Corrigé type

Ex 1

1) Soit une EDP valide dans Ω, munie de conditions aux frontières.

Le problème est bien posé si :

2 pts

- Il existe une sol. satisfaisant les conditions frontières (Existence)
- La solution doit être unique (Unicité).
- La solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (Stabilité).

2) Si $U(x,0) = U_y(x,0) = 0 \Rightarrow U \equiv 0$

on considère les conditions (2) $\begin{cases} U(x,0) = \frac{1}{n}\cos(nx) \\ U_y(x,0) = 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors, par séparation des variables on trouve facilement la sol.

2 pts

$U(x,y) = \frac{1}{n}\cos(nx)\,ch(ny)$.

Lorsque n est grand, la condition $U(x,0) = \frac{1}{n}\cos(nx)$ diffère peu de la condition $U(x,0) = 0$, mais la sol. diffère beaucoup à cause du 'ch', le prob. n'est stable et donc il est mal posé.

Ex2

1) l'EDP proposée : $(2xy-1)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-2x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x-yz)$

a pour système différentiel associé :

$$\frac{dx}{2xy-1} = \frac{dy}{z-2x^2} = \frac{dz}{2(x-yz)}$$ (1pt)

• l'eqn. $2(x-yz)=0$, ne fournit aucune solution (0,5 pt.)

• pour $x-yz \neq 0$, on trouve facilemt :

$$\frac{2x\,dx + 2y\,dy + dz}{4x^2y - 2x + 2yz - 4x^2y + 2x - 2yz} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + dz}{0},$$ (1 pt.)

qui donne l'intégrale première $U(x,y,z) = z + x^2 + y^2$.

Aussi, il apparaît :

$$\frac{z\,dx + dy + x\,dz}{2xyz - z + z - 2x^2 + 2x^2 - 2xyz} = \frac{dy + z\,dx + x\,dz}{0};$$ (1pt)

il en résulte l'intégrale première $V(x,y,z) = y + xz$. (0,5 pt.)

Il est facile de vérifier que U et V sont fn. indépendantes.

$\Rightarrow$ la sol. générale est $F(z+x^2+y^2,\ y+xz) = 0$ où F fn. arbitraire (1pt)

2) La surface intégrale de l'EDP considérée, qui contient la droite (Δ) est définie par les relations :

$$\begin{cases} z+x^2+y^2 = C_1 \\ y + xz = C_2 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \ \text{t.q.}\ C_1, C_2 = c^{te}$$ (1pt)

on a de suite : $z+1 = C_1$, $z = C_2$, on en déduit $C_1 = C_2 + 1$. (1pt)

d'où l'eqn. de la surface $z + x^2 + y^2 - y - xz - 1 = 0$.

(1 pt.)

Ex3

1) on a ici : $a(x,y)=1$, $b(x,y)=0$ et $c(x,y)=y$ qui entraîne :

$\Delta'(x,y)=b^2-ac=-y$; on en conclut :

- si $y<0$, l'EDP est du type hyperbolique. 1 pt

- si $y>0$, " " elliptique.

2) Envisageons en premier lieu le cas où $y<0$:

$\Rightarrow$ les courbes cara. sont déterminées par : $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-y}$ 1 pt

qui s'intègre et donne $2\sqrt{-y}\pm x=c^{te}$

on utilise le changement de variables : $\begin{cases}\xi=x+2\sqrt{-y}\\ \eta=x-2\sqrt{-y}\end{cases}$ 1 pt

à l'aide des formules du cours, on déduit la forme standard pour $y<0$,

1 pt. de l'équ. proposée : $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)$ 0,5 pt.

- Travaillons maintenant pour $y>0$:

$\Rightarrow$ les courbes cara. sont encore déterminées par : $\frac{dy}{dx}=\pm i\sqrt{y}$ 1 pt

qui s'intègre et donne : $x\pm 2i\sqrt{y}=c^{te}$.

On utilise donc le changement de variables $\begin{cases}\xi=x\\ \eta=2\sqrt{y}\end{cases}$ 1 pt.

puisque $\frac{\partial\xi}{\partial x}=1$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$, on trouve 1 pt

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$ et $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{1}{2y^{3/2}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}$

on en conclut que la forme standard, pour $y>0$ est :

$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$ soit enfin $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$

0,5 pt.