en fonction de l'impédance caractéristique Z_C du tuyau et de son impédance terminale Z_L.

Montrer que le coefficient de réflexion r s'écrit sous la forme : $r = \dfrac{jX-1}{jX+1}$ où $j^2 = -1$ et X une fonction réelle de ω et dépend de ω_0 et de Ω définis par : $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ et $\Omega = \dfrac{\rho VS}{m}$.

Déterminer l'expression de X. Préciser la dimension de Ω.

4° Pour $\omega = \omega_0$:

4.a Calculer r

4.b Déterminer l'expression de la pression $p(x,t)$ en tout point du tuyau.

4.c En déduire les positions des maxima et minima d'amplitude de pression. Calculer les valeurs de ces maxima et minima.

4.d Déterminer l'expression de la vitesse de particules $\dot{u}(x,t)$ en tout point du tuyau.

4.e Calculer les amplitudes maximale et minimale de la vitesse de particules.

5° Pour les grandes valeurs de ω ($\omega \gg \omega_0$ et $\omega \gg \Omega$). Répondre aux mêmes questions que 4°.

Ondes acoustiques dans les fluides

Exercice 4

1°/ Les expressions des P_r et P_t, U_i, U_r et U_t

$P_i(x,t) = P_0 e^{j(wt - k_1 x)}$

$P_r(x,t) = P_r e^{j(wt + k_1 x)} = r P_0 e^{j(wt + k_1 x)}$

$P_t(x,t) = P_t e^{j(wt - k_2 x)} = t P_0 e^{j(wt - k_2 x)}$

$U_i(x,t) = \frac{-1}{\rho V^2} \int P_i(x,t) dx = \frac{-1}{\rho V^2} \int P_0 e^{j(wt - k_1 x)} dx$

$U_i(x,t) = \frac{1}{wj\rho V^2 k_1} P_0 e^{j(wt - k_1 x)}$, $k_1 = \frac{w}{V}$

$U_i(x,t) = \frac{1}{\rho V} P_0 e^{j(wt - k_1 x)}$

$U_r(x,t) = -\frac{1}{\rho V^2} \int r P_0 e^{j(wt + k_1 x)} dx$

$U_r(x,t) = -\frac{1}{\rho V} r P_0 e^{j(wt + k_1 x)}$

$U_t(x,t) = -\frac{1}{\rho V^2} \int t P_0 e^{j(wt - k_2 x)} dx$

$U_t(x,t) = \frac{1}{\rho V} t P_0 e^{j(wt - k_2 x)}$

2°/ Les équations de continuité

en $x = 0$

$$\begin{cases} P_1(0,t) = P_2(0,t) \quad \cdots ① \\ S_1 U_1(0,t) = S_2 U_2(0,t) \quad \cdots ② \quad S_1 = S_2 \end{cases}$$

$P_1(x,t) = P_i(x,t) + P_r(x,t)$

$= P_0 e^{j(wt - k_1 x)} + r P_0 e^{j(wt + k_1 x)}$

$P_2(x,t) = P_t(x,t) = t P_0 e^{j(wt - k_2 x)}$

① $\Rightarrow$ $1 + r = t$ *

$U_1(x,t) = \frac{1}{\rho_1 V_1} P_0 \left(e^{j(wt - k_1 x)} - r e^{j(wt + k_1 x)} \right)$

$U_2(x,t) = \frac{1}{\rho_2 V_2} t P_0 e^{j(wt - k_2 x)}$

② $\Rightarrow$ $1 - r = t \, (\rho_1 V_1 / \rho_2 V_2)$ **

t et r ?

$2 = t \left(1 + \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}\right) \Rightarrow t = \frac{2\rho_2 V_2}{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1}$

$1 + r = \frac{2\rho_2 V_2}{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1} \Rightarrow r = \frac{\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1}{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1}$

3°/ I_i ; I_r et I_t ?

$I_i = \frac{P_i^2}{2\rho V} = \frac{P_0^2}{2\rho_1 V_1}$

$I_r = \frac{P_r^2}{2\rho V} = \frac{r^2 P_0^2}{2\rho_1 V_1}$

$I_t = \frac{P_t^2}{2\rho V} = \frac{t^2 P_0^2}{2\rho_2 V_2}$

facteurs de réflexion R et T

$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \frac{(\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1)^2}{(\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1)^2}$

$T = \frac{I_t}{I_i} = t^2 = \frac{4 \rho_2^2 V_2^2}{(\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1)^2}$

Exercice 5

1°/ $P(x,t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$

ⓐ - Γ_p ? en fonction de Z_L et Z_c

$P(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -\rho V^2 \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$

$U(x,t) = -\frac{1}{\rho V^2}\int P(x,t)\,dx$

$= -\frac{1}{\rho V^2}\left[\frac{A}{-jk} e^{j(\omega t - kx)} + \frac{B}{jk} e^{j(\omega t + kx)}\right]$

$= \frac{1}{j\rho V^2 \frac{\omega}{V}}\left[A e^{j(\omega t - kx)} - B e^{j(\omega t + kx)}\right]$

$\dot U(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$

$= \frac{j\omega}{j\rho V\omega}\left[A e^{j(\omega t - kx)} - B e^{j(\omega t + kx)}\right]$

$r_p = \frac{B}{A}$; $Z(x) = \frac{P(x,t)}{S\,\dot U(x,t)}$

$Z(x) = \left(\frac{\rho V}{S}\right) \frac{A e^{-jkx} + B e^{jkx}}{A e^{-jkx} - B e^{jkx}}$

$Z_L = Z_c \left(\frac{A e^{-jkL} + B e^{jkL}}{A e^{-jkL} - B e^{jkL}}\right)$

$= Z_c \left(\frac{1 + r_p e^{2jkL}}{1 - r_p e^{2jkL}}\right)$

$\frac{Z_L}{Z_c} = Z_T = \frac{1 + r_p e^{2jkL}}{1 - r_p e^{2jkL}}$

$1 + r_p e^{2jkL} = Z_T - Z_T r_p e^{2jkL}$

$r_p (1 + Z_T) e^{2jkL} = Z_T - 1$

$r_p = \frac{Z_T - 1}{Z_T + 1} e^{-2jkL} \Rightarrow r_p = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{-2jkL}$

ⓑ $P(x,t) = P(x)\, e^{j(\omega t - kx)}$

$\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = A + jB$; $r_p = R e^{j\theta}$

$R = A^2 + B^2$; $\operatorname{tg}\theta = \frac{B}{A}$

$P(x,t) = A\left(e^{-jkx} + \frac{B}{A} e^{jkx}\right) e^{j\omega t}$

$= A e^{-jkx}\left(1 + \frac{B}{A} e^{2jkx}\right) e^{j\omega t}$

$= A e^{j(\omega t - kx)}\left(1 + r_p e^{2jkx}\right)$

$= A e^{j(\omega t - kx)}\left(1 + R e^{j\theta - 2jkL} e^{2jkx}\right)$

$= A e^{j(\omega t - kx)}\left(1 + R e^{j\theta} e^{2jk(x-L)}\right)$

$= e^{j(\omega t - kx)}\left(1 + R e^{j(\theta + 2k(x-L))}\right)$

donc : $P(x,t) = P(x)\, e^{j(\omega t - kx)}$

d'où : $P(x) = A\left[1 + R e^{j(\theta + 2k(x-L))}\right]$

ⓒ P_{min} ; P_{max}

P_{min} si $e^{j(\theta + 2k(x-L))} = -1$

$P_{min} \Rightarrow \theta + 2k(x-L) = (2n+1)\pi$

$x_n = L - \frac{\lambda\theta}{4\pi} - (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

P_{max} si $e^{j(\theta + 2k(x-L))} = +1$

$P_{max} \Rightarrow \theta + 2k(x-L) = 2n\pi$

$x_n = L - \frac{\lambda\theta}{4\pi} - (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

$T.O.S = \frac{P_{max}}{P_{min}} = S$

$P_{min} = e^{j(\omega t - kx)}(1 - R)A$

$P_{max} = e^{j(\omega t - kx)}(1 + R)A$

donc $S = \frac{1+R}{1-R}$

2°/ ⓐ : $S = 2$. R ?

$1 + R = 2 - 2R \Rightarrow R = \frac{1}{3}$

ⓑ. θ ? $d = \frac{3}{8}\lambda$

$L - x_0 = d$

$L - L + \frac{\lambda\theta}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{8}\lambda \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

ⓒ Z_L ? $Z = X + jY$

$R = \left|\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}\right|$

$r = \alpha + jB$; $\operatorname{tg}\theta = \frac{B}{\alpha}$

Rinsi... $Z_L \to \infty$

I/

① $\dot{u}_1(x,t)$; $\dot{u}_2(x,t)$?

$$P_1(x,t) = A_1 e^{j(wt-kx)} + B_1 e^{j(wt+kx)}$$

$$P_2(x,t) = A_2 e^{j(wt-kx)} + B_2 e^{j(wt+kx)}$$

$$P(x,t) = -\rho V^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\dot{u}(x,t) = -\frac{1}{\rho V}\int P(x,t)\,dt$$

$$\dot{u}_1(x,t) = \frac{1}{\rho V}\left(A_1 e^{j(wt-kx)} - B_1 e^{j(wt+kx)}\right)$$

$$\dot{u}_2(x,t) = \frac{1}{\rho V}\left(A_2 e^{j(wt-kx)} - B_2 e^{j(wt+kx)}\right)$$

② $P_1(0,t) = P_2(0,t)$

$S_1 \dot{u}_1(0,t) = S_2 \dot{u}_2(0,t)$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ S_1(A_1 - B_1) = S_2(A_2 - B_2) \end{cases}$$

③ conds aux limite $x = d$

$$\dot{u}_2(d,t) = 0 = \frac{1}{\rho V}\left(A_2 e^{-jkd} - B_2 e^{jkd}\right)$$

$$A_2 e^{-jkd} = B_2 e^{jkd} \Rightarrow B_2 = A_2 e^{-2jkd}$$

④ Coefficient de reflexion

$$r = \frac{B_1}{A_1}$$

$$A_1(1+r) = A_2 + A_2 e^{-2jkd}$$

$$A_1(1-r) = \frac{S_2}{S_1} A_2 (1 - e^{-2jkd})$$

$$\frac{1+r}{1-r} = \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{1 + e^{-2jkd}}{1 - e^{-2jkd}}\right)$$

$$= \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{e^{jkd} + e^{-jkd}}{e^{jkd} - e^{-jkd}}\right)$$

$$= \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{\cos kd}{j \sin kd}\right)$$

$$\frac{1-r}{1+r} = j\frac{S_2}{S_1} \operatorname{Tg} kd$$

$$r = \frac{1 - j(S_2/S_1)\operatorname{Tg} kd}{1 + j(S_2/S_1)\operatorname{Tg} kd}$$

⑤ $P_2(0,t) = 0 \quad \forall t$

$$P_1(x,t) = A_1 e^{jwt}\left(e^{-jkx} + r e^{jkx}\right)$$

$$P_1(0,t) = A_1 e^{jwt}(1+r) = 0$$

$A_1(1+r) = 0$, $1 + r = 0 \Rightarrow r = -1$

donc $\operatorname{Tg} kd = \infty \Rightarrow kd = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$d = (2n+1)\frac{\pi}{2k}$$

⑥ $S_1 = 2S_2$

$$P_2(d,t) = A_2\left(e^{-jkd} - e^{jkd}\right)e^{jwt}$$

$$= 2j A_2 \sin kd \, e^{jwt}$$

$\sin kd = \sin (2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$

$$P_2(d,t) = 2j A_2 (-1)^n e^{jwt}$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ S_1(A_1 - B_1) = S_2(A_2 - B_2) \end{cases}$$

$r = -1$, $B_2 = -A_2$; $B_1 = -A_1$

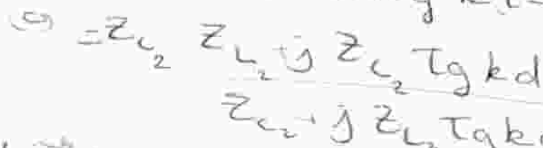
$$2S_1 A_1 = 2S_2 A_2$$

$$A_2 = \frac{S_1}{S_2} A_1$$

$$P_2(d,t) = 2j \frac{S_1}{S_2} A_1 (-1)^n e^{jwt}$$

$$P_2(d,t) = 4j A_1 (-1)^n e^{jwt}$$

II/



① $Z(x) = Z_c \dfrac{Z_L + jZ_c \operatorname{tg} k(L-x)}{Z_c + jZ_L \operatorname{tg} k(L-x)}$

$$Z(0) = Z_{c_2} \frac{Z_{L_2} + jZ_{c_2} \operatorname{Tg} kd}{Z_{c_2} + jZ_{L_2} \operatorname{Tg} kd}$$

$Z_{L_2} \to \infty$

$$Z(0) = Z_{c_2} \frac{1}{j \operatorname{tg} kd}$$

$Z(0) = Z_1\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$

② Le coefficient de reflexion

$$r = \frac{Z_L - Z_{c_1}}{Z_L + Z_{c_1}} = \frac{Z_{(0)} - Z_{c_1}}{Z_{(0)} + Z_{c_1}}$$

$$= \frac{Z_{c_2}/j\,tg\,kd - Z_{c_1}}{Z_{c_2}/j\,tg\,kd + Z_{c_1}}$$

$$= \frac{Z_{c_2} - j Z_{c_1}\,tg\,kd}{Z_{c_1} + j Z_{c_2}\,tg\,kd}$$

$$Z_{c_1} = \frac{\rho V}{S_1} \quad ; \quad Z_{c_2} = \frac{\rho V}{S_2}$$

$$r = \frac{\frac{\rho V}{S_2} - j\frac{\rho V}{S_1}\,tg\,kd}{\frac{\rho V}{S_1} + j\frac{\rho V}{S_2}\,tg\,kd}$$

$$r = \frac{1 - j(S_2/S_1)\,tg\,kd}{1 + j(S_1/S_2)\,tg\,kd}$$

③ condition sur d pour $Z = 0$

$$tg\,kd \to \infty \Rightarrow \frac{\sin kd}{\cos kd} \to \infty$$

$$\cos kd = 0 \Rightarrow kd = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

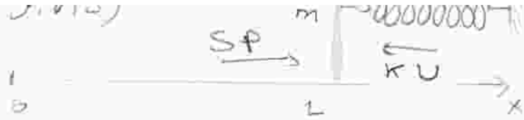
$$d = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$Z = 0 \Rightarrow r = -1$$

Nœud $\Rightarrow P = 0$

Ventre $\Rightarrow V = 0$.

(S, V, ω)



1°/ L'amplitude P_0

on a : $I_0 = \frac{P_0^2}{2\rho V} \Rightarrow P_0^2 = 2\rho V I_0$

$$P_0 = \sqrt{2\rho V I_0} = \sqrt{2 \times 1{,}29 \times 340 \times 10^{-6}} = 0{,}03$$

$P_0 = 0{,}03\ N/m^2$ "Pa"

2°/ $\underline{Z}_L$? "RFD"

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

$$S P(x,t) - K U(x,t) = m \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t}$$

on a : $\begin{cases} U(x,t) = \frac{\dot{U}(x,t)}{j\omega} \\ \ddot{U}(x,t) = j\omega\,\dot{U}(x,t) \end{cases}$

donc $S P(x,t) - \frac{K}{j\omega}\dot{U}(x,t) = m j\omega\,\dot{U}(x,t)$

$$\Leftrightarrow S\,P(x,t) = \left(\frac{K}{j\omega} + m j\omega\right)\dot{U}(x,t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S\,P(x,t)}{\dot{U}(x,t)} = \frac{K}{j\omega} + m j\omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x,t)}{S\,\dot{U}(x,t)} = \frac{j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)}{S^2} = Z_L$$

car $Z_{(x=L)} = \frac{P(x,t)}{S\,\dot{U}(x,t)}$

$$Z_L = \frac{1}{S^2}\,j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)$$

3°) $r_p = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$ / $Z_c = \frac{\rho V}{S}$

$$r = \frac{j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)\frac{1}{S^2} - \frac{\rho V}{S}}{j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)\frac{1}{S^2} + \frac{\rho V}{S}}$$

$$= \frac{j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right) - \rho V S}{j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right) + \rho V S}$$

$$r_p = \frac{j\frac{(m\omega - \frac{K}{\omega})}{\rho V S} - 1}{j\frac{(m\omega - \frac{K}{\omega})}{\rho V S} + 1} = \frac{jX - 1}{jX + 1}$$

avec : $X = \frac{m\omega - \frac{K}{\omega}}{\rho V S}$

$$= \omega\left(\frac{m - \frac{K}{\omega^2}}{\rho V S}\right)$$

$$= \omega\left(\frac{1 - \frac{K}{m\omega^2}}{\rho V S/m}\right)$$

$$X = \omega\left(\frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\Omega}\right)$$

avec : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\Omega = \frac{\rho V S}{m}$

dimension de Ω : même dimension que ω : "rd/s" (pulsation)

4°/ pour $\omega = \omega_0$ $Z_L = 0$

a- Calcul de r. tuyaux ouvert

ou $X = 0 \Rightarrow r = -1$ (reflexion Total avec inversion de signe)

"siège stationnaire"

b- L'expression de la pression

$$P(x,t) = P_{incidente} + P_{reflechie}$$
$$= P_0 e^{j(\omega t - kx)} + r P_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

c- en $x = L$: $P(L,t) = 0$

$$Z_L = \frac{P(x,t)}{S U(x,t)} = 0 \Big|_{x=L} \Rightarrow P_0(e^{-jkL} + r e^{jkL}) = 0$$

$$e^{-jkL} = -r e^{jkL} \Rightarrow r = -e^{-2jkL}$$

$$P(x,t) = P_0\left[e^{-jkx} + r e^{jkx}\right] e^{j\omega t}$$
$$= P_0\left[e^{-jkx} - e^{-2jkL} e^{jkx}\right] e^{j\omega t}$$

$$P(x,t) = P_0\left[e^{jk(L-x)} - e^{-jk(L-x)}\right] \frac{e^{j\omega t}}{e^{jkL}}$$

$$\underbrace{P(x,t) = 2j P_0 \sin k(L-x)}_{\text{Spaciale}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega t - kL)}}_{\text{Temporai}}$$

car : $\sin k(L-x) = \frac{e^{jk(L-x)} - e^{-jk(L-x)}}{2j}$

Noeuds	Ventres
$\sin k(L-x) = 1$	$\sin k(L-x) = 0$
$k(L-x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$	$k(L-x) = n\pi$
$\frac{2\pi}{\lambda}(L-x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{\lambda}(L-x) = n\pi$
$L-x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$	$L-x = \frac{n\lambda}{2}$
$X_{n_{max}} = L-(2n+1)\frac{\lambda}{4}$	$X_{n_{min}} = L - n\frac{\lambda}{2}$
$P_{max} = 2P_0 = 0{,}06\ Pa$	$P_{min} = 0$

d- L'expression de la vitesse.

$$U(x,t) = \frac{j\omega}{\rho V^2}\int P(x,t)\, dx$$

$$= \frac{j\omega}{\rho V^2} 2j P_0 \int \sin k(L-x) dx$$

$$= -\frac{2\omega P_0}{\rho V^2 \frac{\omega}{V}} \cos k(L-x)$$

$$= \frac{2P_0}{\rho V} \cos k(L-x)\, e^{j\omega t - kL}$$

e- V_{max} et V_{min}

$V_{max} = \frac{2P_0}{\rho V} = 1{,}36\ 10^{-4}\ m/s$ $\left(X = L - \frac{n\lambda}{2}\right)$

$V_{min} = 0$ $\left(X = L - (2n+1)\frac{\lambda}{4}\right)$

$V_{max} = x_{min}\ (P_{min})$

$V_{min} = x_{max}\ (P_{max})$

5°/ $\omega \to \infty \Rightarrow X \to \infty \Rightarrow r = +1$

$P(x,t) = 2P_0 \cos k(L-x) e^{j\omega t - kL}$

$X_{max} = L - \frac{n\lambda}{2} \Rightarrow P_{max} = 0{,}06\,Pa$; $X_{min} = L - (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

$U(x,t) = \frac{2P_0}{\rho V} \sin k(L-x)\, e^{j(\omega t - kL)}$