Université Larbi Ben M'hidi d'Oum El Bouaghi
Département de Mathématiques et Informatique
Examen de Topologie (L2 Maths)
Durée 1h30m (15/01/2019)

Exercice1 (08pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit: $A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$ et soit la famille $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$

1. Montrer que $(\mathbb{N}, \tau)$ est un espace topologique
2. Ecrire l'ensemble F de touts les fermés de l'espace $(\mathbb{N}, \tau)$
3. Ecrire $V(m)$ Pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. Donner l'ensemble $\overset{0}{A}$ telle que $A = \{7, 24, 39\}$.
5. Montrer que l'ensemble $B = \{4, 8, 12, 16, ...\}$ est partout dense dans $\mathbb{N}$.

Exercice2(06pts)

Soit l'espace métrique $(]0, +\infty[\,, |.|)$, muni de la distance usuelle de l'espace $\mathbb{R}$, et soit l'application f : $]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$,définie par: $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que f est une application contractante
2. Montrer que f admet un seul point fixe a.
3. Calculer a.
4. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est définie par: $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice3(06pts)

Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$, et soit les deux ensembles suivantes:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1\right\} \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé les ensembles A et B
2. Montrer que A, B sont des fermés
3. Soit l'ensemble $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

Montrer que C est compact

4. Etudier la compacité de A.

Bon courage