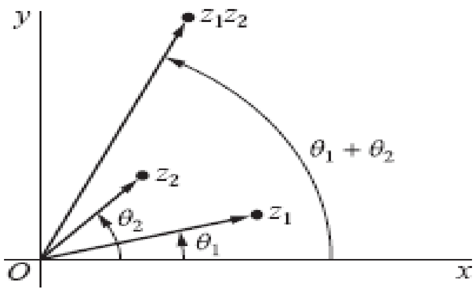
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira

ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⴰⴽⵍⵉ ⵎⵓⵃⴰⵏⴷ ⵓⵍⵃⴰⴵ - ⵜⵓⴱⵉⵔⴻⵜ

Cours d'analyse complexe



$$z_1z_2 = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Par : Nacer DEMMOUCHE

Table des matières

1

Nombres Complexes

Les nombres complexes sont provenus du désir de représenter symboliquement la solution de l'équation de la forme $x^2 + 1 = 0$. Dans ce chapitre, on étudie la structure algébrique et géométrique du système des nombres complexes.

Définition 1.1. *Un nombre complexe z peut être défini comme couple ordonné $z = (x, y)$ de nombres réels x et y.*

Des nombres complexes de la forme $(0, y)$ s'appellent les nombres complexes imaginaires pures. Les nombres réels x et y sont appelés la partie réelle et la partie imaginaire de z et on écrit $Re\, z = x, \quad Im\, z = y$. On dit que deux nombres complexes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont égaux lorsqu'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, c'est-à-dire

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \textit{si et seulement si} \quad x_1 = x_2 \textit{ et } y_1 = y_2.$$

Les opérations de l'addition $(z_1 + z_2)$ et la multiplication $(z_1 z_2)$ sont définies pour les nombres complexes $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ par :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

En particulier, $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ et $(0, y) = (0, 1)(y, 0)$. Par conséquent,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0).$$

Chaque couple ordonné $(x, 0)$ est identifié comme nombre réel et par conséquent l'ensemble des nombres complexes inclut les nombres réels comme sous ensemble. De plus,

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

En représentant le nombre réel par $(x, 0)$ et le nombre imaginaire pure $(0, 1)$ par i, on peut réécrire le nombre complexe comme suit

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

avec la convention que $z^2 = z.z,\ z^3 = z.z^2, ...$
On note que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, c'est-à-dire $i^2 = -1$.

1.1 Propriétés algébriques

Les différentes propriétés algébriques de l'addition et de la multiplication des nombres complexes sont les mêmes pour les nombres réels. On donne ici les propriétés fondamentales.
- Les lois commutatives : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$. **- Les lois associatives :** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$. **- Éléments neutres :** zéro est l'élément neutre pour l'addition qui vérifie $z + 0 = z$. 1 est l'élément neutre pour la multiplication qui vérifie $z.1 = z$. **- Inverse additif :** On associe à chaque nombre complexe z un inverse additif unique $-z = (-x, -y)$, c'est-à-dire $-z$ est un nombre complexe tel que $z + (-z) = 0$. Les inverses additifs sont employés pour définir la soustraction : Si $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$, alors

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

- Inverse multiplicatif : Pour chaque nombre complexe non nul $z = (x, y)$, il existe un nombre complexe z^{-1} tel que $z.z^{-1} = 1$. Cet inverse multiplicatif est moins évident que l'inverse additif. Pour trouver z^{-1}, on pose $z^{-1} = (u, v)$ et on cherche les nombres u et v en fonction de x et y tels que $(x, y)(u, v) = (1, 0)$. u et v sont des solutions des équations

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0.$$

Un calcul simple nous donne les solutions uniques

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

L'inverse multiplicatif de $z = (x, y)$ est alors

$$z^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big).$$

La division par un nombre complexe non nul est définie par

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, \qquad z_2 \neq 0.$$

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (z_2 \neq 0).$$

En particulier, si $z_1 = 1$, alors on a $\frac{1}{z_2} = z_2^{-1}$. En utilisant le fait que l'inverse multiplicatif est unique, on peut écrire

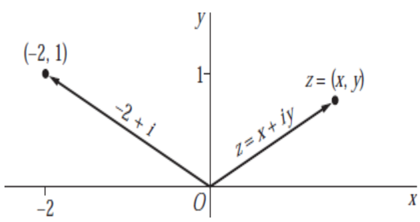
$$\frac{1}{z_1 z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right), \qquad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_1z_2 \neq 0).$$

On peut vérifier facilement les relations suivantes

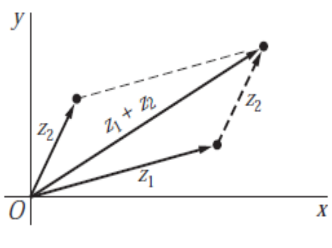
$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{z_1z_2}{z_3z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right), \qquad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0, z_3z_4 \neq 0).$$

1.2 Coordonnées Cartésiennes

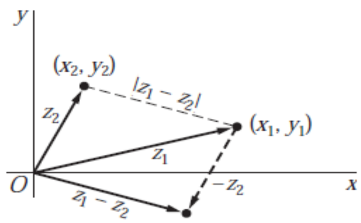
Il est naturel d'associer à un nombre complexe $z = x + iy$ un point dans le plan dont les coordonnées cartésiennes sont x et y. Chaque nombre complexe correspond à un seul point dans le plan. Le nombre complexe $z = -2 + i$ par exemple est représenté par le point $(-2, 1)$. Le nombre z peut également être considéré comme vecteur de l'origine au point $(-2, 1)$.



Selon la définition de la somme de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, le nombre $z_1 + z_2$ correspond au point $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Il correspond également au vecteur dont ses composantes sont $(x_1 + y_1)$ et $(x_2 + y_2)$



La différence $z_1 - z_2$ est représentée par la figure suivante.



Le module ou la valeur absolue du nombre complexe $z = x + iy$ est définie comme le nombre réel $\sqrt{x^2 + y^2}$ et noté par $|z|$, c'est-à-dire

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le nombre $|z|$ est la distance entre le point (x, y) et l'origine, elle se réduit à la valeur absolue dans le système des nombres réels lorsque $y = 0$. Notons que $z_1 < z_2$ n'a pas de sens, tandis que $|z_1| < |z_2|$ signifie que le point correspondant à z_1 est plus proche de l'origine que le point correspondant à z_2. La distance entre les points représentant les nombres complexes z_1 et z_2 est donnée par $|z_1 - z_2|$.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Les nombres complexes correspondants aux points se trouvant sur le cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 3 satisfont l'équation $|z - i| = 3$.
Les nombres réels $|z|$, $Re\ z$ et $Im\ z$ sont liés par l'équation

$$|z|^2 \quad = \quad (Re\ z)^2 + (Im\ z)^2.$$

On a aussi les inégalités

$$|z| \geq |Re\ z| \geq Re\ z, \qquad |z| \geq |Im\ z| \geq Im\ z.$$

Le conjugué complexe ou simplement le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ défini comme le nombre complexe $x - iy$, noté par $\overline{z}$, c'est-à-dire

$$\overline{z} = x - iy.$$

On note que $\overline{\overline{z}} = z$ et $|\overline{z}| = |z|$ pour chaque nombre complexe.
Le conjugué de la somme de deux nombres complexes est la somme des conjugués. En effet,

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

De la même manière, on peut vérifier que

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2},$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

La somme $z+\overline{z}$ d'un nombre complexe avec son conjugué est le nombre réel $2Re\,z$. La différence $z-\overline{z}$ est le nombre imaginaire pure $i2Im\,z$. Une identité importante reliant les conjugués aux modules est

$$z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2. \tag{1.1}$$

Cette identité fournit une autre méthode de déterminer le rapport $\frac{z_1}{z_2}$. Par exemple

$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{-1+3i}{2-i}.\frac{2+i}{2+i} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i.$$

.

1.3 Inégalité Triangulaire

De différentes propriétés du module sont obtenues à partir de la relation (1.1) et beaucoup de relations connues impliquant le module et le conjugué, par exemple

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Pour montrer la première, on écrit simplement,

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2.$$

En employant cette technique, on montrer l'inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \quad \leq \quad |z_1| + |z_2|$$

Pour montrer cette inégalité, on a

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

Donc,

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2}.$$

Mais, on a

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2Re(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|.$$

Par conséquent, on a

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2,$$

ou bien

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

L'inégalité triangulaire peut se prolonger pour n'importe quelle somme de nombres complexes et on auras

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Une borne inférieur de $|z_1 + z_2|$ est donnée par l'inégalité suivante

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|. \tag{1.2}$$

Pour voir ceci, on écrit

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$$

qui signifie que

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \tag{1.3}$$

On obtient ainsi l'inégalité (1.2) lorsque $|z_1| \geq |z_2|$. Si $|z_1| < |z_2|$, on interchange seulement z_1 et z_2 dans l'inégalité (1.3) pour obtenir

$$-\left(|z_1| - |z_2|\right) \quad \leq \quad |z_1 + z_2| \tag{1.4}$$

On combine l'inégalité (1.2) et l'inégalité triangulaire, on obtient l'inégalité suivante

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.4 Coordonnées Polaires

Soient r et θ les coordonnées polaires du point (x, y) correspondant au nombre complexe non nul $z = x + iy$. Puisque $r = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, alors z peut être écrit sous la forme polaire suivante

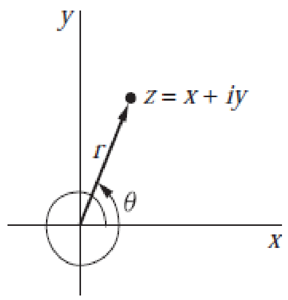
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.5}$$

par exemple,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos\frac{-7\pi}{4} + i\sin\frac{-7\pi}{4}),$$

le nombre r est la longueur du vecteur représentatif de z, c'est-à-dire $r = |z|$. Le nombre θ est appelé *argument* de z et on écrit $\theta = \arg z$. Géométriquement, $\arg z$

est n'importe quel angle, mesuré en radians, que fait le vecteur représentatif de z avec l'axe des nombres réels positifs.



Par conséquent, $\arg z$ admet une infinité de valeurs possibles qui se diffèrent par des multiples de 2π. Ces valeurs peuvent être déterminées à partir de l'équation

$$\tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{1.6}$$

Pour chaque nombre complexe non nul, la valeur principale de $\arg z$, notée par Arg z, est définie comme étant l'unique valeur de $\arg z$ qui vérifie $-\pi < \arg z \leq \pi$. Évidemment, on a alors

$$argz = Argz + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Par exemple, pour $z = 1 + i$, $Argz = \pi/4$ et $argz = \pi/4 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Si $z = 0$, l'équation (1.6) ne s'applique pas et θ n'est pas défini. Lorsque $z \neq z_0$, la représentation

$$z - z_0 = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

de $z - z_0$ dans la forme polaire peut être interprété géométriquement comme indiquée dans la figure 5, c'est-à-dire $\rho = |z - z_0|$ est la distance entre les deux points représentatifs de z et z_0, tandis que $\phi = \arg(z - z_0)$ est l'angle d'inclination du vecteur représentatif de $z - z_0$.

On a l'identité importante suivante

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{1.7}$$

L'identité (1.7) n'est pas toujours vrai lorsque arg est remplacé par Arg. Pour voir ceci, il suffit de prendre $z_1 = -1$ et $z_2 = i$. Pour vérifier l'identité (1.7), on représente d'abord z_1 et z_2 en formes polaires

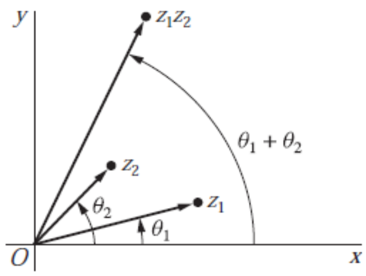
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

et ceci s'écrit sous la forme polaire suivante

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \tag{1.8}$$

Chaque argument de z_1 plus chaque argument de z_2 est un argument de $z_1 z_2$.



Notons que lorsqu'un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est multiplié par i, alors le vecteur représentatif de iz est obtenu en tournant le vecteur représentatif de z par un angle $\pi/2$ sans changer sa longueur. On peut vérifier ceci avec l'équation (1.8)

$$iz = \Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\Big(\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{2})\Big)$$

Par la relation (1.8), il est clair que l'inverse multiplicatif d'un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big) \tag{1.9}$$

Puisque $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$, alors on a le résultat suivant

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big) \tag{1.10}$$

On utilise souvent la formule d'Euler donnée comme suit

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.11}$$

On a la propriété d'additivité suivante

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{1.12}$$

la relation (1.12) est obtenue de la relation (1.8) lorsque $r_1 = r_2 = 1$, c'est-à-dire si $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$, alors $z_1 z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Remarquons par la propriété d'additivité que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$. Le nombre $e^{-i\theta}$ est alors l'inverse multiplicatif de $e^{i\theta}$ et on écrit $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$. En utilisant les relation (1.5) et (1.11), on déduit que chaque nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme suivante

$$z = re^{i\theta},$$

son inverse multiplicatif est

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \tag{1.13}$$

Pour $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_1 = r_2 e^{i\theta_2}$, les relations (1.8) et (1.10) prennent les formes suivantes

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

1.5 Puissance et racine d'un nombre complexe

Les puissances d'un nombre complexe non nul $z = re^{i\theta}$ sont données par la formule suivante

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.14}$$

Il est facile de vérifier la relation (1.14) par la relation (1.12) pour $n = 1, 2, ...$
Si $n = -1, -2, ...$, on définit z^n par l'équation $z^n = (z^{-1})^{-n}$. En effet, en utilisant la relation (1.13), on déduit que

$$z^n = \big(\frac{1}{r}\big)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{in\theta}.$$

Remarquons que si $r = 1$, la relation (1.14) devient

$$\left(e^{i\theta}\right)^n \quad = \quad e^{in\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.15}$$

ou bien

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.16}$$

La relation (1.16) est connue sous le nom du théorème de Moivre.
On utilise aussi la relation (1.14) pour calculer les racines d'un nombre complexe. En effet, considérons le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ qui appartient au cercle de centre à l'origine et de rayon r. Lorsque θ augmente, z se déplace au tour du cercle. En particulier, lorsque θ augment pas 2π, on revient au point de départ ; la même chose si θ diminue par 2π. Par conséquent, deux nombres complexes $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ sont égaux si et seulement si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Avec cette observation et le fait que $z^n = r^n e^{in\theta}$, il est très important de chercher les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, où $n \geq 2$. la méthode commence par le fait que la racine $n^{\text{ièmes}}$ est un nombre complexe non nul $z = re^{i\theta}$ qui vérifie $z^n = z_0$ ou bien $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$. Donc, $r^n = r_0$ et $n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, ceci implique $r = \sqrt[n]{r_0}$ et $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n, \ \ k \in \mathbb{Z}$. par conséquent, les nombres complexes

$$z = \sqrt[n]{r_0} e^{i(\theta_0/n + 2k\pi/n)}, \ k \in \mathbb{Z}$$

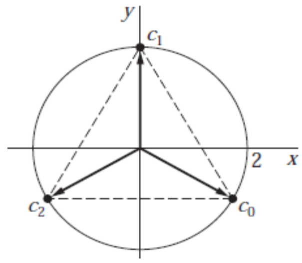
sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z_0. C'est clair que toutes ces racines appartiennent au cercle du centre à l'origine et de rayon $\sqrt[n]{r_0}$ qui sont espacées par $2\pi/n$. On vérifie facilement que toutes les différentes racines sont obtenues lorsque $k = 0, ..., n - 1$. Donc, les différentes racines de z_0 sont

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i(\theta_0/n + 2k\pi/n)}, \ k = 0, ..., n - 1.$$

Lorsque la valeur de θ_0 est la valeur principale de $argz$, alors le nombre complexe c_0 est la racine principale de z_0. remarquons que les racines c_k peuvent s'écrire sous la forme

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i\theta_0/n} e^{i2k\pi/n} = c_0 w_n^k, \ k = 0, ..., n - 1, \ w_n = e^{i2\pi/n}.$$

Par exemple, pour $n = 3$, les solutions de l'équation $z^3 = -8i$ sont illustrées comme suit.



On remarque facilement que $w_n^k = e^{i2k\pi/n}, \ k = 0, ..., n - 1$ sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

1.6 Régions dans le plan complexe

Dans cette section, on s'intéresse aux ensembles complexes et leurs proximité à un autre ensemble. L'outil de base est le concept de ε voisinage

$$|z - z_0| < \varepsilon \tag{1.17}$$

de point z_0 composé de tous les points qui sont à l'intérieur du cercle de centre z_0 et de rayon ε.

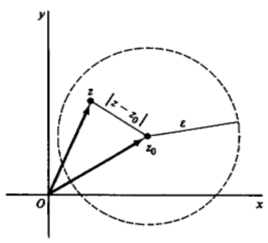


FIGURE 8

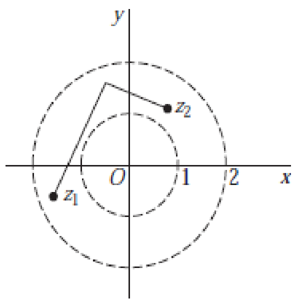
Un point z_0 est dit un point intérieur de S s'il existe un voisinage de z_0 qui contient seulement les points de S ; z_0 est dit point extérieur de S lorsqu'il existe un voisinage de z_0 qui ne contient aucun point de S. Dans le cas contraire, z_0 est dit un point de la frontière de S. Un point de frontière est alors un point dont tous les voisinages contiennent des points de S et des points non appartenant à S. La totalité des points de la frontière s'appelle la frontière de S. Le cercle $|z| = 1$ est la frontière de chacun de ces ensembles

$$|z| < 1, \qquad |z| \leq 1.$$

Un ensemble est ouvert s'il ne contient aucun de ses points de frontière. Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points de frontière. La fermeture $\overline{S}$ de S est l'ensemble fermé contenant tous les points de S et tous les points de la frontière de S. Par exemple, l'ensemble $|z| < 1$ est ouvert, $|z| \leq 1$ est fermé et $|z| \leq 1$ est la fermeture de $|z| < 1$ et de $|z| \leq 1$.

Pour qu'un ensemble ne soit pas ouvert, il doit contenir au moins un point de frontière. Si un ensemble n'est pas fermé, alors il existe un point de la frontière non contenu dans l'ensemble. Remarquons que l'ensemble $0 < |z| \leq 1$ n'est ouvert ni fermé. L'ensemble de tous les nombres complexes est ouvert et fermé parce qu' il n' a aucun point de frontière.

Un ensemble ouvert S est dit connexe si chaque couple de points de S sont reliés par un chemin polygonal, composé de nombre fin de segments, qui se situe entièrement dans S. L'ensemble ouvert $|z| < 1$ est connexe. L'anneau $1 < |z| < 2$ est ouvert et aussi connexe.



Un ensemble ouvert qui est connexe s'appelle un domaine. Notons qu'un voisinage est toujours un ensemble connexe.

Un domaine avec certains, aucun, ou bien avec tous ses points de frontière s'appelle région.

Un ensemble S est borné si chaque point de S se trouve à l'intérieur d'un certain cercle $|z| = R$; dans le cas contraire S est non borné. Finalement, z_0 est dit un point d'accumulation de l'ensemble S si chaque voisinage de z_0 contient au moins un point de S différent de z_0. Si S est fermé, alors il contient chacun de ses points d'accumulation. Si un point d'accumulation z_0 n'est pas dans S, alors z_0 est un point de frontière de S, mais ceci contredit le fait qu'un ensemble fermé contient tous ses points de frontière. Ainsi, un ensemble S est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation. Évidement, un point z_0 n'est pas un point d'accumulation d'un ensemble S lorsqu'il existe un certain voisinage de z_0 qui ne contient pas des points de S différents de z_0. Par exemple, l'origine est le seul point d'accumulation de l'ensemble $z_n = i/n$.

2
Fonctions Analytiques

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à variables complexes et on développe une théorie de différentiation. Le but principale de ce chapitre est de présenter des fonctions analytiques ; elles jouent un rôle très important dans l'analyse complexe.

2.1 Fonctions à variables complexes

Soit S un ensemble de nombres complexes. Une fonction f définie sur S est une règle qui associe à chaque nombre complexe z dans S un nombre complexe w ; w est dit valeur de f à z et on la note $f(z)$, c'est-à-dire $f(z) = w$. L'ensemble S est dit domaine de définition de f. Lorsque le domaine de définition n'est pas mentionné, alors par convention on prend l'ensemble le plus grand possible. Par exemple, si on prend la fonction $1/z$, on comprend que le domaine de définition est l'ensemble de tous les points non nuls du plan. Dans la théorie des variables complexes, il existe des fonctions multi-évaluées ou des fonctions qui peuvent prendre plus d'une valeur à un point spécifique. Par exemple, la fonction $f(z) = z^{1/2}$ prend deux valeurs différentes pour chaque point non nul dans le plan complexe.

L'étude des fonctions multi-évaluées impliquera certaines fonction simple-évaluées où juste une des valeurs possible assignées à chaque point est prise.

Supposons que $w = u + iv$ est la valeur de f au point $z = x + iy$, c'est à dire $u+iv = f(x+iy)$. Chacun des nombres réels u et v dépend des variables x et y. Si par exemple, $f(z) = z^2$, alors $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Par conséquent,

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v = 2xy.$$

ceci montre qu'une fonction à variable complexe peut être exprimée en fonctions de deux fonctions réelles à deux variables réelles x et y :

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{2.1}$$

Si dans l'équation (2.1), le nombre $v(x,y)$ est toujours zéro, alors $f(z)$ est toujours réelle. Un exemple d'une fonction variable à complexe à valeurs réelles est $f(z) = |z|^2$.

2.2 Transformations

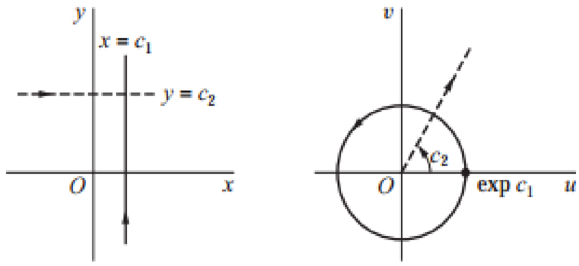
Des propriétés d'une fonction réelle d'une variable réelle sont présentées par le graphe de la fonction. Lorsque $w = f(z)$ où z et w sont des nombres complexes, aucune représentation graphique n'est possible parce que chacun des nombres z et w est situé dans le plan plutôt que dans une ligne. Cependant, on peut montrer quelques informations sur f en indiquant les point $z = (x,y)$ et $w = (u,v)$. Pour faire ceci, il est généralement plus simple de tracer les plans de z et de w séparément. Lorsqu'une fonction est considérée de cette façon, elle est désignée sous le nom transformation. L'image d'un point z dans le domaine de définition S est le point $w = f(z)$ et l'ensemble des images de tous les points dans un ensemble T qui est contenu dans S s'appelle l'image de T. L'image de tout le domaine S est appelé le champ de f. L'image inverse de w est l'ensemble de tous les points z dans S qui ont w comme leur image.

Les termes tels que la translation et la rotation sont employés pour donner des caractéristiques de certaines transformations. Dans ce cas,il est commode de considérer les plans de z et de w comme le même plan.

Exemple 2.1. *La transformation $w = z+1$ peut être considérée comme translation de z par une unité. la transformation $w = iz$ tourne chaque point z avec un angle $\pi/2$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.*

Plus d'informations sont habituellement montrées par des images des courbes et des régions que par les images des points individuels.

Exemple 2.2. *Soit la transformation $w = e^z = e^x e^{iy}$, avec $z = x + iy$.*
On peut l'écrire aussi sous la forme $w = re^{i\theta}$, avec $r = e^x$ et $\theta = y$.
L'image de $z_1 = (c_1, y_1)$ sur la droite $x = c_1$ est w_1 de coordonnées polaires $r_1 = e^{c_1}$ et $\theta_1 = y_1$. Donc l'image de la droite $x = c_1$ est le cercle de centre zéro et de rayon r_1 et chaque point w de ce cercle est l'image d'une infinité de points de la droite $x = c_1$. L'image de $z_2 = (x_2, c_2)$ est w_2 de coordonnées polaires $r_2 = e^{x_2}$ et $\theta_2 = c_2$. Donc, l'image de la droite $y = c_2$ est le rayon indiqué dans le graphe.



2.3 Limites

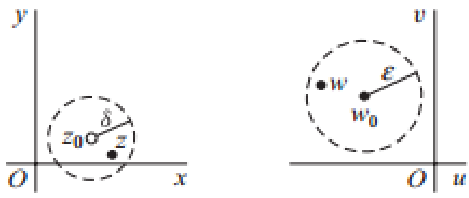
Soit une fonction f définie sur un voisinage de z_0, sauf peut être pour le point z_0. La limite de f lorsque z s'approche de z_0 est le nombre w_0,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0. \tag{2.2}$$

La relation (2.2) signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Géométriquement, (2.3) indique que pour chaque voisinage $|w - w_0| < \varepsilon$ de w_0, il existe un voisinage $|z - z_0| < \delta$ de z_0 tel que les images de tous les points de $|z - z_0| < \delta$ sont dans le voisinage $|w - w_0| < \varepsilon$.



Notons que les images des ponts z peuvent ne pas constituer tout le voisinage $|w - w_0| < \varepsilon$. Notons aussi qu'on peut rapprocher z de z_0 d'une façon arbitraire, mais pas dans une certaine direction particulière. La définition (2.3) exige que f soit définie pour tous les points d'un certain voisinage de z_0, sauf peut être en z_0. Un tel voisinage existe toujours lorsque z_0 est un point intérieur d'une région sur la quelle f est définie. On peut prolonger la définition de la limite au cas où z_0 est un point de la frontière de la région en convenant que l'inégalité $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ est satisfaite par seulement les points z qui se situent dans le domaine $0 < |z - z_0| < \delta$ et la région. La définition (2.3) fournit un moyen de vérifier si un point donné est une limite, mais elle ne fournit pas directement une méthode pour déterminer cette limite.

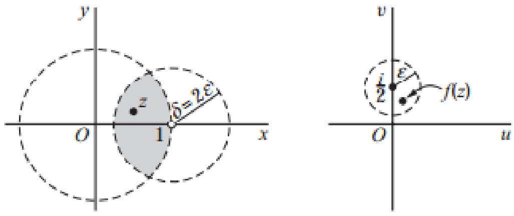
Exemple 2.3. *Soit la fonction $f(z) = iz/2$ définie sur le disque $|z| < 1$ et montrons que*

$$\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}.$$

On remarque que le point $z = 1$ est sur la frontière du domaine de définition. Si z est dans la région $|z| < 1$, alors

$$|f(z) - \frac{i}{2}| = |\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}| = \frac{|z-1|}{2}.$$

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = 2\varepsilon$, $0 < |z - 1| < 2\varepsilon \Rightarrow |f(z) - \frac{i}{2}| < \varepsilon$.



2.4 Limites contenant le point à l'infini

Il est parfois important d'inclure avec le plan complexe le point à l'infini, noté ∞. Le plan complexe union ce point s'appelle le plan complexe prolongé. Pour visualiser le point à l'infini, on procède comme suit. A chaque point z dans le plan complexe, il correspond exactement un point P sur la surface de la sphère unité de centre à l'origine. Le point P est le point où la droite qui passe par les points z et N coupe la sphère. De la même manière, à chaque point P de la surface de la sphère autre que N, il correspond exactement un point z du plan complexe. Soin N correspond au point à l'infini, alors on obtient une correspondance entre les points de la surface de la sphère et les points du plan complexe prolongé. Remarquons que l'extérieur du cercle unité de centre à l'origine dans le plan complexe correspond à l'hémisphère supérieure sans le point N. De plus, pour chaque nombre très petit $\varepsilon > 0$, ces points dans le plan complexe extérieurs du cercle $|z| = 1/\varepsilon$ correspondent aux points sur la sphère qui sont proches de N. On appelle ainsi l'ensemble $|z| > 1/\varepsilon$ le voisinage de l'infini.

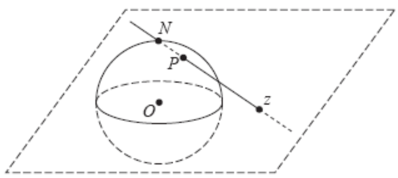


FIGURE 14

Maintenant, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ a une signification lorsque chacun des nombres z_0 et w_0 est remplacé par le point à l'infini.

Dans la définition (2.3), on peut remplacer les voisinage de z_0 et de w_0 par les voisinages de ∞. Par exemple,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0,$$

signifie que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |z| > 1/\delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$. C'est-à-dire, le point $f(z)$ est dans le voisinage $|w - w_0| < \varepsilon$ à chaque fois que z est dans le voisinage $|z| > 1/\delta$ de l'infini. Par exemple, on remarque que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} = 0$$

parce que $|1/z^2 - 0| < \varepsilon$ à chaque fois que $|z| > 1/\sqrt{\varepsilon}$, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

2.5 Théorèmes sur les limites

On peut faire un lien entre la limite d'une fonction à variable complexe et la limite d'une fonction réelle à deux variables réelles.

Théorème 2.5.1. *Supposons que*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad \textit{et} \quad w_0 = u_0 + iv_0, \textit{ alors}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \textit{ssi} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \textit{et} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0. \quad (2.4)$$

Preuve. $\Rightarrow$: Par hypothèse, on a

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ 0 < |(x-x_0)+i(y-y_0)| < \delta \Rightarrow |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon.$$

$|u(x,y) - u_0| \leq |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)|$ et $|v(x,y) - v_0| \leq |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)|$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ 0 < (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow |u(x,y)-u_0| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |v(x,y)-v_0| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Par hypothèse, on a

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_1 > 0,\ 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta_1^2 \Rightarrow |u(x,y) - u_0| < \varepsilon/2$$

$$\exists\delta_2 > 0,\ 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta_2^2 \Rightarrow |v(x,y) - v_0| < \varepsilon/2.$$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Puisque $|u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| \leq |u(x,y) - u_0| + |(v(x,y) - v_0)|$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \min(\delta_1,\delta_2),\ 0 < |(x-x_0)+i(y-y_0)| < \delta \Rightarrow |u(x,y)-u_0+i(v(x,y)-v_0)| < \varepsilon.$$

Théorème 2.5.2. *Supposons que* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *et* $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = W_0$*, alors*

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|,\ \lim_{z\to z_0} (f(z) + F(z)) = w_0 + W_0,\ \lim_{z\to z_0} (f(z)F(z)) = w_0 W_0.$$

Si $W_0 \neq 0$*, alors* $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{F(z)} = \dfrac{w_0}{W_0}$.

Preuve. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

on a toujors $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$.
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ et $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = W_0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon/2.$$
$$\exists \delta_2 > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |F(z) - W_0| < \varepsilon/2.$$

on a : $|(f(z) + F(z)) - (w_0 + W_0)| \leq |f(z) - w_0| + |F(z) - W_0|$, alors pour $\delta = \min(\delta_1, \delta 2)$, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |(f(z) + F(z)) - (w_0 + W_0)| < \varepsilon$.
On pose, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, $w_0 = u_0 + iv_0$ et $W_0 = U_0 + iV_0$,

$$f(z)F(z) = \big(u(x,y)U(x,y) - v(x,y)U(x,y)\big) + i\big(v(x,y)U(x,y) + u(x,y)V(x,y)\big).$$

On a $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(u(x,y)U(x,y) - v(x,y)U(x,y)\big) = u_0U_0 - v_0V_0$
et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(v(x,y)U(x,y) + u(x,y)V(x,y)\big) = v_0U_0 + u_0V_0$.
Par le théorème 2.5.1, on déduit que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)F(z) = (u_0U_0 - v_0V_0) + i(v_0U_0 + u_0V_0) = w_0W_0$.

Théorème 2.5.3. *Soient* z_0 *et* w_0 *deux nombres complexes, alors*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0,$$
$$\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0 \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0.$$
$$\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = 0.$$

Preuve. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > 1/\varepsilon$ qui peut s'écrire sous la forme $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |1/f(z)| < \varepsilon$ et ceci signifie que $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.
$\lim\limits_{z\to +\infty} f(z) = w_0$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |z| > 1/\delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$
si on remplace z par $1/z$, on trouve $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z| < \delta \Rightarrow |f(1/z) - w_0| < \varepsilon$
$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |z| > 1/\delta \Rightarrow |f(z)| > 1/\varepsilon$
si on remplace z par $1/z$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |z| < \delta \Rightarrow |1/f(1/z) - 0| < \varepsilon$

Exemple 2.4. $\lim_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1} = \infty \quad , \lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+1} = 2, \quad \lim_{z\to\infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} = \infty.$

2.6 Continuité

Définition 2.6.1. *Une fonction f est continue à un point z_0, si*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.5}$$

La condition (2.5) signifie que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Une fonction d'une variable complexe serait continue dans une région $\boldsymbol{R}$ *si elle est continue en chaque point dans* $\boldsymbol{R}$*.*

Théorème 2.6.1. *La composition de deux fonctions continues est continue.*

Preuve. soit $f(z) = w$ une fonction qui est définie pour tout z dans $|z - z_0| < \delta$ et soit $g(w) = W$ une fonction dont le domaine de définition contient l'image de $|z - z_0| < \delta$ par f. La composition $g(f(z))$ est alors définie en chaque point z dans $|z - z_0| < \delta$. Supposons que f est continue en z_0 et g est continue en $f(z_0)$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\gamma > 0,\ |f(z) - f(z_0)| < \gamma \Rightarrow |g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon.$$

Puisque f est continue en z_0, alors pour $\gamma > 0$, $\exists\delta > 0$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \gamma$. Donc, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon$.

Théorème 2.6.2. *Si $f(z)$ est continue en z_0, avec $f(z_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage de z_0 sur le quel $f(z) \neq 0$.*

Preuve. $f(z)$ est continue en z_0, alors $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Pour $\varepsilon = |f(z_0)|/2$, alors $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$. Supposons qu'il existe z dans $|z - z_0| < \delta$ pour le quel $f(z) = 0$, alors $|f(z_0)| < |f(z_0)|/2$, d'où la contradiction.

Notons que par le théorème 2.5.1, la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue en $z_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continues en z_0.

Théorème 2.6.3. *Si $f(z)$ est continue sur une région R bornée et fermée, alors il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M,\ z \in R$.*

Preuve. Supposons que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue sur R, alors la fonction $|f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2}$ est continue sur R et atteint son maximum M pour un certain $z \in R$.

2.7 Dérivées

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient le voisinage $|z-z_0| < \delta$ de z_0.

Définition 2.7.1. *La dérivée de f au point z_0 est la limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.7}$$

et f est dite différentiable en z_0 lorsque $f'(z_0)$ existe.

En exprimant la variable z dans la définition (2.7) en terme de la nouvelle variable complexe $\Delta z = z - z_0$, $z \neq z_0$, on pour écrire (2.7) comme suit

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{2.8}$$

Notons que, puisque f est définie sur un voisinage de z_0, alors le nombre $f(z_0+\Delta z)$ est toujours défini pour $|\Delta z|$ suffisamment petit.

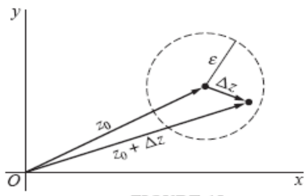


FIGURE 15

En prenant la forme (2.8) comme la définition de la dérivée, on introduit le nombre

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z),$$

qui dénote le changement dans la valeur $w = f(z)$ de f correspondant à un changement Δz dans z. Si on note $f'(z)$ par dw/dz, alors l'équation (2.8) devient

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{2.9}$$

Exemple 2.5. *Supposons que $f(z) = z^2$. Pour chaque point z,*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Par conséquent, $dw/dz = 2z$, ou bien $f'(z) = 2z$.

Exemple 2.6. *Maintenant on regarde la fonction* $f(z) = |z|^2$.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

On sait que $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ *s'approche de* $(0,0)$ *de différentes manières. Si* $\Delta z = (\Delta x, 0)$*, alors* $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w/\Delta z = \bar{z} + z$*. Si* $\Delta z = (0, \Delta y)$*, alors* $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w/\Delta z = \bar{z} - z$.

$\bar{z} - z = \bar{z} + z$*, si* $z = 0$*. Donc,* $f(z)$ *est différentiable seulement en* $z = 0$ *et* $f'(0) = 0$*.* $f'(z)$ *n'existe pas lorsque* $z \neq 0$.

Théorème 2.7.1. *Si* f *est différentiable au point* z_0*, alors* $f(z)$ *est continue en* z_0.

Preuve. Supposons que $f'(z_0)$ existe, alors

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0).0 = 0.$$

Théorème 2.7.2. *Supposons que* f *et* g *sont différentiables au point* z_0 *et* $f(z_0) = g(z_0) = 0$*, avec* $g'(z_0) \neq 0$*, alors*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Preuve.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)/(z-z_0)}{g(z)/(z-z_0)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)/(z-z_0)}{\lim_{z \to z_0} g(z)/(z-z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

2.8 Formules de différentiation

Notre définition de la dérivée est identique à celle de dérivée d'une fonction réelle à variable réelle. En fait, les formules de base de différentiation données ci-dessous peuvent être déduites de la relation (2.9). Dans ces formules, le dérivé d'une fonction f au point z est dénoté par $f'(z)$ ou bien $\frac{d}{dz} f(z)$.

Soit c une constante complexe et soit f une fonction dont la dérivé existe au point z.

$$\frac{d}{dz} c = 0, \quad \frac{d}{dz} z = 1, \quad \frac{d}{dz}(cf(z)) = cf'(z). \tag{2.10}$$

En outre, si n est un nombre entier positif

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}. \tag{2.11}$$

Cette formule demeure valide quand n est un nombre négatif, à condition que $z \neq 0$. Si les dérivés de deux fonctions f et g existent à un point z , alors

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z). \\ \frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z). \end{gathered} \tag{2.12}$$

et lorsque $g(z) \neq 0$, alors

$$\frac{d}{dz}(f(z)/g(z)) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}. \tag{2.13}$$

On pose $w = f(z)g(z)$ et

$$\begin{aligned} \triangle w &= f(z+\triangle z)g(z+\triangle z) - f(z)g(z) \\ &= f(z)[g(z+\triangle z) - g(z)] + [f(z+\triangle z) - f(z)]g(z+\triangle z) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{\triangle w}{\triangle z} = f(z)\frac{g(z+\triangle z) - g(z)}{\triangle z} + \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}g(z+\triangle z).$$

on fait tendre $\triangle z$ vers zéro, on obtient

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = f(z)g'(z) + f'(z)g(z).$$

Exercice 2.8.1. Montrer que si f a une dérivée au point z_0 et que g a une dérivée au point $f(z_0)$, alors la fonction composée $F(z) = g[f(z)]$ a une dérivée au point z_0 et

$$F'(z_0) = f'(z_0)g'[f(z_0)]. \tag{2.14}$$

2.9 Équations de Cauchy Riemann

Supposons que $f(z)$ est définie au voisinage de z_0 par l'équation

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Dans cette section, on cherche les dérivées partielles des fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$. On va montrer aussi comment exprimer la dérivé $f'(z_0)$ en termes de ces dérivées partielles. On pose $z_0 = x_0 + iy_0$, $\triangle z = \triangle x + i\triangle y$ et $\triangle w = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$. On suppose que $f'(z_0)$ existe telle que

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} \tag{2.15}$$

Par le théorème 2.5.1, on a

$$f'(z_0) = \lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \left(Re\frac{\triangle w}{\triangle z}\right) + i \lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \left(Im\frac{\triangle w}{\triangle z}\right) \tag{2.16}$$

On sait que $\triangle z$ tend vers $(0,0)$ de différentes manières. En particulier, horizontalement par les points $(\triangle x, 0)$.

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \left(Re\frac{\triangle w}{\triangle z}\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x_0 + \triangle x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\triangle x} = u_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\left(Im\frac{\triangle w}{\triangle z}\right)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x_0+\triangle x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\triangle x}=v_x(x_0,y_0).$$

où $u_x(x_0,y_0)$ et $v_x(x_0,y_0)$ sont les dérivées partielles. La relation (2.16) devient

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \tag{2.17}$$

D'autre part, si $\triangle z=(\triangle x,\triangle y)$ tend vers $(0,0)$ verticalement par les points $(0,\triangle y)$, alors

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\left(Re\frac{\triangle w}{\triangle z}\right)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\triangle y)-v(x_0,y_0)}{\triangle y}=v_y(x_0,y_0)$$

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\left(Im\frac{\triangle w}{\triangle z}\right)=-\lim_{\triangle y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\triangle y)-u(x_0,y_0)}{\triangle x}=-u_y(x_0,y_0).$$

La relation (2.16) devient

$$f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0). \tag{2.18}$$

Les équations (2.17) et (2.18) non seulement donnent $f'(z_0)$ en termes des dérivées partielles des fonctions u et v , mais elles fournissent également des conditions nécessaires pour l'existence de $f'(z_0)$. Pour obtenir ces conditions, on doit seulement faire l'égalité des parties réelles et puis les parties imaginaires des côtés droits des équations (2.17) et (2.18) pour voir que l'existence de $f'(z_0)$ exige que

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0),\quad \text{et}\quad v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0). \tag{2.19}$$

Les équations (2.19) sont les équations de Cauchy-Riemann.

Théorème 2.9.1. (Condition nécessaire) *Supposons que $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ et que $f'(z)$ existe au point $z_0=x_0+iy_0$, alors les dérivées partielles de premier ordre de u et v existent au point (x_0,y_0) et elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann (2.19). De plus, $f'(z_0)$ satisfait (2.17) et (2.18).*

Exemple 2.7. $f(z)=z^2=x^2-y^2+i2xy$ *Pour vérifier que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites partout, on écrit*

$$u(x,y)=x^2-y^2 \quad et \quad v(x,y)=2xy.$$

$$u_x=2x=v_y, u_y=-2y=-v_x.$$

$$f'(z)=2x+i2y=2(x+iy)=2z.$$

Puisque les équations de Cauchy-Riemann sont des conditions nécessaires pour l'existence de la dérivée d'une fonction f au point z_0, elles peuvent souvent être employées pour localiser les points auxquels f n'a pas une dérivée.

Exemple 2.8. *$f(z) = |z|^2$, avec*

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad et \quad v(x, y) = 0.$$

Si les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées au point(x, y), alors $2x = 0$ et $2y = 0$, c'est-à-dire $x = y = 0$. Par conséquence $f'(z)$ n'existe pas au pont $z \neq 0$.

La satisfaction des équations de Cauchy-Riemann à un point $z_0 = (x_0, y_0)$ n'est pas suffisante pour l'existence de la dérivée de f dans ce point, mais avec certaines conditions de continuité, on aura une condition suffisante.

Définition 2.9.1. *une fonction à deux variable réelle $w = f(x, y)$ est dite admet une différentielle totale au point (x, y) ou bien différentiable au point (x, y) si en ce point*

$$\triangle w = a\triangle x + b\triangle y + \varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y \tag{2.20}$$

avec a, b sont indépendantes de $\triangle x$, $\triangle y$ et ε_1, ε_2 sont des fonctions de $\triangle x$ et $\triangle y$ telles que $\lim\limits_{(\triangle x, \triangle y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$ et $\lim\limits_{(\triangle x, \triangle y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$.
La différentielle totale de $f(x, y)$ est définie par : $dw = a\triangle x + b\triangle y$.

Théorème 2.9.2. *Si $w = f(x, y)$ a des premières dérivées partielles continues dans D, alors w a la différentielle*

$$dw = w_x(x, y)\triangle x + w_y(x, y)\triangle y, \ \forall(x, y) \in D.$$

Théorème 2.9.3. (Condition suffisante de différentiabilité) *Soit la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ définie dans un certain voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Supposons que les premières dérivées partielles des fonctions u et v par rapport à x et y existent dans ce voisinage, continues au point (x_0, y_0) et satisfont les équations de Cauchy-Riemann au point (x_0, y_0), alors $f'(z_0)$ existe et sa valeur est $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.*

Preuve. On pose $\triangle z = \triangle x + i\triangle y$, où $0 < |\triangle z| < \varepsilon$.

$$\triangle w = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0) = \triangle u + i\triangle v, \tag{2.21}$$
$$\triangle u = u(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0)$$
$$\triangle v = v(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - v(x_0, y_0)$$

Les dérivées partielles $u_x(x, y)$ et $v_x(x, y)$ sont continue au point (x_0, y_0), alors par le théorème 2.9.2,

$$\triangle u = u_x(x_0, y_0)\triangle x + u_y(x_0, y_0)\triangle y + \varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y \tag{2.22}$$

$$\triangle v = v_x(x_0, y_0)\triangle x + v_y(x_0, y_0)\triangle y + \varepsilon_3\triangle x + \varepsilon_4\triangle y, \tag{2.23}$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et ε_4 tendent vers zéro lorsque $(\triangle x, \triangle y)$ tend vers $(0,0)$. On remplace les expressions (2.22), (2.23) dans (2.21), alors

$$\begin{aligned} \triangle w = u_x(x_0, y_0)\triangle x + \varepsilon_1 \triangle x + u_y(x_0, y_0)\triangle y + \varepsilon_2 \triangle y \\ +i[v_x(x_0, y_0)\triangle x + \varepsilon_3 \triangle x + v_y(x_0, y_0)\triangle y + \varepsilon_4 \triangle y.] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Puisque les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites en (x_0, y_0), alors si on remplace $u_y(x_0, y_0)$ par $-v_x(x_0, y_0)$ et $v_y(x_0, y_0)$ par $u_x(x_0, y_0)$ dans (2.24) et on divise pas $\triangle z$, on obtient

$$\frac{\triangle w}{\triangle z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\triangle x}{\triangle z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\triangle y}{\triangle z}. \tag{2.25}$$

C'est clair que : $\quad |(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\triangle x}{\triangle z}| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_3| \quad$ et $\quad |(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)\frac{\triangle y}{\triangle z}| \leq |\varepsilon_2| + |\varepsilon_4|$.

Par conséquent, $\qquad f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$

On peut écrire le théorème 2.9.3 dans les coordonnées polaires. Soit $z_0 \neq 0$ tel que $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ et $f(z) = u + iv$, alors les fonctions u et v peuvent s'écrire en fonction de r et θ. Supposons que les dérivées partielles de premier ordre de u et v par rapport à x et y existent pour chaque z dans un voisinage $|z - z_0| < \delta$ et elles sont continues en z_0. Les dérivées partielles de premier ordre de u et v par rapport à r et θ ont ces propriétés et on peut les écrire en fonction des dérivées partielles par rapport à x et y. En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

et on écrit,

$$\begin{aligned} u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, \quad u_\theta = -u_x r \sin\theta + u_y r \cos\theta \\ v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, \quad v_\theta = -v_x r \sin\theta + v_y r \cos\theta \end{aligned} \tag{2.26}$$

Si les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées en z_0, alors l'équation (2.26) s'écrit,

$$\begin{aligned} u_r(r_0, \theta_0) = v_y(x_0, y_0)\cos\theta_0 - v_x(x_0, y_0)\sin\theta_0, \\ u_\theta(r_0, \theta_0) = -v_y(x_0, y_0) r_0 \sin\theta_0 - v_x(x_0, y_0) r_0 \cos\theta_0 \\ v_r(r_0, \theta_0) = -u_y(x_0, y_0)\cos\theta_0 + u_x(x_0, y_0)\sin\theta_0, \\ v_\theta(r_0, \theta_0) = u_y(x_0, y_0) r_0 \sin\theta_0 + u_x(x_0, y_0) r_0 \cos\theta_0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

De (2.26) et (2.27), on obtient,

$$r_0 u_r(r_0, \theta_0) = v_\theta(r_0, \theta_0), \quad u_\theta(r_0, \theta_0) = -r_0 v_r(r_0, \theta_0). \tag{2.28}$$

On peut vérifier facilement que si les équations (2.28) sont vérifiées, alors les équations de cauchy-Riemann sont vérifiées. Les équations (2.28) sont une autre forme des équations de cauchy-Riemann.

Théorème 2.9.4. *Soit* $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ *définie dans un voisinage de* z_0*. Supposons que les dérivées partielles de premier ordre de* u *et* v *par rapport à* r *et* θ *existent dans ce voisinage, continues en* z_0 *et vérifient les équations de cauchy-Riemann* (2.28) *en* z_0*, alors* $f'(z_0)$ *existe et sa valeur est*

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(u_r(r_0, \theta_0) + iv_r(r_0, \theta_0)).$$

Exemple 2.9. $f(z) = 1/z = 1/r(\cos\theta - i\sin\theta),\ z \neq 0.$

$$u(r, \theta) = \cos\theta/r, \quad v(r, \theta) = -\sin\theta/r.$$

Les conditions du théorème 2.9.4 *sont vérifiées en chaque* $z \neq 0$*. en particulier, les équations de Cauchy-Riemann,*

$$ru_r = -\cos\theta/r = v_\theta, \quad u_\theta = -\sin\theta/r = -rv_r$$

sont vérifiées. Donc la dérivée de f *existe en chaque point* $z \neq 0$ *et*

$$f'(z) = e^{-i\theta}(-\cos\theta/r^2 + i\sin\theta/r^2) = -1/z^2$$

2.10 Fonction Analytique

On présente maintenant le concept d'une fonction analytique.

Définition 2.1. *Une fonction complexe* $f(z)$ *est dite analytique en un point* z_0*, holomorphe ou bien régulière, s'il a une dérivée en chaque point* z *dans un certain voisinage de* z_0*.*

Il est clair que si f est analytique à un point z_0, alors elle est analytique en chaque point dans un certain voisinage de z_0.

Définition 2.2. *Une fonction complexe* $f(z)$ *est dite analytique dans un ensemble ouvert* S*, si elle a une dérivée en chaque point dans* S*.*

Lorsqu'on parle d'une fonction analytique dans un ensemble S qui n'est pas ouvert, on doit comprendre que f est analytique dans un ensemble ouvert qui contient S.

Exemple 2.10. *La fonction* $f(z) = 1/z$ *est analytique en chaque point non nul* $z \in \mathbb{C}$*.*
La fonction $f(z) = |z|^2$ *n'est pas analytique partout dans* $\mathbb{C}$ *parce que sa dérivée existe seulement en* $z = 0$*.*

Définition 2.3. *Si* $f(z)$ *n'est pas analytique en* z_0*, mais analytique en un certain point* z *dans chaque voisinage de* z_0*, alors* z_0 *est appelé point singulier ou bien singularité de* f*.*

Exemple 2.11. *La singularité de $f(z) = 1/z$ est $z = 0$*
La fonction $f(z) = |z|^2$ n'est pas analytique partout dans $\mathbb{C}$, alors elle n'a pas de points singuliers.

Une condition nécessaire mais pas suffisante pour que f soit analytique dans un domaine D est la continuité de f dans D. La satisfaction des equations de Cauchy-Riemann est aussi une condition nécessaire mais pas suffisantes. Les conditions suffisantes d'analycité de f dans D sont données pas le théorème 2.9.3. Si deux fonctions f et g sont analytiques dans un domaine D, alors leur somme et leur produit sont analytique dans D. De même, leur quotient f/g est analytique pourvu que g est différente de zéro dans D.

Théorème 2.10.1. *Si $f'(z) = 0$ dans un domaine D, alors $f(z)$ est constante dans D.*

Preuve. Exercice Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et supposons que $f'(z) = 0$ dans D, alors $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$ et $v_y(x, y) + iu_y(x, y) = 0$. Par les equations de Cauchy-Riemann, on déduit que $u_x(x, y) = v_x(x, y) = u_y(x, y) = v_y(x, y) = 0$.

2.11 Fonctions Harmoniques

Une fonction réelle à deux variables réelles $f(x, y)$ est dite harmonique dans un domaine D, si dans tout le domaine D, elle a des dérivées partielles de premier et de deuxième ordre continues et vérifient l'équation différentielle partielle, dite équation de Laplace

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0. \tag{2.29}$$

Théorème 2.11.1. *Si une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique dans un domaine D, alors les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques dans D.*

Preuve. (Exercice) Pour montrer ce résultat, on utilise ce résultat qui sera démontré prochainement. Si une fonction est analytique en z_0, alors $u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont les dérivées partielles de tout ordre continues. Supposons que f est analytique dans D, alors $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient les equations de Cauchy-Riemann

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y). \tag{2.30}$$

On derive les deux cotés de (2.30) par rapport à x, on obtient

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y), \quad u_{yx}(x, y) = -v_{xx}(x, y). \tag{2.31}$$

La meme chose par rapport à y, on obtient

$$u_{xy}(x, y) = v_{yy}(x, y), \quad u_{yy}(x, y) = -v_{xy}(x, y). \tag{2.32}$$

La continuité des dérivées partielles de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ implique que

$$u_{yx}(x, y) = u_{xy}(x, y), \quad v_{yx}(x, y) = v_{xy}(x, y)$$

De (2.31) et (2.32), on déduit que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques parce que

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0.$$

Exemple 2.12. *La fonction $f(z) = 1/z^2$ est pas analytique dans $\mathbb{C}/\{0\}$. On peut vérifier facilement que*

$$f(z) = \frac{2xy + i(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Les fonction $u(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $\quad v(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, sont harmoniques dans chaque domaine D dans $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas 0.

Définition 2.4. *Si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques dans un domaine D et leurs dérivées partielles de premier ordre vérifient les equations de Cauchy-Riemann dans D, alors on dit que $v(x, y)$ est le conjugué harmonique de $u(x, y)$.*

Théorème 2.11.2. *Une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique dans le domaine D si et seulement si $v(x, y)$ est le conjugué harmonique de $u(x, y)$.*

Preuve. Exercice Si $v(x, y)$ est le conjugué harmonique de $u(x, y)$ dans D, alors f est analytique dans D. Inversement, si f est analytique dans D, alors par le théorème 2.11.1 les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques dans D. De plus, par le théorème 2.9.1, les equations de Cauchy-Riemann sont vérifiées.