

Correction de l'examen

#Réponses aux questions de cours (8pts) :

1- Calcul d'un déterminant $\rightarrow$ développement par rapport à la ligne i de la matrice A (1pt)

2- Quand A est une matrice diagonale $\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$ (1pt)

3- $\frac{d}{dt}[A^{-1}(t)] = -A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t)$ (1pt)

4- On utilise le développement $e^a = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a^k t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!}$

$$e^A = \exp(A) = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!}$$

$$e^{-A} = \exp(-A) = I_n - A + \frac{A^2}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{A^k}{k!}$$

Alors que $e^{-At} = I_n - At + A^2 \frac{t^2}{2!} - \dots + (-1)^k A^k \frac{t^k}{k!}$ est correcte (1pt)

5-

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{At} dt &= \int_0^t I_n dt + \int_0^t A t dt + \dots + \int_0^t A^k \frac{t^k}{k!} dt = I_n t + A \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= A^{-1} (I_n + At + \dots + A^{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}) - A^{-1} I_n \end{aligned} \quad \dots (1pt)$$

$$\int_0^t e^{At} dt = A^{-1} (e^{At} - I_n)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!}) \quad \dots (1pt)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = A e^{At}$$

6- Polynôme caractéristique $\rightarrow \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, ses racines sont les valeurs propre de A ? (0.5pt + 0.5pt)

7- La matrice diagonale d'une matrice A lorsque ses valeurs propres toutes distinctes est

donnée comme :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \dots (1pt)$$

8- Soit une matrice $A (5 \times 5)$ à des valeurs propres multiples (avec 2 valeurs propres : λ_1 de multiplicité 4 et λ_2 de multiplicité 1). les choix de sa matrice de représentation $\hat{A}$ lorsque : $\text{rang}(A - \lambda_1 I) = 3$ sont :