Corrigé des exercices

Réponse aux questions

1- L'équation de conservation de l'électricité est donnée par:

$$div(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2- La polarisation d'une onde radioélectrique est le plan dans lequel varie le champ électrique qui la compose.

3- Le système d'équations de *Maxwell* dans le cas d'un milieu parfaitement diélectrique:

$$\begin{cases} \vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{rot}(\vec{H}) = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ div(\vec{D}) = 0 \\ div(\vec{B}) = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations de *Maxwell* seul ne suffit pas pour résoudre tout problème d'électromagnétisme. Il faut ajouter les conditions initiales et les conditions aux limites.

4- Expression des champs $\vec{D}$ et $\vec{H}$ en fonction des potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire *V:*

$$\vec{D} = -\varepsilon.\vec{grad}(V) - \varepsilon.\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}.\vec{rot}(\vec{A})$$

5- L'expression mathématique du vecteur de Poynting est:

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Le vecteur de Poynting permet de calculer le flux de puissance par unité de surface transportée par l'onde électromagnétique.

6- Aux grandes distances l'expression du champ électrique pour un doublet vertical

$$E(\theta) = -\frac{j60\pi}{\lambda r}.i.dl.\sin(\theta).e^{-j\beta r}$$

Solution des exercices

Exercice 1

Pour un milieu donné, on a:

$$\begin{cases} \vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ div(\vec{E}) = 0 \\ div(\vec{B}) = 0 \end{cases}$$

Or: $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

D'où: $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ (1)

D'autre part:

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

D'où:

$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}$ (2)

$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ (3)

$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$ (4)

Avec $div\,\vec{B} = 0$, on obtient:

$div\,\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ (5)

Avec $\vec{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

d'où:

$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$ (6)

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (7)$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

(1) et (8) $\rightarrow E_z$ est indépendante de z et t $\rightarrow E_z$ est constante

(4) et (5) $\rightarrow B_z$ est indépendante de z et t $\rightarrow B_z$ est constante

On peut doit choisir E_z=0 et B_z=0

Exercice 2

Pour la surface fermée, on choisit une sphère de rayon *r*. Pour trouver la puissance totale rayonnée, la composante radiale de la densité de puissance est intégrée à travers toute la surface.

$$W_r = \iint_S \overline{P}.dS = \int_o^{2\pi}\int_o^{\pi}\left(\frac{A_o.\sin\ (\theta)}{r^2}\right) r^2.\sin(\theta).d\theta.d\varphi = \pi^2.A_o$$

2. $W_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\varphi).d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\varphi).\sin(\theta).d\theta.d\varphi$

Or : $U(\theta,\varphi) = \overline{P}.r^2 = \dfrac{A_o.\sin\ (\theta)}{r^2}.r^2 = A_o.\sin\ (\theta)$

Donc :

$$W_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\varphi).d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\varphi).\sin(\theta).d\theta.d\varphi = A_o.\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(\theta).d\theta.d\varphi. = \pi^2.A_o$$

Exercice 3

On a :

$U = A_o.\sin\ (\theta)$

Le maximum de rayonnement est obtenu pour $\theta = \pi/2$. Ainsi, $U_{\max} = A_o$.

D'autre part, nous avons déjà calculé :

$W_r = \pi^2.A_o$.

On obtient:

$$D_{\max} = \frac{U_{\max}}{U_I} = \frac{U_{\max}}{\frac{W_r}{4\pi}} = \frac{4}{\pi} = 1.27$$

Exercice 4

L'intensité de rayonnement est donnée par :

$U = r^2.P_r = A_o.\sin^2(\theta)$

Le maximum de rayonnement est selon la direction $\theta = \pi/2$. Ainsi, $U_{\max} = A_o$. La puissance totale rayonnée est donnée par :

$$W_r = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta,\varphi).d\Omega = A_o.\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(\theta).\sin(\theta)d\theta.d\varphi = A_o.\left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

La directivité est donnée par :

$$D_{\max} = \frac{U_{\max}}{U_I} = \frac{4\pi.U_{\max}}{W_r} = \frac{4\pi A_o}{\frac{8\pi}{3}.(A_o)} = \frac{3}{2}$$

Exercice 5

Soit un doublet vertical isolé dans l'espace et dont la longueur est demi - onde. Sa fonction caractéristique est : $F(\theta) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}.\cos\theta)}{\sin\theta}$.

A- Calculons son gain absolu G_o suivant les directions : $\theta = 0,10,20,30,40,50°$ sachant que : $G_o = 120.\dfrac{F^2(\theta)}{R_r}$ et $R_r = \dfrac{80\pi^2}{\lambda^2}.dl^2$

$$R_r = \frac{80\pi^2}{\lambda^2}.dl^2 = \frac{80\pi^2}{\lambda^2}.\frac{\lambda^2}{2^2} = 20.\pi^2 \approx 197.2\,\Omega$$

$\theta(°)$	0	10	20	30	40	50
$F(\theta)$	0	0.1374	0.2765	0.4178	0.5589	0.6946
G_o	0	0.0115	0.0465	0.1062	0.1901	0.2936

B- Traçons son diagramme de rayonnement pour les mêmes angles

Exercice 6

Ce gain est calculé selon la direction θ suivante :

On sait que : $G_o = \dfrac{E_{eff}^2(\theta).r^2}{30.W_r}$, $E_{eff}(\theta) = \dfrac{120\pi}{\lambda r}.I_{eff}.dl.\sin(\theta)$ et $W_r = \dfrac{160\pi^2}{\lambda^2}.I^2{}_{eff}.dl^2$

$$\text{D'où : } G_o = \frac{\dfrac{14400\pi^2}{(\lambda r)^2}.I_{eff}{}^2.dl^2.\sin^2(\theta).r^2}{30.\dfrac{160\pi^2}{\lambda^2}.I^2{}_{eff}.dl^2{}_r} = \frac{144}{48}.\sin^2(\theta) \approx 3.\sin^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{0.75}{3} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \pm 0.5 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm 30°$$