Correction d'examen Final

Exercice :01(3,5 Pts)

Pour montrer que la série alterné suivante est convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}.$$

il suffit d'après le critère d'Abel de montrer que la suite $(u_n)_n$ décroit vers 0 où $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$

1. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$(1,5pts)

   en effet

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(1-\frac{\ln n}{n})}$$

   comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

2. Montrons que la suite (u_n) est décroissante ; pour le faire calculons(2pts)

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{1}{n+1-\ln(n+1)}-\frac{1}{n-\ln n}\\&=\frac{\ln(n+1)-\ln n-1}{[(n+1)-\ln(n+1)]\,[n-\ln n]}\\&=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{[(n+1)-\ln(n+1)]\,[n-\ln n]}\end{aligned}$$

   Or on sait que $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 1$ ce qu'implique que $u_{n+1}-u_n\leq 0$ c'est à dire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

Exercice :02 (6,5 Pts)

1. Posons $f_n(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+n^2}$ donc l'étude des variations(2pts) de cette fonction (n est supposé comme étant un paramètre) nous donne que $\forall x\in[0,+\infty[, f_n(x)\leq f_n(x_0)$ où $x_0=\frac{n}{\sqrt{3}}$ ce qu'implique que $\forall x\in[0,+\infty[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+n^2}\leq\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$ c'est une série de Riemann convergente(1,5pts)

   Ainsi la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+n^2}$ converge uniformément.

2. Calculons le rayon de convergence R(1,5pts) de la série entière suivante ; pour cela calculons

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{4^{n+1}}{5(n-2)^2}x^{n+1}}{\frac{4^n}{5(n-3)^2}x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{4^{n+1}5(n-3)^2}{5(n-2)^2.4^n}|x| \\
&= 4|x|
\end{aligned}$$

D'après la règle de D'alembert (1,5pts) si $l<1$ alors notre série entière converge c'est-à-dire si $4|x|<1$ alors la série converge, ce qu'implique que $|x|<\frac{1}{4}$ ou encore $x\in\left]-\frac{1}{4},+\frac{1}{4}\right[$ ainsi $R=\frac{1}{4}$.

Exercice :03 (5 Pts)

Pour résoudre l'équation homogène suivante

$$2x^2y'-y^2=4xy.$$

écrivons la sous la forme standard (1pts) ;

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

puis, faisons le changement de fonction suivante(1,5pts) $t=\frac{y}{x}$ ce qu'implique que $dy=tdx+xdt$, ou encore $\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$.

Ainsi et comme $y'=\frac{dy}{dx}$; (1) devient

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}t^2+2t$$

c'est une équation à variable séparables, qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dt}{t\left(\frac{1}{2}t+1\right)}=\frac{dx}{x}$$

intégrons des deux cotés(1,5pts)

$$\begin{aligned}
\ln|x|+C &= \int\frac{dt}{t\left(\frac{1}{2}t+1\right)} \\
&= \int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{(t+2)} \\
&= \ln|t|-\ln|t+2| \\
&= \ln\left|\frac{t}{t+2}\right|
\end{aligned}$$

Composons des deux cotés avec la fonction exponentielle (1pts), nous trouvons

$$Kx=\frac{t}{t+2}\implies t=2\frac{Kx}{1-Kx}\quad \text{où } K=e^C$$

comme $t = \frac{y}{x}$ donc on aura $y(x) = 2\frac{Kx^2}{1-Kx}$.

Exercice :04 (5 Pts)

Calculons l'intégrale double suivante

$$\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} \text{ où } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

avec les coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$(1.5pts).

Avec ces coordonnées on sait que(1.5pts) $x^2+y^2 = r^2$ et $dxdy = rdrd\theta$, ainsi l'intégrale devient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\ln|1+r^2|\right]_0^1 d\theta$$

$$= \pi \ln 2 \text{(2pts)}.$$