Corrigés des exercices 4.8 à 4.13 حلول التمارين من 8.4 إلى 13.4

Exercice 4.8 :

1/ Tout le mouvement s'effectue dans le sens positif des abscisses X, sauf pour l'intervalle de temps $2,2s \leq t \leq 2,8s$ pour lequel le mouvement se fait dans le sens négatif. Le mobile est au repos entre les instants $t = 0,8s$ et $t = 1,8s$.

2/ Le mouvement est accéléré instantanément aux instants $t = 1,8s$ et $t = 2.8s$; il est retardé instantanément aux instants $t = 1,8s$ et $t = 2.8s$.

3/ Le mobile passe par l'origine aux instants $t = 0,3s$, $t=2,8s$, $t=3,2s$.

4/ La vitesse s'annule entre les deux instants $t = 0,8s$ et $t = 1,8s$.

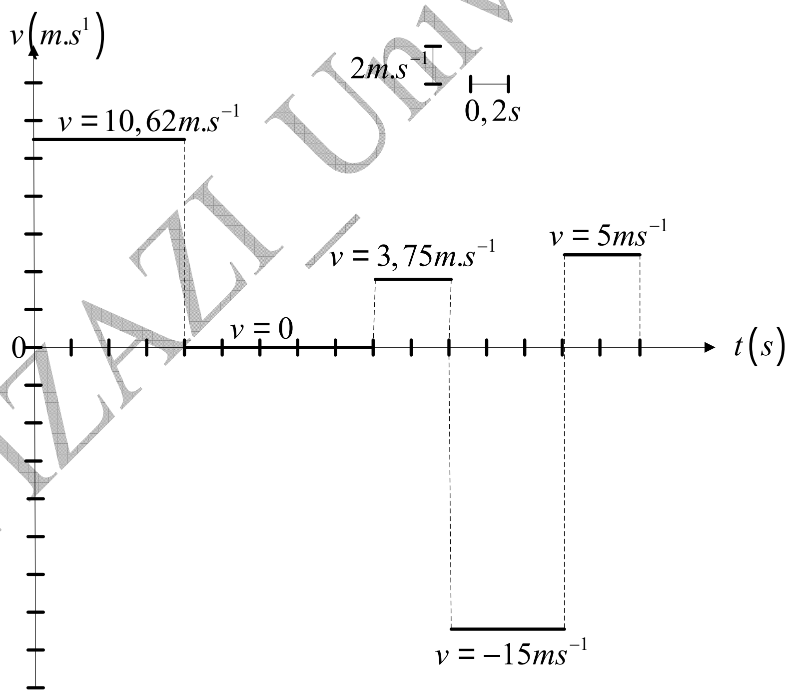
5/ La figure ci-dessous donne la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps.

6/ on calcul la vitesse à partir de la formule $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$:

$$1 \leq t \leq 1,8s \quad , \quad v_{moy} = 0$$

$$1s \leq t \leq 2,2s \quad , \quad v_{moy} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25ms^{-1}$$

$$1s \leq t \leq 3s \quad , \quad v_{moy} = \frac{1,5-9+2}{2} = -2,25ms^{-1}$$



Exercice 4.9 :

1/ On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps :

$$2v\frac{dv}{dt} = A\frac{dx}{dt} \quad , \quad 2v.a = A.v \Rightarrow \boxed{a = \frac{A}{2}}$$

Puisque l'accélération est constante et la trajectoire une droite, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

2/ Détermination de A et B :

$$v = at + v_0 \Rightarrow v^2 = a^2t^2 + v_0^2 + 2a.v_0.t$$

$$v^2 = a(at^2 + 2v_0t) + v_0^2 \Rightarrow v^2 = 2a\underbrace{(\frac{1}{2}at^2 + v_0t)}_{x} + v_0^2 \Rightarrow 2a.x + v_0^2 \rightarrow (1)$$

D'après les données : $v^2 = Ax + B \rightarrow (2)$

Par identification des deux équations (1) et (2) on en déduit : $\boxed{A = \frac{a}{2} \;\; ; \;\; B = v_0^2}$

Exercice 4.10 :

Pour les deux pierres le mouvement est rectiligne uniformément varié. On oriente l'axe OZ vers le haut. On calcule la distance parcourue par la deuxième pierre durant les 4secondes, soit son abscisse sur l'axe OZ :

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \quad ; \quad \boxed{z_1 = -78,4m}$$

D'après l'énoncé, on en déduit que la première dépasse la deuxième après 8 secondes depuis son lancement. Calculons son abscisse à cet instant :

$$z_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 \quad ; \quad \boxed{z_2 = -78,4m}$$

Les deux pierres au moment de leur rencontre se trouvent à la même hauteur $(z = z_1 = z_2)$, 8 secondes après le lancement de la première et 4 secondes après l'abondant de la deuxième en chute libre.

Exercice 4.11 :

1/ On choisit l'axe OZ orienté positivement vers le haut, son origine la terrasse de l'immeuble.

Le mouvement de la balle est uniformément varié. La balle atteint sa hauteur maximale quand sa vitesse s'annule, elle s'arrête alors pour tomber en chute libre. :

$$\cancel{v}^2 - v_0^2 = -2gh \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}} \quad , \quad \boxed{h \simeq 7,35m}$$

2/ La hauteur de l'immeuble est égale à l'abscisse de la balle au moment de sa collision avec le sol(soit à $t = 4,25s$) :

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t \quad ; \quad \boxed{|z| = 37,5m}$

3/ La vitesse de la collision de la balle avec le sol :

$v = -gt + v_0 \quad ; \quad \boxed{v = -29,65ms^{-1}}$

Le signe – résulte de l'orientation de l'axe.

Exercice 4.12 :

1/ Remarquons que nous avons une équation différentielle de premier ordre :

$$a = -\frac{\pi^2}{4}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\pi^2}{4}x = 0$$

qui est l'équation caractéristique du mouvement rectiligne sinusoïdal.

Sa solution est, comme nous l'avons mentionnée dans le cours, de la forme :

$$x = A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t$$

On en déduit l'expression de la vitesse en dérivant l'équation horaire :

$$v = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + B\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

D'après les conditions initiales :

$$t = 1s \ , \ x=4cm \ , \ 4=0+B\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{B = 4cm}$$

$$t = 1s \ , \ v=-2\pi cm.s^{-1} \ , \ -2\pi = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{A = 4cm}$$

L'équation horaire s'écrit alors :

$$x = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4\sin\frac{\pi}{2}t \Rightarrow \boxed{x = 4\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right)}$$

2/ Les caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal sont : la pulsation, l'amplitude et la phase initiale. Pour trouver les valeurs de ces constantes il est nécessaire de transformer l'équation horaire sous la forme :

$$x = X_m\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow (1)$$

Multiplions les deux membres par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour obtenir :

$$x\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

Puisque : $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nous pouvons écrire l'équation horaire sous la forme :

$$x = 4\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Procédons à une transformation trigonométrique pour aboutir à :

$$x = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) \rightarrow (2)$$

En dernier lieu on arrive à l'expression de l'équation horaire qui va nous permettre d'obtenir les constantes du mouvement. Par identification des équations (1) et (2) :

$$x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) = X_m.\cos(\omega t + \varphi)$$

On obtient finalement :

La pulsation : $\boxed{\omega = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}}$, l'amplitude : $\boxed{X_m = 4\sqrt{2}cm}$,

la phase initiale : $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{4} rad}$

3/ L'équation horaire peut s'écrire à présent sous la forme :

$$\boxed{x = 4\sqrt{2}.10^{-2}.\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)}(m)$$

Exercice 4.13 :

L'expression donnée est une équation différentielle de premier ordre.

$$a = 32 - 4v \Leftrightarrow \dot{v} + 4v = 32$$

Sa solution est de la forme : $v = Ae^{-4t} + \dfrac{4}{32}$

Pour trouver la valeur de la constante A on fait appel aux conditions initiales :

$$t = 0 \ , \ v = 4 \ , \ 4 = Ae^{0} + 8 \Rightarrow \boxed{A = -4}$$

Donc la vitesse en fonction du temps est : $\boxed{v = -4e^{-4t} + 8} \rightarrow (1)$

Pour trouver l'équation horaire du mouvement on doit intégrer l'équation de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow dx = \left(-4e^{-4t} + 8\right)dt \Rightarrow x = \int\left(-4e^{-4t} + 8\right)dt$$

$$x = e^{-4t} + 8t + B$$

Calculons la valeur de la constante B à partir des conditions initiales :

$$t = 0 \ , \ x = 0 \Rightarrow 0 = e^{-0} + B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

Donc x en fonction de t est : $\boxed{x = e^{-4t} + 8t - 1} \rightarrow (2)$

Pour exprimer x en fonction de v, il suffit d'éliminer le temps entre les deux équations (1) et (2) :

De (1) : $v = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{8-v}{4}\right)$

Remplaçons dans (2) : $x = e^{-4\left[-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)\right]} + 8.\left(-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{8-v}{4}\right) - 1 \Rightarrow x = \left(\dfrac{8-v}{4}\right) - 2\ln\left(\dfrac{8-v}{4}\right) - 1$

Finalement : $\boxed{x = -2\ln\left(\dfrac{8-v}{4}\right) - \dfrac{1}{4}v + 1}$