Vibrations et Ondes (F312) : Cours et Exercices Corrigés Partie I : Vibrations

Book · May 2018

Syham Kadri
Université Tahri Mohammed Béchar

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Tahri Mohammed Bechar

Faculté des sciences exactes

Département des sciences de la matière

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامـــعة طاهري محمد بشـــار

كلية العلوم الدقيقة

قســـم علوم المادة

N d'ordre : ………..

Filière : Physique

Spécialité : 2LSM-Physique et 2LST

Module : Vibrations et Ondes

Vibrations et Ondes (F312) : Cours et Exercices Corrigés
Partie I : Vibrations

Présenté par :

Dr. Kadri Syham

Année Universitaire : 2014/2015

Avant Propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants 2LMD dont les spécialités suivantes :

- Sciences Technologiques (ST) : Electrotechnique (ETT), Electronique (EN), Génie mécanique (GM), Hydraulique (Hyd) et Génie civil (GC).
- Sciences de la Matière : socles commun.

Il s'agit d'un module de base qui traite les oscillations des systèmes mécaniques et électriques et qui a connu ces dernières années un essor important. Il a permis de développer énormément les techniques à même de résoudre les problèmes physiques des différents domaines.

Ce document est un cours détaillé avec des exercices corrigés et des propositions d'exercices à résoudre. Il comprend cinq chapitres cités ci-dessous :

- Chapitre I : Introduction aux équations de Lagrange.
- Chapitre II : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté.
- Chapitre III : Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté.
- Chapitre IV : Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté.
- Chapitre V : Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté.

L'objectif recherché consiste à donner aux étudiants des éléments qui leurs permettront d'enrichir leurs connaissances d'une part et d'autre part les aidés à maîtriser d'avantage les problèmes qu'ils peuvent rencontrer dans le présent module.

L'auteur

Table de Matière

Chapitre I:
Introduction aux équations de Lagrange

I- Introduction aux équations de Lagrange

I-1- Introduction

Une vibration est un mouvement autour de la position d'équilibre. Elle est caractérisée par une équation de mouvement de type d'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t) \tag{I-1}$$

avec :

y : Le déplacement (m)

$\dot{y}$: La vitesse (m/s)

$\ddot{y}$: L'accélération (m/s^2)

δ : Le coefficient d'amortissement

ω_0 : La pulsation libre (rad/s)

A(t) : Le second membre.

La méthode de résolution de l'équation différentielle (I-1) est schématisée sur l'organigramme de la figure I-1. Pour résoudre une équation du second ordre avec second membre, on suit la méthode suivante :

Premièrement on cherche la solution homogène $y_H(t)$ lorsque le second membre A(t)=0. Pour cela, on considère que la solution a une forme exponentielle $y(t) = e^{st}$. L'équation différentielle homogène est transformée en une équation caractéristique de deuxième degré d'une variable s qui nous permettra de déterminer les solutions s_1, s_2 par le calcul du discriminant$\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe trois solutions homogènes selon les cas de Δ illustré sur l'organigramme. Deuxièmement, on cherche la solution particulière $y_p(t)$ lorsque le second membre $A(t) \neq 0$. Dans l'organigramme, on constate deux cas d'excitations :

- Une excitation constante
- Une excitation sinusoïdale.

La solution particulière $y_p(t)$ est déterminée selon la règle suivante :

« **La solution particulière suit la forme générale du second membre de l'équation différentielle** ».

Enfin, la solution générale de l'équation différentielle du second ordre avec second membre est donnée par la somme des deux solutions homogène et particulière.

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$$

A(t)=0

Equation homogène :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

On cherche une solution homogène $y_H(t)$

Equation caractéristique :

$$s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 = 0$$

Δ>0

$$y_H(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Δ=0

$$y_H(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$$

Δ<0

$$y_H(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega_D t + \varphi)$$

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

A(t)≠0

Equation générale :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$$

On cherche la solution particulière $y_p(t)$

$A(t)=A_0$

$$y_p(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

$A(t)=A_0cos(\Omega t)$

$$y_p(t) = y_0 cos(\Omega t + \varphi)$$

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\varphi = -Arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Fig. I-1. Organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre

I-2- Caractéristiques d'une oscillation sinusoïdale harmonique

Une vibration est sinusoïdale lorsqu'une masse attachée au bout d'un ressort est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée. Une vibration est périodique lorsque les mouvements se reproduisent globalement identiques à eux-mêmes à des périodes de temps mesurables. Elle est de la forme :

$$x(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi) \tag{I-2}$$

ou bien :

$$x(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi) \tag{I-3}$$

avec :

φ est le déphasage par rapport à l'origine des temps.

A est l'amplitude maximale du signal (m).

L'amplitude d'une fonction sinusoïdale est une mesure de sa hauteur par rapport à sa médiane.

ω_0 est la pulsation libre (rad/s)

La pulsation est une grandeur proportionnelle à la fréquence d'un phénomène périodique.

$$\omega = 2\pi f \tag{I-4}$$

f est la fréquence (Hz)

La fréquence est le nombre de cycles par seconde, et qui est l'inverse de la période T.

$$f = \frac{1}{T} \tag{I-5}$$

T est la période (s)

La période est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit comme le montre la figure I-2.

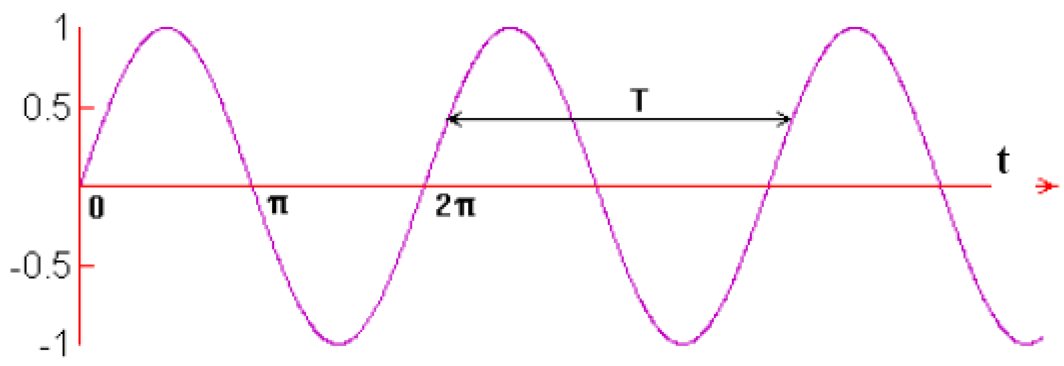


Fig. I-2. Définition de la période T

I-3- Equation de Lagrange pour une particule

L'équation de Lagrange est donnée par la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=F_{ext,q} \tag{I-6}$$

avec :

L est le lagrangien définit par :

$$L=E_c-E_p=T-U \tag{I-7}$$

avec :

E_c, T est l'énergie cinétique du système.

E_p, U est l'énergie potentielle du système.

q est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

Le degré de liberté est égal au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons (R).

$$d=N-R \tag{I-8}$$

Pour un système **conservatif**, la force appliquée dérive d'un potentiel et l'équation (I-6) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{I-9}$$

Dans le cas d'une force de frottement dépendant de la vitesse ($\vec{f}=-\alpha\vec{v}$), l'équation (I-6) devienne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\alpha\dot{q} \tag{I-10}$$

L'équation (I-10) se généralise à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0 \tag{I-11}$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$. Elle est liée à la force de frottement par : $f_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$.

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation (I-11) s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q} \quad \text{(I-12)}$$

Et pour un système à plusieurs degrés de liberté,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,q_i} \quad \text{(I-13)}$$

i=1,2,……,n

I-4-Exercices corrigés

Exercice N°1

Résoudre les équations différentielles pour les conditions initiales suivantes : $y(0) = 0\ et\ \dot{y}(0) = 0$

a- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4$
b- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2cos(5t)$
c- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2$
d- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 3cos(3t)$
e- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 6$
f- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2cos(2t)$

Solution N°1

a- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4$

Pour résoudre l'équation (a), en premier temps on cherche la solution homogène lorsque A(t)=0. L'équation (a) devienne :$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$

On transforme l'équation différentielle à une équation d'une variable de second ordre. On pose la solution$y(t) = e^{st}$. L'équation différentielle homogène devienne :

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \quad \text{(a-1)}$$

On calcul le déterminant Δ=9-8=1>0. L'équation (a-1) admet deux solutions différentes données par :

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En remplaçant les constantes, on trouve les deux solutions : s_1=-1 et s_2=-2.

D'après l'organigramme, la solution homogène est donnée par :

$$y_H(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

On cherche la solution particulière lorsque : A(t)≠0. La solution particulière suit toujours la forme du second membre.

$$y_p(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{4}{2} \Rightarrow y_p(t) = 2$$

Et la solution générale :$y(t) = 2 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

Pour déterminer les constantes d'intégration A_1 et A_2, on utilise les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \Rightarrow 2 + A_1 + A_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow 2 - A_1 - 2A_2 = 0$$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A_1=-6 et A_2=4. Et finalement la solution générale de l'équation (a) est :

$$y(t) = 2 - 6e^{-t} + 4e^{-2t}$$

b- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2cos(5t)$

La solution homogène de l'équation (b) est la même que l'équation (a). Et la solution particulière est égale à :

$$y_p(t) = y_0 cos(\Omega t + \varphi)$$

Avec :

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = 0.07$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = 35.54° = 0.2\pi$$

Et la solution générale :

$$y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 0.07\cos(5t + 0.2\pi)$$

On introduit les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration :

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0.0566 + A_1 + A_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -0.2 - A_1 - 2A_2 = 0$$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A_1=0.0868 et A_2=-0.1434. Et finalement la solution générale de l'équation (a) est :

$$y(t) = 0.07cos(5t + 0.2\pi) + 0.0868e^{-t} - 0.1434e^{-2t}$$

c- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2$

L'équation homogène est :$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$

L'équation d'une variable de second ordre est :

$$s^2 + 4s + 5 = 0 \qquad \text{(c-1)}$$

On calcul le déterminant Δ=16-25=-9<0.

D'après l'organigramme, la solution homogène est donnée par :

$$y_H(t) = Ae^{-2t}cos(\omega_D t + \varphi)$$

Avec :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 1$$

La solution particulière de l'équation (c) est donnée par :

$$y_p(t) = \frac{2}{5}$$

Et la solution générale :$y(t) = \frac{2}{5} + Ae^{-2t}cos(t + \varphi)$

Pour déterminer les constantes d'intégration A et φ, on utilise les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{2}{5} + Acos(\varphi) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2Acos(\varphi) - Asin(\varphi) = 0$$

On déduit A de la première relation et on la remplace dans la deuxième équation, on aboutit :

$$A = 0.88$$

$$\varphi = -63.4° = -0.35\pi$$

Et la solution générale est égale à :

$$y(t) = \frac{2}{5} + 0.88e^{-2t}cos(t - 0.35\pi)$$

d- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 3cos(3t)$

La solution homogène de l'équation (d) est la même que l'équation (c). Et la solution particulière est égale à :

$$y_p(t) = y_0 cos(3t + \varphi_1)$$

Avec :

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = 0.237$$

$$\varphi_1 = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = 71.565° = 0.4\pi$$

Et la solution générale :

$$y(t) = Ae^{-2t}cos(t + \varphi_2) + 0.237\cos(3t + 0.4\pi)$$

On introduit les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration :

$$y(0) = 0 \Rightarrow Acos(\varphi_2) + 0.07 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2Acos(\varphi_2) - Asin(\varphi_2) - 0.676 = 0$$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A=-0.56 et φ_2=0.46π. Et finalement la solution générale de l'équation (d) est :

$y(t) = 0.237cos(3t + 0.4\pi) - 0.56cos(t + 0.46\pi)$

e- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 6$

L'équation homogène est :$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$

L'équation d'une variable de second ordre est :

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \qquad \text{(e-1)}$$

On calcul le déterminant Δ=16-16=0.

L'équation admet une solution double égale :

$$s_{1,2} = \frac{-b}{2a} = -2$$

D'après l'organigramme, la solution homogène est donnée par :

$$y_H(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

La solution particulière de l'équation (e) est donnée par :

$$y_p(t) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Et la solution générale :$y(t) = \frac{3}{2} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$

Pour déterminer les constantes d'intégration A_1 et A_2, on utilise les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} + A_1 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2A_1 + A_2 = 0$$

On déduit A_1=-3/2 et A_2=3. Et la solution générale est égale à :

$$y(t) = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2} + 3t\right)e^{-2t}$$

f- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2cos(2t)$

La solution homogène de l'équation (f) est la même que l'équation (e). Et la solution particulière est égale à :

$y_p(t) = y_0 cos(2t + \varphi)$

Avec :

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = 0.25$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = 90° = \frac{3}{2}\pi$$

Et la solution générale :

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t} + 0.25\cos(2t + \frac{3}{2}\pi)$$

On introduit les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration :

$y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2A_1 + A_2 + 0.5 = 0$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A_1=0 et A_2=-0.5. Et finalement la solution générale de l'équation (f) est :

$$y(t) = -0.5te^{-2t} + 0.25cos\left(2t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Exercice N°2

Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant :

$$x(t) = 5cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ou *x* en centimètres, t en secondes et la phase en radians.

1- Déterminer l'amplitude maximale.

2- Donner la pulsation propre, la fréquence et la période du mouvement.

3- Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).

4- Calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0s et t=0.5s.

Solution N°2

1- L'amplitude maximale est **5 cm**.

2- La pulsation propre est ω_0 **= 25 rad.s^{-1}**, la fréquence f = **3.98 Hz** et la période propre T_0 = **0.25 s.**

3- La phase initiale φ = **π/3 rad.**

4- Le déplacement, la vitesse et l'accélération à t=0 s:

$$x(0) = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5\ m$$

$$\dot{x}(0) = -125\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -108.25\ m/s$$

$$\ddot{x}(0) = -3125\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1562.5\ m/s^2$$

A t=0.5 s,

$$x(0.5) = 5\cos\left(12.5 + \frac{\pi}{3}\right) = 1.5\ m$$

$$\dot{x}(0.5) = -125\sin\left(12.5 + \frac{\pi}{3}\right) = -119.2\ m/s$$

$$\ddot{x}(0.5) = -3125\cos\left(12.5 + \frac{\pi}{3}\right) = -939.7\ m/s^2$$

Exercice N°3

Un mouvement harmonique est décrit par :

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les conditions initiales sont : $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$,

1. Calculer X et φ.

2. Exprimer $x(t)$ sous la forme $x(t)=Bcos(\omega_0 t)+Csin(\omega_0 t)$ et en déduire B et C

Solution N°3

1- L'amplitude maximale X et le déphasage à l'origine

$$\begin{cases} x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}_0(t) = -Xw_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{cases} x(0) = Xcos(\varphi) = x_0 \\ \dot{x}_0(0) = -X\omega_0\sin(\varphi) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{x_0}{X} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ \sin(\varphi) = -\frac{\dot{x}_0}{X\omega_0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2) \end{cases}$$

Pour obtenir l'amplitude maximale on fait la somme du carré de deux équations (1) et (2),

$(1)^2+(2)^2 \Rightarrow X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$

Et pour le déphasage, on divise l'équation (2) par l'équation (1),

$$tan\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = -\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0} \Rightarrow \varphi = -Arc\tan(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0})$$

2- Pour exprimer *x(t)* sous la forme $x(t)=Bcos(\omega_0 t)+Csin(\omega_0 t)$, on utilise la formule trigonométrique suivante :

$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t)cos\varphi - Xsin(\omega_0 t)sin\varphi$$

$$x(t) = Bcos(\omega_0 t) + Csin(\omega_0 t) \dots\dots\dots\dots\dots\dots. (4)$$

Par analogie entre l'équation (3) et (4), on peut tirer :

$$\begin{cases} B = Xcos\varphi \\ C = -Xsin\varphi \end{cases}$$

Exercice N°4

1- Quel est le nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système (*Fig.I-3*).

2- Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.

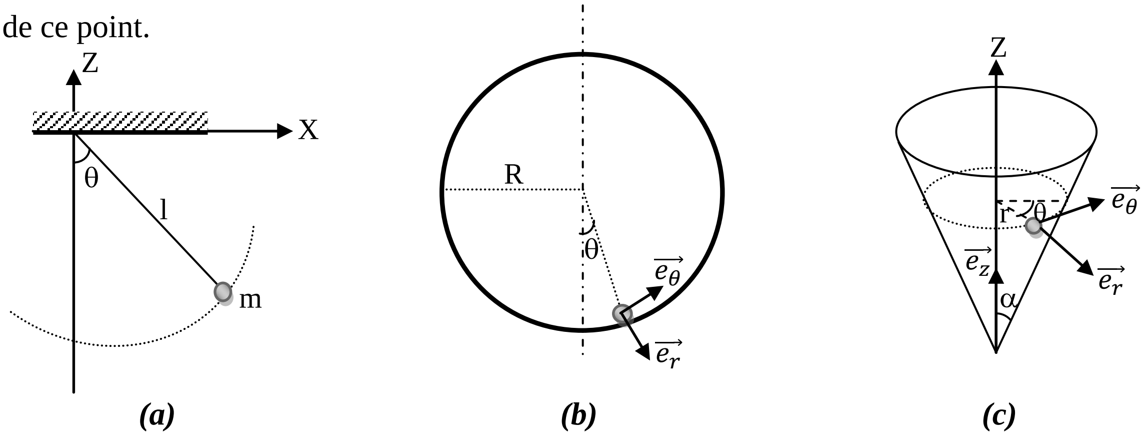


Fig.I-3. Différents systèmes :

(a)- un pendule simple, (b)- un cercle, (c)- un cône

Solution N°4

Le système (a) :

1- Le point m est défini par :

$$\begin{cases} x = lsin\theta \\ z = lcos\theta \end{cases} \Rightarrow \text{N=2}$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{x^2+z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow \text{R=1}$$

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

2- La coordonnée généralisée qui définie le système est : θ

Le système (b) :

1- Le point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{e_r} = Rcos\theta\overrightarrow{e_x} - Rsin\theta\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{e_\theta} = Rsin\theta\overrightarrow{e_x} + Rcos\theta\overrightarrow{e_y}$

Et par conséquent :

$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow$ N=2

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$x^2 + z^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \qquad \Rightarrow$ R=1

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

Le système (c) :

1- Le point M est défini par :

$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow$ N=2

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$x^2 + z^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \qquad \Rightarrow$ R=1

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

Exercice N°5

Soit le système mécanique de la figure I-4, constitué d'une masse m et un ressort de raideur équivalente k. Trouver l'équation différentielle du mouvement par la méthode de Newton et la méthode de Lagrange.

Solution N°5

a- Méthode de Newton

à l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{T}$: la force de rappel du ressort

$\vec{P}$: le poids de la masse m

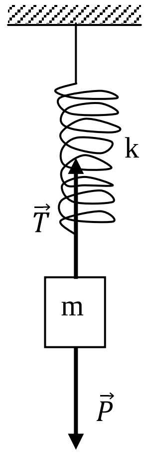


Fig.I-4. Système masse ressort

$mg - k.x_0 = 0$ C'est la condition d'équilibre

Au mouvement : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = mg - k(x + x_0)$

En appliquant la condition d'équilibre, l'équation devienne :

$m\ddot{x} + kx = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Avec : ω_0 est la pulsation libre est égale : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b- Méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange est :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

Le lagrangien est donné par : $L = E_c - E_p$

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$

Et

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

En utilisant l'équation de Lagrange :

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

L'équation différentielle de mouvement est comme suit :

$m\ddot{x} + kx = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercice N°6

Déterminer l'équation de mouvement d'un pendule simple de la Figure I-5, constitué d'une masse m et fils de longueur *l* de masse négligeable pour des faibles oscillations par la méthode de Newton puis par la méthode de Lagrange.

Solution N°6

a- Méthode de Newton

D'après 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{M_O} = I\frac{d\vec{\dot{\theta}}}{dt}$$

$$\overrightarrow{M_{\vec{T}/O}} + \overrightarrow{M_{\vec{P}/O}} = I\vec{\ddot{\theta}}$$

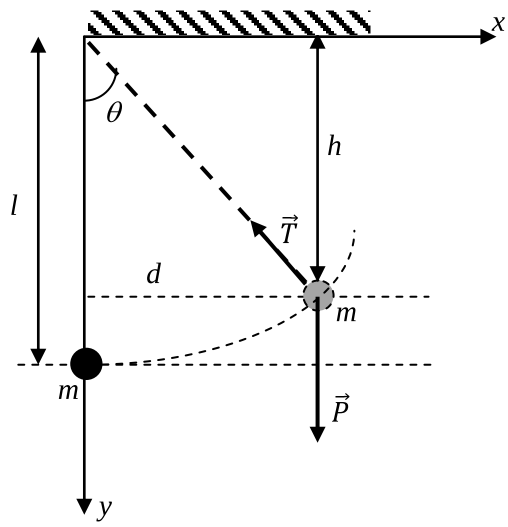


Fig.I-5. Pendule simple

Le moment de la tension est nul et le moment du poids est donné par :

$$-mgd = I\ddot{\theta}$$

Avec $I=ml^2$ est le moment d'inertie du pendule.

Et $d=l\sin\theta$

L'équation devienne :

$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{I-8})$$

Pour les faibles oscillations : $\sin\theta \approx \theta$ l'équation (I-8) devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Avec : w_0 est la pulsation libre est égale : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

b- Méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange caractérisant le système est donnée par :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ou $L=E_c\text{-}E_p$

$E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ et $E_p = -mgh = -mglcos\theta$

Pour les faibles oscillations $sin\theta \approx \theta$ et $cos\theta = 1\text{-}\theta^2/2$

L'énergie potentielle s'écrit :

$E_p = -mgl + \frac{mgl}{2}\theta^2$

Et le Lagrangien :

$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2 + mgl$

Appliquant l'équation de Lagrange :

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange :

$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Et la pulsation libre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Exercice N°7

Soit le circuit électrique de la figure I-6 constitué d'une bobine et d'un condensateur. Trouver l'équation différentielle du mouvement du circuit.

Solution N°7

a- D'après la loi de Kirchhoff

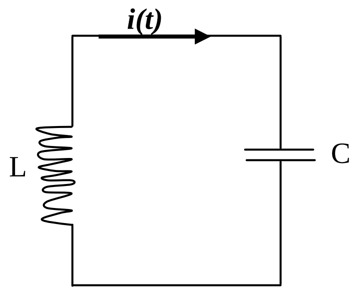


Fig.I-6. Circuit LC

$V_c+V_L=0 \quad \Rightarrow L\frac{di(t)}{dt}+\frac{q}{c}=0$

Comme $i(t)=\frac{dq}{dt}$, l'équation différentielle de mouvement s'écrit :

$L\ddot{q}+\frac{q}{c}=0 \quad \Rightarrow \ddot{q}+\omega_0^2 q=0$

La pulsation propre $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{Lc}}$

b- Méthode de Lagrange

$E_c=E_{mag}=V_L dq=\int L\frac{di}{dt}dq=\int Lidi=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}L\dot{q}^2$

$E_p=E_{elec}=V_c dq=\int \frac{q}{c}dq=\frac{1}{c}q^2$

Le Lagrangien : $L=\frac{1}{2}L\dot{q}^2-\frac{1}{q}q^2$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=L\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=L\ddot{q}$

$\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{1}{c}q$

L'équation différentielle de mouvement :

$L\ddot{q}+\frac{q}{c}=0 \;\; \Rightarrow \;\; \ddot{q}+\frac{1}{Lc}q=0$

Et la pulsation propre : $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{Lc}}$

I-5- Exercices non corrigés

Exercice N°1

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.

1) Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide?

2) Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide?

3) Quel est le nombre de degrés de liberté pour un solide qui possède : a) un point fixe? b) deux points fixes?

Exercice N°2

On considère un haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a, de diamètre et de masse négligeables.

1) Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses?

2) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système?

Exercice N°3

Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes de la figure I-7.

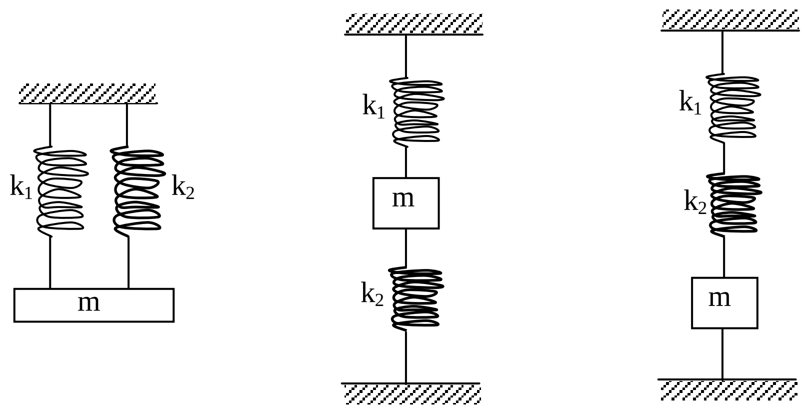


Fig.I-7. Différents systèmes masse ressort

Exercice N°4 :

La figure I-8 illustre un circuit électrique constitué d'une self L (de résistance supposée négligeable) et d'un condensateur de capacité C. La capacité possède une charge Q.

A l'instant initial, l'interrupteur K est fermé puis le système oscille librement (voir figure).

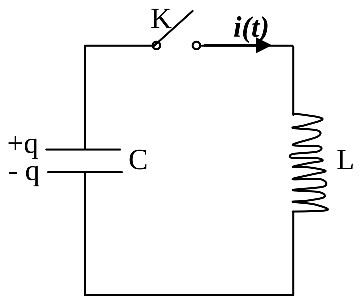


Fig.I-8. Circuit LC

1) Ecrire l'équation qui régit les variations de la charge q du condensateur au cours du temps.

2) Résoudre cette équation et déterminer la période de cet oscillateur.

Effectuer l'application numérique pour L=0.5H, C=0.5µF.et Q=0.5µC.

3) Calculer l'énergie du condensateur, celle de la self et l'énergie totale du circuit. Que remarque-t-on ?

4) Faire l'analogie avec une masse m accrochée à un ressort.

Chapitre II:
Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II- Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II-1- Oscillateur linéaire

Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

II-2- Conditions d'équilibre

Les deux conditions qui définissent le mouvement vibratoire sont :

La condition d'équilibre :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial q}\right]_{q=0} = 0 \qquad \text{(II-2)}$$

Et la condition de stabilité est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\right]_{q=0} > 0 \qquad \text{(II-3)}$$

La figure II-1 illustre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de déplacement x. Dans un mouvement vibratoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle. Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

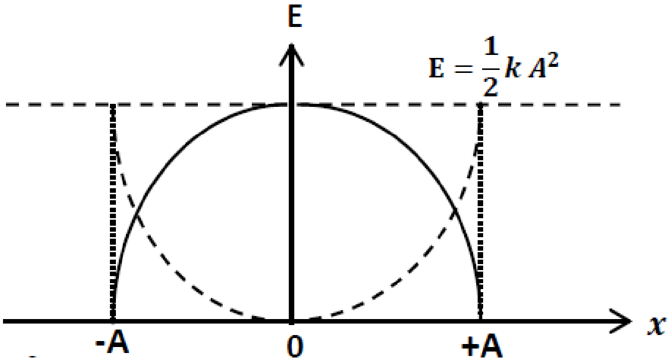


Fig. II-1. Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x

II-3- Equation différentielle

L'équation de Lagrange pour les oscillations libres d'un système conservatif est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{II-4}$$

La solution de l'équation (II-1) est donnée par :

$$q(t)=Acos(\omega_0 t+\varphi) \tag{II-5}$$

Pour calculer les constantes A et φ, il nous faut les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0)=q_0 \\ \dot{q}(t=0)=\dot{q}_0 \end{cases} \tag{II-6}$$

En remplaçant l'équation (II-5) et sa dérivée dans l'équation (II-6), on aboutit :

$$\begin{cases} Acos\varphi=q_0 \\ -A\omega_0 sin\varphi=\dot{q}_0 \end{cases} \tag{II-7}$$

Pour calculer la constante A, on met les équations (II-7) au carré puis on les additionne terme par terme, on aboutit :

$$1=\left(\frac{q_0}{A}\right)^2+\left(\frac{\dot{q}_0}{Aw_0}\right)^2 \Rightarrow A^2\omega_0^2=q_0^2\omega_0^2+\dot{q}_0^2$$

Et enfin,

$$A=\sqrt{\frac{q_0^2\omega_0^2+\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}} \tag{II-8}$$

Et le déphasage,

$$tg\varphi=-\frac{\dot{q}_0}{q_0\omega_0} \Rightarrow \varphi=-Arctg\left(\frac{\dot{q}_0}{q_0\omega_0}\right) \tag{II-9}$$

II-4- Oscillations libres amorties à un degré de liberté

Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prisent en considération. Les frottements sont visqueux et dépend de la vitesse.

II-4-1- Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange des oscillations amorties est citée ci-dessus dans l'équation (I-10) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0 \qquad \text{(II-10)}$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 \Longrightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=\alpha\dot{q} \qquad \text{(II-11)}$$

La forme de l'équation différentielle est :

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2 q=0 \qquad \text{(II-12)}$$

Avec :

δ est le coefficient d'amortissement.

ω_0 est la pulsation libre.

II-4-2- Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle (II-12) dépend de la valeur de δ par rapport à w_0. On distingue trois régimes : le régime apériodique, le régime critique et le régime pseudo périodique.
Le régime est apériodique (fortement amorti) si $\delta>\omega_0$, et la solution est de la forme :

$$q(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \qquad \text{(II-13)}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure II-2 représente la solution q(t) en fonction du temps dans le cas particulier ou $q(0)=q_0$ et $\dot{q}(0)=0$. La solution q(t) varie exponentiellement vers zéro.

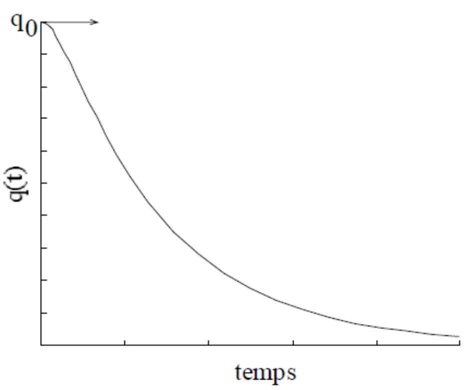


Fig. II-2. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime fortement amorti (sur amorti)

Si $\delta=\omega_0$ le régime est critique (Figure II-3), et la solution est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t} \qquad \text{(II-15)}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales. La figure II-3 montre la variation de la solution q(t) en fonction du temps. q(t) est une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente.

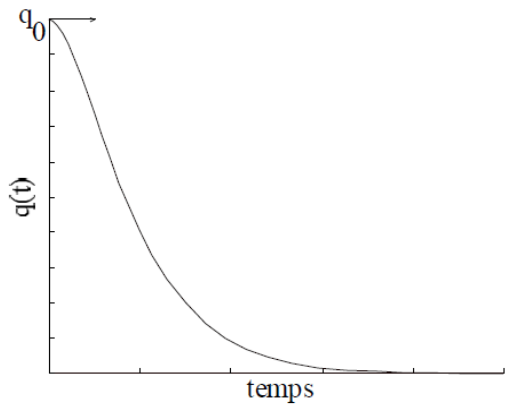


Fig. II-3. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime critique

Si $\delta<\omega_0$ le régime est pseudopériodique (Figure II-4), et la solution est de la forme :

$$q(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega_D t + \varphi) \qquad \text{(II-14)}$$

A, φ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. ω_D est la pseudo pulsation définie par : $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

La figure II-4 illustre la variationde q(t) en fonction du temps. On remarque que q(t) est envloppée par deux fonctions exponentielles. Le lieu des maxima est obtenu en résolvant $\dot{q(t)}$=0. Les maxima de q(t) sont séparés par des intervalles réguliers égaux à T_A. T_A est appelé la pseudo-période. On remarque que la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ($\delta << \omega_0$), on peut remarquer que $\omega_D \approx \omega_0$ et que la pseudo période est peu différente de la période propre : $T_A \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

.

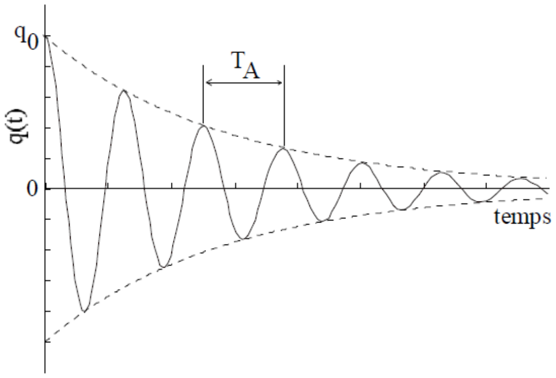


Fig. II-4. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime faiblement amorti (sous amorti)

II-4-3- Décrément logarithmique

La figure II-5 représente la définition du décrément logarithmique. Il est défini par le logarithme du rapport des deux amplitudes successives des oscillations amorties :

$$D = ln\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = ln\frac{A(t_1)}{A(t_1+T_a)} = -ln\frac{A(t_1+T_a)}{A(t_1)} \qquad \text{(II-16)}$$

En remplaçant les formules des amplitudes, on obtient à :

$$D = \delta T_a \qquad \text{(II-17)}$$

ou

δ est le coefficient d'amortissement.

T_a est le pseudo période. Elle est donnée par :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_D} \qquad \text{(II-18)}$$

avec :

w_D est la pseudo pulsation, elle est égale à :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad \text{(II-19)}$$

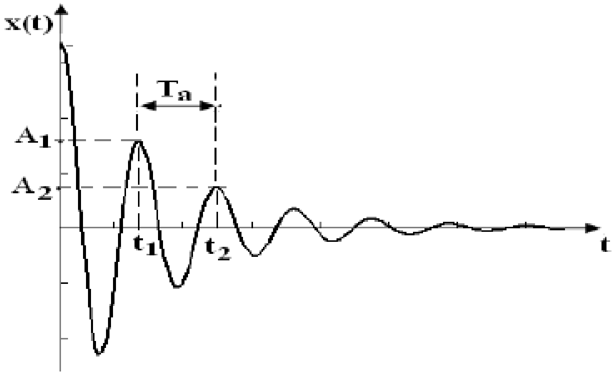


Fig. II-5. Définition du décrément logarithmique

II-5- Analogie électromécanique

L'analogie entre le système mécanique masse-ressort et le système électrique RLC est regroupée dans le tableau suivant :

Systèmes mécaniques		Système électrique
Translation	**Rotation**	**Circuit RLC**
Déplacement : x	Angle : θ	Charge : q
Vitesse : $\dot{x}$	Vitesse angulaire : $\dot{\theta}$	Courant : $\dot{q}$
Accélération : $\ddot{x}$	Accélération angulaire : $\ddot{\theta}$	Variation de courant : $\ddot{q}$
Constante de raideur : k	Constante de torsion : C	Inverse de la capacité : 1/c
Masse : m	Moment d'inertie : I	Inductance : L
Coefficient d'amortissement : δ	Coefficient d'amortissement : δ	Résistance : R
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$
Energie potentielle : $\frac{1}{2}kx^2$	$-mgh$	Energie électrique : $\frac{1}{2c}q^2$

Tableau. II-1. Analogie électromécanique

II-6- Raideur équivalente

Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle.

II-6-1- Raideur en parallèle

La figure II-6 schématise l'association en parallèle de deux ressorts.

L'équilibre des forces conduit à :

$k_1.x+k_2.x=k_{eq}.x \Rightarrow k_{eq}=k_1+k_2$ est la raideur équivalente.

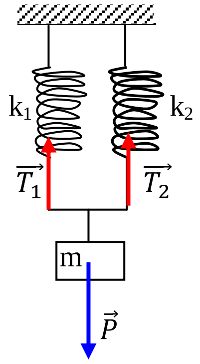


Fig. II-6. Association en parallèle des raideurs

II-6-2- Raideur en série

La figure II-7 schématise l'association en série de deux ressorts.

L'équilibre des forces conduit aux relations suivantes :

$$k_1.x_1=k_{eq}.x \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{k_{eq}}{k_1}x$$

$$k_2.x_2=k_{eq}.x \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{k_{eq}}{k_2}x$$

L'élongation totale : $x=x_1+x_2$

$$x=\left(\frac{k_{eq}}{k_1}+\frac{k_{eq}}{k_2}\right)x \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$ est la raideur équivalente

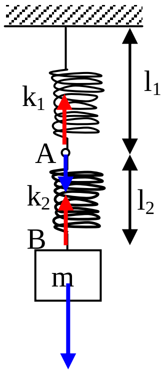


Fig. II-7. Association en série des raideurs

II-7- Exercices corrigés

Exercice N°1

Une tige OC de masse négligeable est articulée sans frottement au point O et porte à son extrémité C une masse m (Figure II-8). Deux ressorts de raideur k_1 et k_2 sont liés à la tige aux points A et B respectivement. A l'équilibre, la tige est horizontale et elle est écartée d'un angle θ supposé très petit (les faibles oscillations).

$OA=l_1$

$OB=l_2$

$OC=l$

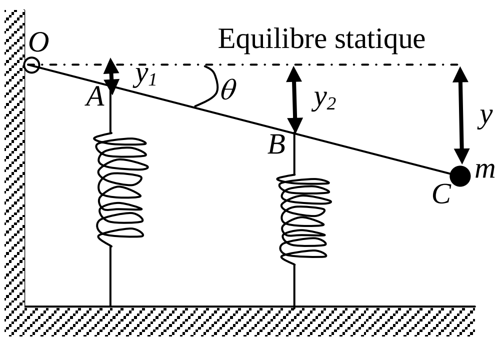


Fig. II-8. Système mécanique pendule-ressort

1- Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

2- Déduire le lagrangien.
3- Etablir l'équation du mouvement.
4- Trouver la solution θ(t) si $\theta(t=0)={}^{\pi}/_{15}$, $\dot{\theta}(t=0)=0$.

Solution N°1

1- Energie cinétique et potentielle :

$E_c=\frac{1}{2}m\dot{y}^2=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$ avec $y=lsin\theta\approx l\theta$

$E_p=E_{p1}+E_{p2}=\frac{1}{2}k_1y_1^2+\frac{1}{2}k_2y_2^2$ avec $y_1=l_1sin\theta\approx l_1\theta$, $y_2=l_2sin\theta\approx l_2\theta$

$E_p=\frac{1}{2}k_1(l_1\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(l_2\theta)^2$

$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k_1l_1^2\theta^2-\frac{1}{2}k_2l_2^2\theta^2$

2- L'équation de Lagrange est donnée par :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-k_1l_1^2\theta-k_2l_2^2\theta$

3- L'équation du mouvement s'écrit :

$ml^2\ddot{\theta}+(k_1l_1^2+k_2l_2^2)\theta=0 \;\Rightarrow\; \ddot{\theta}+\frac{(k_1l_1^2+k_2l_2^2)}{ml^2}\theta=0$

Et la pulsation propre : $\omega_0=\sqrt{\frac{(k_1l_1^2+k_2l_2^2)}{ml^2}}$

4- La solution est :

$\theta(t)=Acos(\omega_0t+\varphi)\Rightarrow\dot{\theta}(t)=-A\omega_0sin(\omega_0t+\varphi)$

$$\begin{cases}\theta(t=0)=Acos\varphi=\frac{\pi}{15} \;\Rightarrow A=-\frac{\pi}{15}\\ \dot{\theta}(t=0)=-A\omega_0sin\varphi=0 \;\Rightarrow -sin\varphi=0\Rightarrow\varphi=\pi\end{cases}$$

Et la solution : $\theta(t)=-\frac{\pi}{15}cos(\omega_0t+\pi)$

Exercice N°2

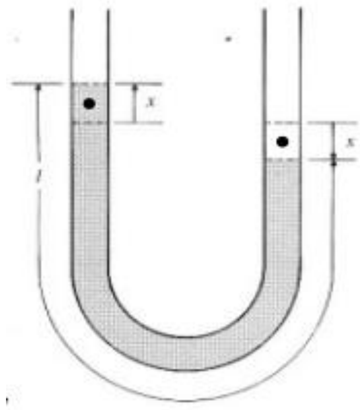


Fig. II-9. Tube en U

Un tube en U (Fig. II-9) de section faible et uniforme s contient un liquide de masse volumique ρ. La pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique.

1- Calculer la période propre des oscillations de la masse liquide ?

Solution N°2

Le lagrangien est donné par : $L=E_c-E_p$

Puisque la section est uniforme, toutes les particules de liquide ont une vitesse *v*. L'énergie cinétique du fluide est :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle : $E_p = \rho g s x^2$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \rho g s x^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\rho g s x$$

Et enfin l'équation différentielle de mouvement :

$$m\ddot{x} + 2\rho g s x = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{2\rho g s}{m}x = 0$$

La pulsation libre est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho g s}{m}}$

La période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g s}}$

Exercice N°3

On réalise le montage correspondant au schéma de la figure II-10.
On bascule le commutateur en position 1 pour charger le condensateur puis on le bascule en position 2.
Avec un système d'acquisition et de traitement, on enregistre la tension $u_c(t)$ dont le graphe est représenté sur la figure II-11.
L'enregistrement débute à l'instant de date $t_o = 0$ s qui correspond au basculement du commutateur en position 2.

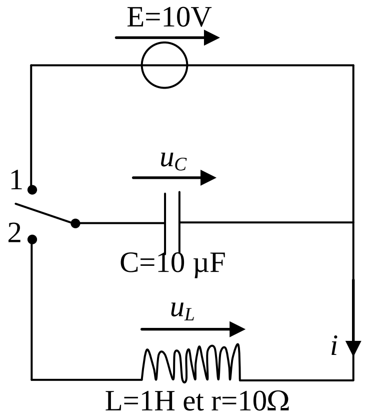


Fig. II-10. Circuit LC

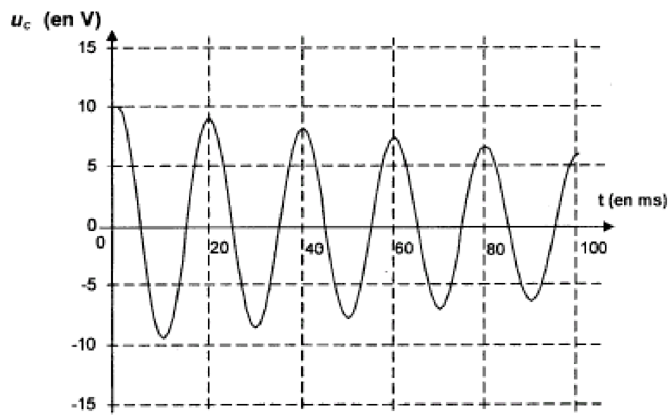


Fig. II-11. Variation de la tension de sortie en fonction du temps

1- Comment peut-on expliquer la diminution d'amplitude des oscillations au cours du temps ?
2- Déterminer la valeur de la pseudo-période du signal.
3- Ici on peut considérer que la période propre et la pseudo-période ont la même expression.

En déduire la valeur de la capacité C du condensateur et comparer avec l'indication du fabricant. *On donne $\pi^2 \approx 10$*

Solution N°3

1- La diminution d'amplitude est due à la résistance interne de la bobine. Il y a dissipation d'énergie sous forme de chaleur en raison de l'effet Joule).
2- La pseudo-période vaut T = 20 ms.
3- La pseudo-période ayant même valeur que la période propre, on a :

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2(LC) \Rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L}$

En remplaçant les valeurs de T_0 et L, on trouve :

C = 10 μF Valeur égale à celle du fabricant.

Exercice N°4

Une masse m est soudée à l'extrémité d'une tige de longueur *l* et de masse négligeable (Figure II-12). L'autre extrémité du fil est articulée au point O. La tige est liée au point A à un Bâti (B_1) par un ressort de raideur k_1. Au point B, la tige est reliée à un Bâti (B_2) par un ressort de raideur k_2. La masse m est liée au Bâti (B_2) par un amortisseur de coefficient de frottement α. *OA=l/3* et *OB=2l/3*.

1- Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2- Déterminer la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un faible amortissement, le coefficient d'amortissement, la pulsation propre et la pseudo-pulsation.

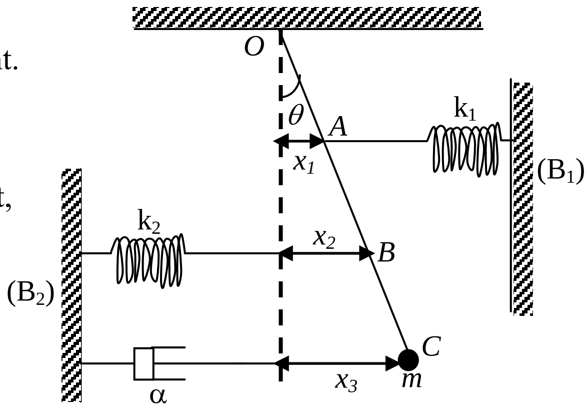


Fig. II-12. Système mécanique

Solution N°4

1- L'équation différentielle du mouvement :

Le Lagrangien : $L=E_c-E_p$

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$ avec : $x_3 = l\sin\theta \approx l\theta \Rightarrow \dot{x}_3 = l\dot{\theta} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

$E_p = E_{p1} + E_{p2}$

E_{p1} est l'énergie potentielle du ressort de raideur k_1. E_{p2} est celle du ressort k_2.

$E_{p1} = \frac{1}{2}k_1x_1^2$ avec $x_1 = \frac{l}{3}\theta \Rightarrow E_{p1} = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2$

$E_{p2} = \frac{1}{2}k_2x_2^2$ avec $x_2 = \frac{2l}{3}\theta \Rightarrow E_{p2} = \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$

$E_p = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$$

L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{k_1 l^2}{9} + \frac{4k_2 l^2}{9}\right)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha l^2\dot{\theta}$$

En remplaçant terme par terme dans 'équation de Lagrange, on obtient :

$$ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left(\frac{k_1 l^2}{9} + \frac{4k_2 l^2}{9}\right)\theta = 0 \;\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k_1}{9m} + \frac{4k_2}{9m}\right)\theta = 0$$

2- Pour les faibles amortissements,

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t}cos(w_D t + \varphi)$$

Par analogie avec :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{9m}}$$

Le coefficient d'amortissement :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}$$

La pseudo pulsation :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{1}{6m}\sqrt{4(k_1 + 4k_2) - 9\alpha^2}$$

Exercice N°5

Une fois le condensateur chargé, on bascule rapidement le commutateur (K) (voir figure II-13) de la position 1 à la position 2 : il prend l'instant du basculement comme nouvelle origine des dates. Le condensateur se décharge alors dans la bobine.

A- L'acquisition informatisée des tensions permet de visualiser l'évolution des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$ en fonction du temps.

Après transfert des données vers un tableur-grapheur, on souhaite étudier l'évolution des différentes énergies au cours du temps.

1- Exprimer littéralement, en fonction de i(t), l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine.
2- À partir de l'une des tensions enregistrées $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$, donner l'expression de l'intensité instantanée i(t).
3- En déduire l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine en fonction de l'une des tensions enregistrées.
4- En déduire l'expression de l'énergie totale E_T du circuit en fonction des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$.

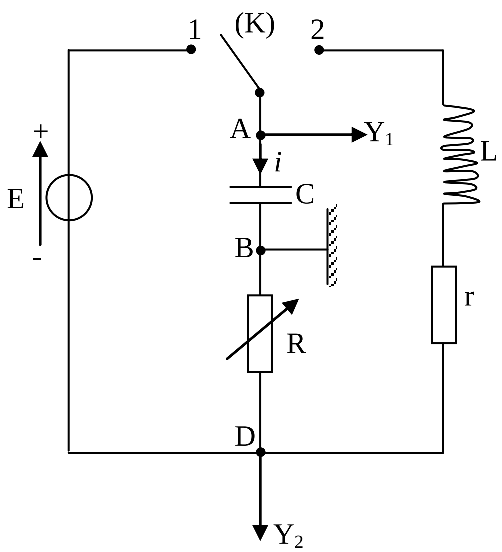


Fig. II-13. Circuit RLC

B- À partir du tableur-grapheur, on obtient le graphe de la figure II-14 qui montre l'évolution, en fonction du temps, des trois énergies : E_e énergie électrique, E_m, énergie magnétique et E_T énergie totale.

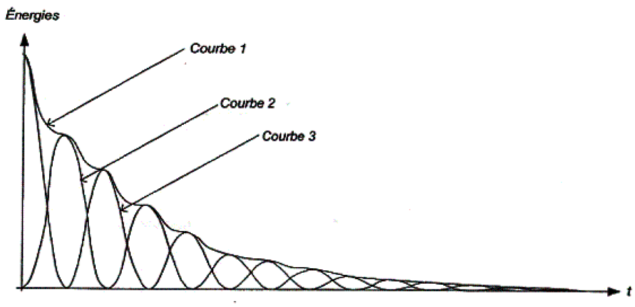


Fig.II-14. Evolution des énergies E_e, E_T et E_m en fonction du temps

5- Identifier chaque courbe en justifiant. Quel phénomène explique la décroissance de la courbe 1 ?

C- Pour entretenir les oscillations, on ajoute en série dans le circuit précédent un dispositif assurant cette fonction. On refait alors une acquisition informatisée.

1- Tracer sur la figure II-15 les deux courbes manquantes. Préciser ce que chacune des trois courbes représente.
2- Pourquoi un tel régime est-il qualifié d'entretenu ?

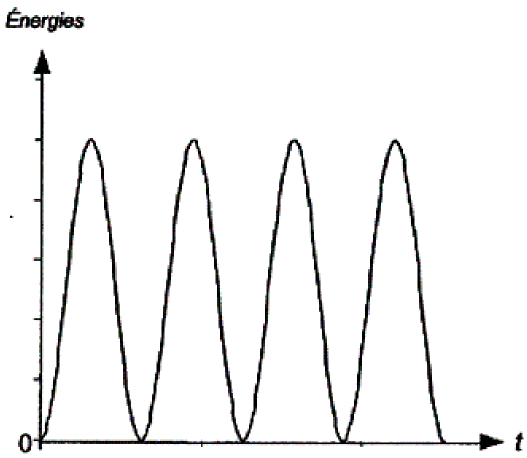


Fig.II-15. Evolution des énergies en fonctions du temps

Solution N°5

Cas A

1- Energie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine:

$$E_m = \frac{1}{2} L i(t)^2$$

2- Loi d'Ohm:

$$u_{DB}(t) = -Ri(t) \quad \Leftrightarrow i(t) = -\frac{u_{DB}(t)}{R}$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'énergie, on trouve :

$$E_m = \frac{1}{2} L \frac{u_{DB}^2(t)}{R^2}$$

3- Energie totale E_T du circuit en fonction des tensions $u_{AB}(t)$ *et* $u_{DB}(t)$:

$$E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2} C u_{AB}^2(t) + \frac{1}{2} L \frac{u_{DB}^2(t)}{R^2}$$

Cas B

Initialement le condensateur est chargé et aucun courant ne circule donc :

$E_T(0) = E_e(0)$ et $E_m(0) = 0\ J$

On en déduit alors que:

- la courbe 1 est associée à E_T

- la courbe 2 est associée à E_m

- la courbe 3 est associée à E_e

La décroissance de la courbe 1 est due à la perte d'énergie sous forme de chaleur, par effet Joule, dans la résistance R.

Cas C

Lorsque les oscillations sont entretenues l'énergie totale E_T est constante: $E_T = E_e + E_m = Cte$

- Initialement le condensateur est chargé et aucun courant ne circule :

$E_T(0) = E_e(0)$ et $E_m(0) = 0\ J$

- Si E_e augmente alors E_m diminue et inversement.

- Si E_e est maximale alors E_m est nulle et inversement.

D'où les courbes :

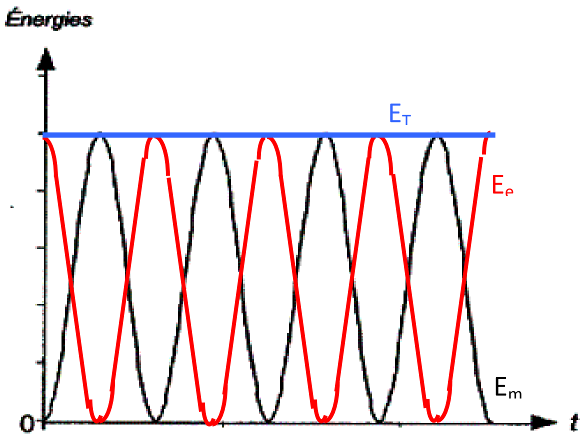


Fig.II-16. Variation des énergie E_m, E_e et E_T en fonction du temps

Le régime est entretenu car les pertes énergétiques dans la résistance sont compensées par l'apport d'énergie du dispositif d'entretien des oscillations. Les oscillations ne sont plus amorties mais ont une amplitude constante au cours du temps.

Exercices non corrigés

Exercice N°1

On modélise l'amortisseur d'une voiture (Figure II-17) à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement λ . Une masse m/4 est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe $\vec{e_x}$ lié au référentiel terrestre, supposé galiléen. La masse m/4 représente la masse du véhicule de masse m pesant sur le système d'amortisseur.

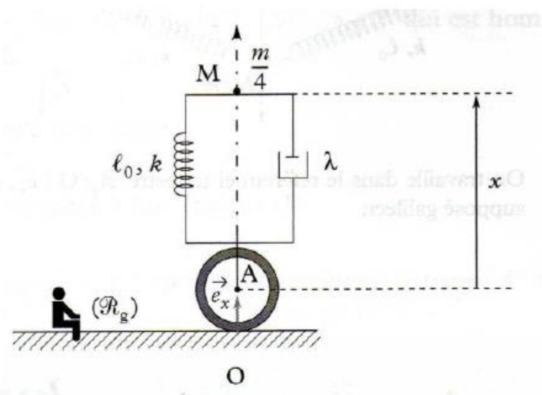


Fig. II-17. Amortisseur d'une voiture

1- Lors du changement d'une roue on soulève d'une hauteur h = 25 cm la carcasse du véhicule, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur AM (longueur du ressort) vaut alors 40 cm. Déterminer les caractéristiques du ressort.

2- Déterminer et calculer λ afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse m/4 en mouvement vertical)
3- On enfonce la masse m/4 d'une hauteur d = 5 cm et on lâche le système à t = 0 sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude x de la masse m/4.

Exercice N°2

Soit le système mécanique (Figure II-18) composé d'un disque (M,R) qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal, d'un ressort k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.

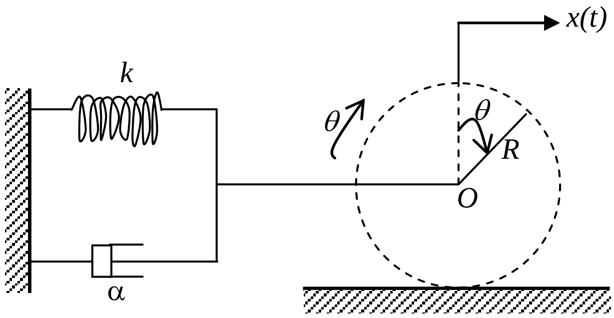


Fig. II-18. Système mécanique

1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_0, et déduire ω_D.

2- Trouver l'équation du mouvement, ($J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$)

Exercice N°3

Le système est constitué de 2 masses m_1 et m_2, d'une tige de masse négligeable et de longueur L et d'un ressort k_1 et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (Figure II-19).

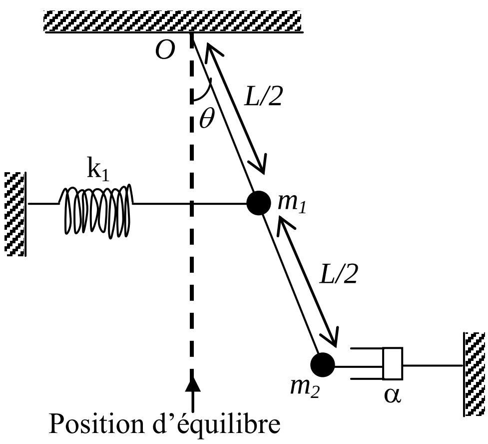


Fig. II-19. Système mécanique

1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.

2- Déterminer la pulsation propre du système.

3-Trouver l'équation du mouvement, sachant que : $\theta(0)=\theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. On donne : $\frac{m_1}{4} = m_2 = m \ et \ \frac{k_1}{4} = k$

Chapitre III:
Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III- Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III-1- Equation différentielle

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext} \tag{III-1}$$

F_{ext} : la force généralisée à une force extérieure

L'équation différentielle du mouvement vibratoire forcé est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \tag{III-2}$$

III-2- Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du mouvement des oscillations forcées est une équation différentielle du second ordre avec un second membre. La solution de l'équation (II-2) est donnée par :

$$q(t) = q_H(t) + q_p(t) \tag{III-3}$$

$q_H(t)$: est la solution homogène

$q_p(t)$: est la solution particulière

Les trois cas de solution homogène comme sont citées avant sont proportionnels à un terme exponentiel :

$$q_H(t) \sim e^{-\delta t} \tag{III-4}$$

Après un intervalle de temps t supérieur à (3/δ) ou (4/δ), le terme $e^{-\delta t} \to 0$ et $q_H(t) \to 0$. Dans ce cas, la solution générale tend vers la solution particulière. Ce régime est appelé le régime permanent.

$$q(t) \to q_p(t) \tag{III-5}$$

Quand la solution homogène est non négligeable et non nulle, le régime est dit transitoire.

III-2-1- Cas d'une excitation sinusoïdale

L'excitation sinusoïdale est de la forme :

$$A(t) = A_0 cos(\Omega t)$$

L'équation du mouvement (III-2) devienne :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 cos(\Omega t) \qquad \text{(III-6)}$$

La méthode des nombres complexes permet de calculer aisément la solution stationnaire. La solution particulière complexe est :

$$q(t) = \underline{q} e^{i\Omega t} \qquad \text{(III-7)}$$

$\underline{q}$ est l'amplitude complexe.

$$\underline{q} = q_0 e^{i\varphi} \qquad \text{(III-8)}$$

L'excitation A(t) sous forme complexe est égale :

$$A(t) = A_0 e^{i\Omega t} \qquad \text{(III-9)}$$

q(t) est une solution de l'équation différentielle si $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ vérifient l'équation (III-2).

$$-q_0 \Omega^2 e^{i(\Omega t+\varphi)} + 2\delta\left(i\Omega q_0 e^{i(\Omega t+\varphi)}\right) + w_0^2 q_0 e^{i(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{i\Omega t}$$

$$q_0[(w_0^2 - \Omega^2) + 2i\delta\Omega]e^{i\varphi} = A_0$$

On obtient l'amplitude complexe :

$$\underline{q} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\delta\Omega} \qquad \text{(III-10)}$$

Et on multipliant par le conjugué du dénominateur, on trouve :

$$q_0 = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \qquad \text{(III-11)}$$

Et

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \qquad \text{(III-12)}$$

III-2-2- Cas d'une excitation périodique

La fonction A(t) étant périodique, de période T, son développement de Fourier est :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) \qquad \text{(III-13)}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) \qquad \text{(III-14)}$$

La réponse permanente peut être calculée par :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n cos(n\omega t + \varphi) + b_n sin(n\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \qquad \text{(III-15)}$$

III-3- Pulsation de résonnance

Pour calculer la pulsation de résonnance, la dérivée de q_0 est égale à zéro.

$$\frac{dq_0}{d\Omega} = 0 \Longrightarrow \frac{-2A_0[-\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta^2\Omega]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \qquad \text{(III-16)}$$

$$\Longrightarrow \Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\delta^2] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{cases} \qquad \text{(III-17)}$$

La pulsation de résonnance est donnée par :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad \text{(III-18)}$$

En remplaçant Ω_R dans l'amplitude, on obtient :

$$q_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \qquad \text{(III-19)}$$

Pour les faibles amortissements :

$$q_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\omega_0} \qquad \text{(III-20)}$$

La figure III-1 représente la variation de l'amplitude q_0 (à gauche) et le déphasage φ (à droite). Pour l'amplitude on remarque qu'il existe un maximum à la pulsation Ω_R seulement si l'amortissement est faible pour que $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$

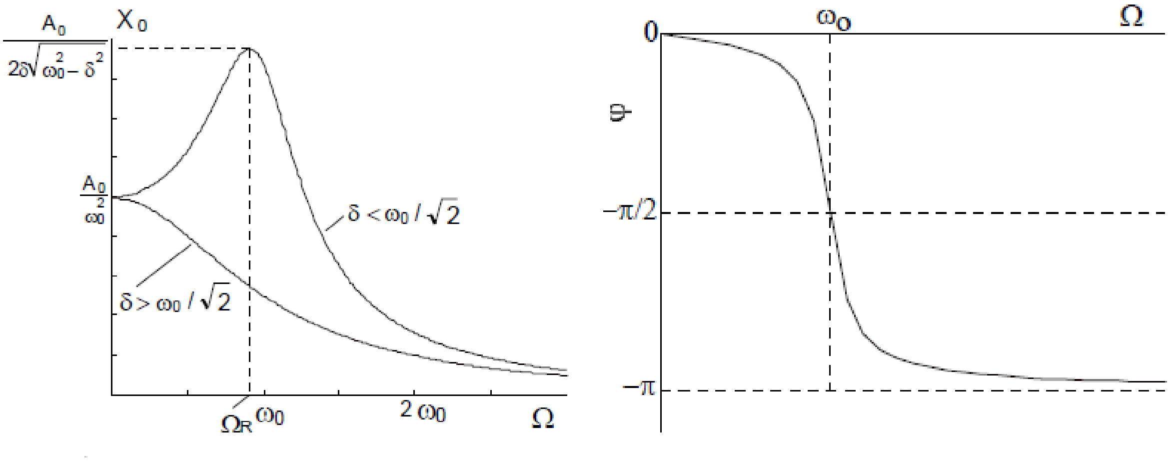


Fig. III-1. Amplitude et le déphasage en fonction de Ω

III-4- Bande Passante

On définit bande passante, la bande de pulsation pour les quelles l'amplitude est égale à $\frac{q_{0(\Omega_R)}}{\sqrt{2}}$. Elle est donnée par :

$$B = \Omega_1 - \Omega_2 = 2\delta \qquad \text{(III-21)}$$

III-5- Coefficient de Qualité

Il est définit par le rapport de la pulsation propre à la largeur de la bande passante B.

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad \text{(III-22)}$$

III-6- Impédance mécanique

On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force *F* et de la vitesse *v*.

$$Z = \frac{F}{v} \qquad \text{(III-23)}$$

III-6-1- Amortisseur

La force de frottement$F = \alpha v$, on déduit l'impédance complexe d'un amortisseur :

$$Z_\alpha = \alpha \qquad \text{(III-24)}$$

III-6-2- Masse

D'après la 2ième loi de Newton, la force F s'écrit :

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

On en déduit l'impédance complexe d'une masse :

$$Z_m = im\Omega = m\Omega e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(III-25)}$$

III-6-3- Ressort

La force : $F = kx$

Et l'impédance d'un ressort est donné par :

$$Z_k = \frac{k}{i\Omega} = -i\frac{k}{\Omega} \qquad \text{(III-26)}$$

III-7- Exercices corrigés

Exercice N°1

Etablir l'équation différentielle en courant puis en charge
du circuit oscillatoire électrique RLC de la figure III-2. On donne :
R= 80Ω, L=10 H, C=0.005 F, U_0=53 V, Ω=3 rad/s, U(t)=U_0cos(Ωt).
1- Calculer la période propre T_o et le coefficient d'amortissement δ.
2- Déterminer la solution du régime transitoire, et en déduire
sa pseudo pulsation ω_D.
3- Déterminer la solution du régime permanente.

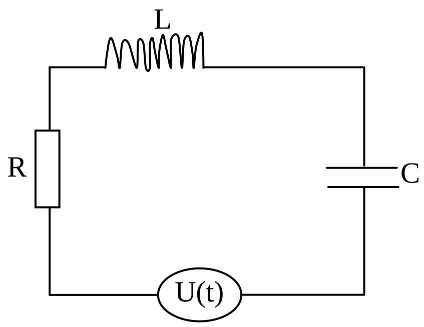


Fig. III-2. Circuit RLC

Solution N°1

1- $\sum_{i=1}^{3} V_i = U \;\Rightarrow\; V_L + V_c + V_R = U$

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt + Ri = U \;\Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = U$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}q = \frac{U_0 cos(\Omega t)}{L}$$

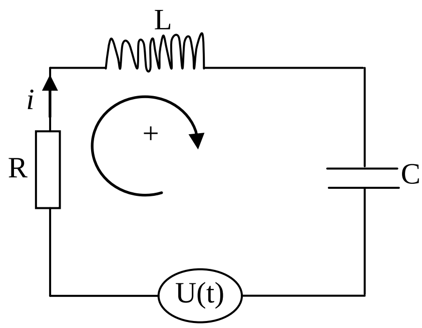


Fig. III-3. Maille du circuit

Par analogie, on trouve :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}} \;\Rightarrow\; T_0 = 2\pi\sqrt{Lc} = 1.4s$$

$$\delta = \frac{R}{2L} = 4$$

2- La solution transitoire :

L'équation différentielle du mouvement devient :

$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3cos(3\text{t})$

La solution générale est :

$q(t) = q_p(t) + q_H(t)$

$q_H(t)$ est la solution homogène calculée lorsque $A(t)=0$. L'équation différentielle s'écrit :

$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 0$

On calcul le déterminant :

$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 = 16 - 20 = -4 < 0$

Et

$q_H(t) = Ae^{-4t}cos(\omega_D t + \varphi)$

$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 2$

$q_H(t) = Ae^{-4t}cos(2t + \varphi)$

La solution particulière est calculée lorsque $A(t) \neq 0$:

$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3cos(3\text{t})$

La solution particulière suit la forme du second membre.

$q_p(t) = q_0 cos(3t + \varphi)$

Pour calculer q_0 et φ à partir de la méthode des nombres complexes. On suppose la solution complexe de la forme :

$q_p(t) = q_0 e^{i(3t+\varphi)} = q_0 e^{i\varphi} e^{3it}$

En remplaçant la solution dans l'équation différentielle,

$-9q_0 e^{i\varphi} + 24iq_0 e^{i\varphi} + 20q_0 e^{i\varphi} = 5.3 \;\Rightarrow\; q_0 e^{i\varphi}(11 + 24i) = 5.3$

$$q_0 = \frac{5.3}{\sqrt{11^2 + 24^2}} = 0.2$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{24}{11}\right) = -65.4° = -1.14\,rad$$

Et la solution particulière :

$$q_p(t) = 0.2cos(3t - 1.14)$$

$$q(t) = Ae^{-4t}cos(2t + \varphi) + 0.2cos(3t - 1.14)$$

3- La solution permanente est calculée lorsque $q_H(t)\to 0$. Donc elle est donnée par :

$$q(t) = 0.2cos(3t - 1.14)$$

Exercice N°2

Soit le pendule inversé de la figure III-4. ($I = mL^2$). Au repos la tige OC est verticale et les ressorts sont non déformés.

1- Donner l'équation différentielle du mouvement de ce système (dans le cas des petites oscillations).
On donne : m=0,2 kg, k_1=9 N/m, k_2=5 N/m, β=0,9 kg/s, L = 0,5 m et f(t)=cos(2t).

2- Donner la pulsation propre, la pulsation amortie (pseudo pulsation), le décrément logarithmique.

3- Donner la solution du régime Permanent.

4- Donner la solution du régime Transitoire.

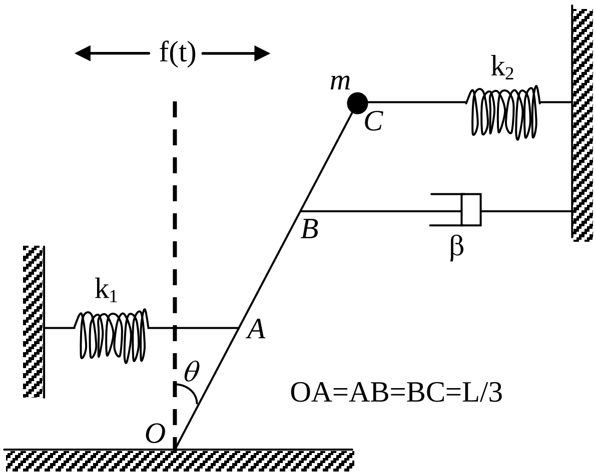


Fig. III-4. Oscillations forcées du système masse ressort

Solution N°2

1- L'équation différentielle du mouvement :

$L=E_c-E_p$

$$E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{L}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2L^2\theta^2 + mgLcos\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\beta \dot{OB}^2 = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{2L}{3}\right)^2\dot{\theta}^2$$

L'équation de Lagrange pour les oscillations forcées est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F_{ext}$$

Après dérivation et en remplaçant terme par terme dans l'équation de Lagrange, on obtient :

$$mL^2\ddot{\theta}+\frac{4L^2}{9}\beta\dot{\theta}+\left(\frac{L^2k_1}{9}+L^2k_2-mgL\right)\theta=F(t)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{4}{9m}\beta\dot{\theta}+\left(\frac{k_1}{9m}+\frac{k_2}{m}-\frac{g}{L}\right)\theta=\frac{1}{mL^2}cos(2t)$$

2- La pulsation propre :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+9k_2}{9m}-\frac{g}{L}}=3.16\,rad/s$$

La pseudo pulsation : $\omega_D=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=2.78\,rad/s$

Le décrément logarithmique : $d=\delta T \Rightarrow d=0.94$

3- La solution du régime permanent :

$$\theta_p(t)=\theta_0 cos(2t+\varphi)$$

Avec :

$$\theta_0=\frac{1/_{mL^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2-4\delta^2\Omega^2}}$$

Et

$$\varphi=-arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$$

En remplaçant les données numériques, on trouve :

$$\theta_p(t)=0.18cos(2t-0.2\pi)$$

4- La solution au régime transitoire :

$$\theta(t)=\theta_H(t)+\theta_p(t)$$

L'équation différentielle sans second membre s'écrit :

$$\ddot{\theta}+1.5\dot{\theta}+10\theta=0$$

$\Delta=-17.5<0$ et la solution homogène :

$\theta(t) = Ae^{-\frac{3}{2}t}cos(2.78t + \varphi)$

A et φ sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales.

Exercice N°3

Un générateur de signaux fournit une tension en créneaux de période $T=2.10^{-3}$s et d'amplitude V_0=15V.

$$\begin{cases} V(t) = -15V \;\; pour \; 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ V(t) = +15V \;\; pour \; \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

1- Donner le développement en série de Fourier de la tension en créneaux étudiée.
2- Calculer numériquement les termes correspondant à n≤9.

On applique une tension V(t) à un dipôle RLC et on mesure la tension V'(t) au bornes de R. On donne L=1H, R=100Ω, C est calculée pour que l'on ait la résonnance pour la fréquence de la tension V(t).

3- Déterminer les coefficients a'_n et b'_n de la série de Fourier qui est le développement de la tension$V'(t)$.
4- Calculer numériquement les termes correspondant à n≤9. Commenter les résultats obtenus.

Solution N°3

1- Le développement en série de Fourier :

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)cosn\omega tdt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} -V_0 cosn\omega tdt + \int_{T/2}^{T} +V_0 cosn\omega tdt\right]$$

$$= \frac{2V_0}{n\omega T}(-2sinn\pi)=0$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)sinn\omega tdt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} -V_0 sinn\omega tdt + \int_{T/2}^{T} +V_0 sinn\omega tdt\right]$$

$$= \frac{V_0}{n\pi}(2 - 2(-1)^n)$$

Pour n pair $b_n = 0$

Pour n impair $b_n = -\frac{4V_0}{n\pi}$

En posant *n=2p+1*, le développement de Fourier est donné par :

$$V(t) = -\frac{4V_0}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$$

2- Application numérique :

B_1	B_3	B_5	B_7	B_9
-19.1	-6.37	-3.82	-2.73	-2.12

Le circuit est alimenté par la tension en créneau d'amplitude V_0=15V. Par superposition de tensions sinusoïdales de plusieurs Ω=ω, 3ω, …, nω. Les termes B_n sont les amplitudes des harmoniques de rang n.

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)^2}}$$

Avec :

Ω=nω, $LC\omega^2$=1, on trouve :

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{n^2 LC\omega^2 - 1}{nC\omega}\right)^2}}$$

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega\frac{n^2 - 1}{n}\right)^2}}$$

En remplaçant les valeurs numériques, on obtient :

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \left(10^2\pi\frac{n^2 - 1}{n}\right)^2}}$$

Les calculs sont regroupés dans le tableau suivant :

n	1	3	5	7	9
$\frac{b'_n}{b_n}$	1	0.012	0.0066	0.0046	0.0036
b'_n	-19.1	-0.076	-0.025	-0.013	0.0076

On remarque que le terme fondamental est favorisé, et que le signal de sortie va rester à peu près sinusoïdal.

III-8- Exercice non corrigés

Exercice N°1

Dans la figure III-5, la masse m est fixée à un ressort k et un amortisseur α. On applique à la masse m une force $F(t)= F_0\sin(\omega t)$.

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle, en calculant la solution homogène et la solution particulière.

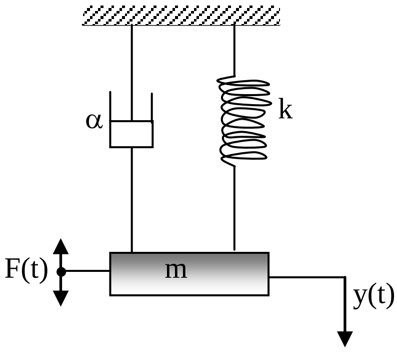


Fig. III-5. Oscillations forcées du système masse-ressort

Exercice N°2

Dans la figure III-6, un disque circulaire homogène, de masse M et de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal O. Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par O. Les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement l_1 et l_2. Un ressort vertical, de constante de raideur k a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance " a " de O. En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force $F(t)= F_0\cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.

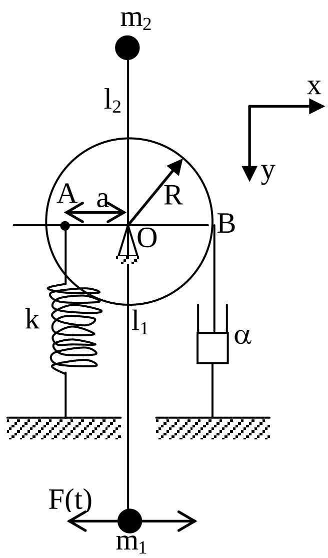


Fig. III-6. Oscillations forcées du système masse-ressort

Exercice N°3

Trouver le développement en série de Fourier de la force F(t) appliquée au système oscillatoire définit par l'équation suivante :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

avec F(t) est une fonction périodique de période 2π tel que :

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & pour\ 0 \leq t \leq \pi \\ -F_0 & pour\ \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Chapitre IV:
Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

IV- Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

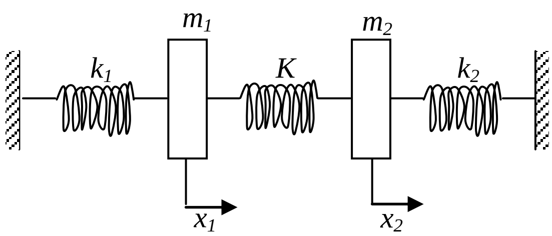
IV-1- Introduction

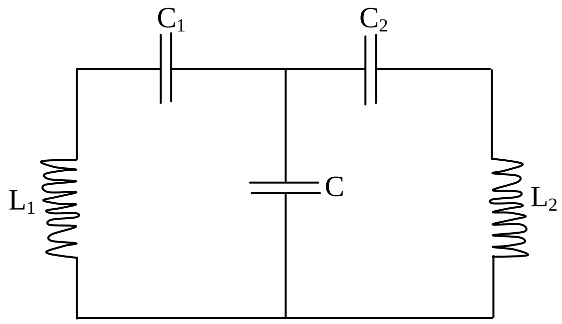
Les systèmes à deux degrés de liberté sont constitués de deux systèmes à un degré de liberté couplé. Dans les systèmes à deux degrés de liberté, il y a deux coordonnées qui caractérisent le mouvement vibratoire. Il existe trois types de couplage : par élasticité, inertiel et visqueux.

IV-2- Types de couplage

IV-2-1- Couplage par élasticité

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un ressort (capacité).





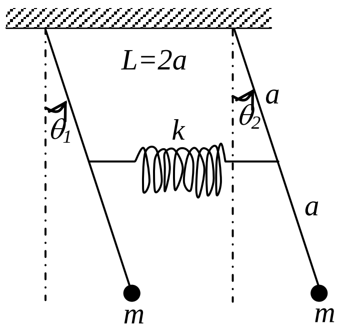


Fig. IV-1. Différents systèmes mécanique et électrique couplés par élasticité

IV-2-2- Couplage inertiel

Le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse (bobine).

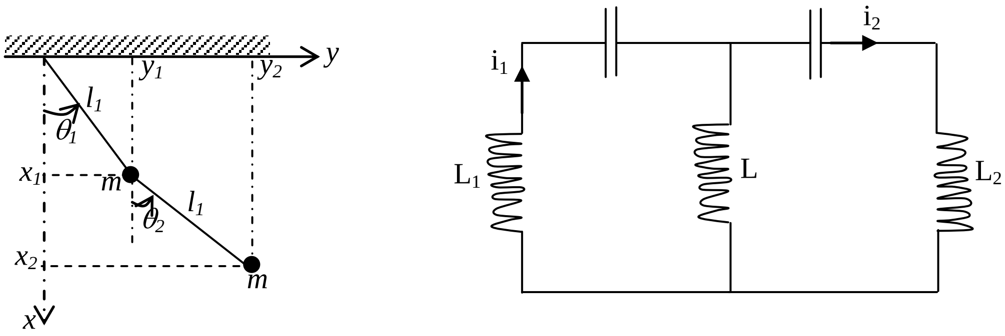


Fig. IV-2. Systèmes mécanique et électrique couplés par inertie

IV-3-3- Couplage visqueux

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur (résistance).

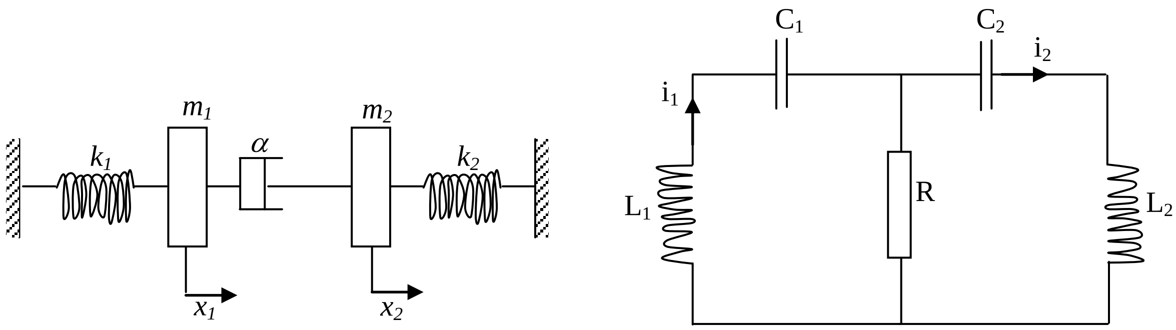


Fig. IV-3. Couplage visqueux des différents systèmes mécanique et électriques

IV-3- Equations différentielles

Pour étudier les oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire de décrire le mouvement par deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(IV-1)}$$

q_1 et q_2 sont les deux coordonnées généralisées qui caractérisent le système à deux degrés de liberté.

IV-4- Exercices corrigés

Exercice N°1

On considère les oscillations libres du système à deux degrés de liberté de la figure IV-4 :

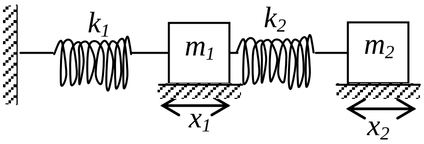


Fig. IV-4. Système masse-ressort à deux degrés de liberté

1) Calculer les énergies cinétique et potentielle du système ;

2) Pour $k_1 = k_2 = k$ et $m_1 = m = m_2/2$, et en utilisant la formule de Lagrange établir les équations différentielles du mouvement. En déduire les pulsations propres du système.

Solution N°1

1- Energie cinétique et potentielle :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

2- Les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ \quad m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

E remplaçant les constantes, on trouve :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Les pulsations propres :

On propose les solutions suivantes :

$$x_1(t) = A_1cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_2(t) = A_2cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases}(-m\omega^2+2k)A_1-kA_2=0\\ (-2m\omega+k)A_2-kA_1=0\end{cases}$$

On calcul le déterminant :

$$\Delta(\omega)=\begin{vmatrix}-\mathrm{m}\omega^2+2\mathrm{k} & -\mathrm{k}\\ -\mathrm{k} & -2\mathrm{m}\omega^2+\mathrm{k}\end{vmatrix}=0$$

$$(-m\omega^2+2k)(-2\mathrm{m}\omega^2+\mathrm{k})-k^2=0$$

$$2m^2\omega^4-3mk\omega^2+k^2=0 \;\Rightarrow\; \Delta=9m^2k^2-8m^2k^2=m^2k^2>0$$

Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental. L'autre terme, de pulsation ω_2, est appelé harmonique.

Les deux pulsations propres sont :

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \omega_2=\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Et les solutions s'écrit comme :

$$x_1(t)=A_{11}cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_{12}cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

$$x_2(t)=A_{21}cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_{22}cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

Le système oscille dans le premier mode (fondamental), les solutions s'écrivent :

$$x_1(t)=A_{11}cos(\omega_1t+\varphi_1)$$

$$x_2(t)=A_{21}cos(\omega_1t+\varphi_1)$$

Les solutions du système oscillant dans le second mode (harmonique) sont données par :

$$x_1(t)=A_{12}cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

$$x_2(t)=A_{22}cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

Les constantes A_{11}, A_{12}, A_{21} et A_{22} sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales

Exercice N°2

Soit le montage de la figure IV-5.

Les 2 circuits LC oscillants sont couplés par une capacité C.

Ici $C_1=C_2=C$ et $L_1=L_2=L$

1) Ecrire les 2 équations différentielles en i_1 et i_2

(Puis en q_1 et q_2).

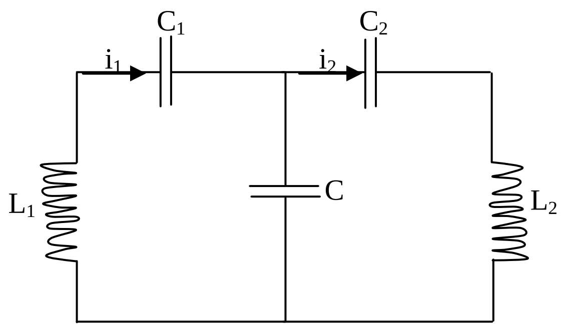


Fig. IV-5. Circuits RLC couplés par une capacité

2) Trouver les pulsations propres du système et donner la solution générale sachant qu'à t = 0, seul C_1 possède une charge q.

Solution N°2

1- Les équations différentielles du mouvement :

$\sum_{i=1}^{n} V_n = 0$

D'après la loi des mailles :

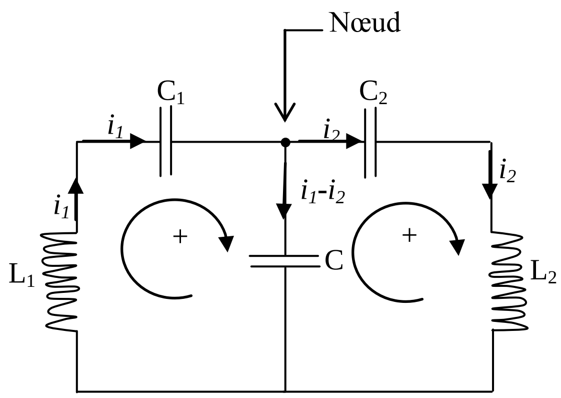


Fig. IV-6. Lois des mailles et des nœuds

$$\begin{cases} V_{C_1}+V_{L_1}+V_C=0 \\ V_{C_2}+V_{L_2}+V_C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1}\int i_1dt+\frac{1}{C}\int(i_1-i_2)dt=0 \\ L_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C_2}\int i_2dt-\frac{1}{C}\int(i_1-i_2)dt=0 \end{cases}$$

$i=\frac{dq}{dt}=\dot{q}\ et\ \frac{di}{dt}=\ddot{q}$

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1+\frac{1}{C_1}q_1+\frac{1}{C}(q_1-q_2)=0 \\ L_2\ddot{q}_2+\frac{1}{C_2}q_2-\frac{1}{C}(q_1-q_2)=0 \end{cases}$$

2- Les pulsations propres du système :

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1+\frac{2}{C}q_1+\frac{1}{C}q_2=0 \\ L_2\ddot{q}_2+\frac{2}{C_2}q_2-\frac{1}{C}q_1=0 \end{cases}$$

On suppose les solutions de la forme : $q_1(t)=Q_1e^{i\Omega t}$ et $q_2(t)=Q_2e^{i\Omega t}$. Avec :

$Q_1=q_{01}e^{i\varphi}$ et $Q_2=q_{02}e^{i\varphi}$

Le système devient :

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2L+\frac{2}{C}\right)Q_1+\frac{1}{C}Q_2=0 \\ -\frac{1}{C}Q_1+\left(-\Omega^2L+\frac{2}{C}\right)Q_2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Delta=(-\omega^2+2\omega_0^2)^2-4\omega_0^4=0 \Rightarrow (-\omega^2+3\omega_0^2)(-\omega^2+\omega_0^2) \Rightarrow \ \omega_1^2=\ \omega_0^2\ ;\ \omega_2^2=3\omega_0^2$

Mode 1: $\omega_1^2=\ \omega_0^2 \rightarrow \begin{pmatrix}\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} \rightarrow\ \ Vecteur\ propre\ \overrightarrow{V_1}=\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$

Matrice de passage $\rightarrow$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Mode 2: $\omega_2^2 = 3\omega_0^2 \rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ Vecteur\ propre\ \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solutions générales :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Q_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ Q_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_1(t) = Q_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Q_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ q_2(t) = Q_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Q_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les constantes Q_1, Q_2, φ_1, φ_2 sont déterminées grâce aux conditions initiales 4 inconnues donc nécessaire d'avoir 4 équations :

$q_1(0)= q$; $q_2(0)= q$ et $\dot{q}_1(0)= \dot{q}_2(0)= 0$

$$\begin{cases} q_1(0) = -Q_1 \cos\varphi_1 + Q_2 \cos\varphi_2 = q \rightarrow 2Q_1 \cos\varphi_1 = q = 2Q_2 \cos\varphi_2 \\ q_2(0) = -Q_1 \cos\varphi_1 + Q_2 \cos\varphi_2 = 0 \rightarrow Q_1 \cos\varphi_1 = Q_2 \cos\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_1(0) = -Q_1\, \omega_1 \sin\varphi_1 - Q_2\, \omega_2 \sin\varphi_2 = 0 \rightarrow 2Q_2 \omega_2 \sin\varphi_2 = 0 \\ \dot{q}_2(0) = Q_1\, \omega_1 \sin\varphi_1 - Q_2\, \omega_2 \sin\varphi_2 = 0 \rightarrow 2Q_1\, \omega_1 \sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \rightarrow Q_1 = \frac{q}{2} = Q_2$$

$$\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{q}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \\ q_2(t) = -\dfrac{q}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \end{cases}$$

Exercice N°3

Soit le montage de la figure IV-7. Les 2 cylindres identiques (masse M, rayon R, et moment d'inertie ($J = ½ MR^2$) roulent sans glisser sur un support horizontal. Soit θ_1 et θ_2 les angles de rotation de ces 2 cylindres par rapport à leurs positions d'équilibre respectives. Au repos ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) les ressorts sont non déformés.

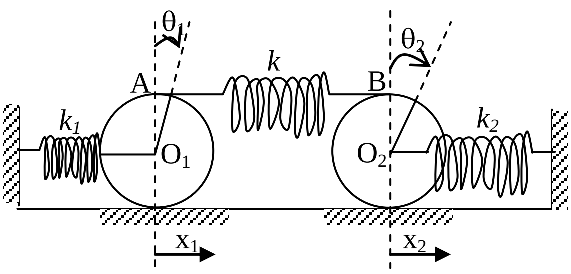


Fig. IV-7. Système mécanique de deux degrés de liberté

1) Etablir le Lagrangien du système en fonction de x_1 et x_2 .

2) On prend $k_1 = k_2 = k' \neq k$, trouver les équations du mouvement.

3) En déduire les pulsations propres.

4) Ecrire le lagrangien sous la forme suivante :

$$L = \frac{3}{4} M \left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \omega_0^2(x_1^2 + x_2^2 - 2k x_1 x_2)\right]$$

En déduire les expressions de $\omega_0{}^2$ et de K

5) K est le coefficient de couplage, montrer qu'il varie entre 2 valeurs limites.

6) Donner le sens physiques de ω_0 en le comparer aux pulsations propres trouvées dans la question 3. En déduire l'effet du couplage k sur les pulsations propres.

Solution N°3

1.

$x_1 = R\theta_1 \;\; x_2 = R\theta_2 \quad T = \frac{1}{2} M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}_2^2 = \frac{3}{4} M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k[(x_1 + R\theta_1) - (x_2 + R\theta_2)]^2$$

$$= \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + 2k(x_1 - x_2)$$

2.

$k_1 = k_2 = k' \quad L = T - U$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} M\ddot{x}_1 + (k' + 4k)x_1 - 4kx_2 = 0 \\ \frac{3}{2} M\ddot{x}_2 + (k' + 4k)x_2 - 4kx_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2}{3M}(k' + 4k)x_1 - \frac{8}{3M}kx_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{2}{3M}(k' + 4k)x_2 - \frac{8}{3M}kx_1 = 0 \end{cases}$$

3. Les solutions du type $\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{X}_1 e^{j\omega_0 t} \\ \bar{x}_2 = \bar{X}_2 e^{j\omega_0 t} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -\omega_0^2 + \frac{2}{3M}(k' + 4k) & -\frac{8k}{3M} \\ -\frac{8k}{3M} & -\omega_0^2 + \frac{2}{3M}(k' + 4k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta = [-\omega_0^2 + \frac{2}{3M}(k' + 4k)]^2 - (\frac{8k}{3M})^2 = \left[-\omega_0^2 + \frac{2}{3M}(k' + 8k)\right]\left[-\omega_0^2 + \frac{2}{3M}k'\right] = 0$$

$\rightarrow$ Pulsations propres $\begin{cases} \omega_{01}^2 = \frac{2}{3M}(k' + 8k) \\ \omega_{02}^2 = \frac{2}{3M}k' \end{cases}$

4.

$$L = \frac{3}{4} M \left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \omega_0^2(x_1^2 + x_2^2 - 2kx_1x_2)\right]$$

$$L = \frac{3}{4} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k' x_1^2 - \frac{1}{2}k' x_2^2 - 2k(x_1 - x_2)^2$$

$$L = \frac{3}{4} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k' x_1^2 - \frac{1}{2}k' x_2^2 - 2kx_1^2 - 2kx_2^2 + 4kx_1x_2 \;\;)^2$$

$L = \frac{3}{4} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(k' + 4k)x_1^2 - \frac{1}{2}(k' + 4k)x_2^2 + 4kx_1x_2 = \frac{3}{4} M [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \frac{2}{3M}(k' + 4k)(x_1^2 + x_2^2) + \frac{16}{3M}kx_1x_2$

$$= \frac{3}{4} M [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \frac{2}{3M}(k' + 4k)(x_1^2 + x_2^2 - \frac{8k}{(k' + 4k)}x_1x_2)]$$

$$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{2}{3M}(k' + 4k) \qquad K = \frac{4k}{(k' + 4k)}$$

5.

$k = 0 \;\rightarrow\; K = 0$ Couplage très lâche.

$k = \infty \;\rightarrow\; K = 1$ Couplage serré

Donc le coefficient de couplage varie entre les deux valeurs o et 1 $\Rightarrow 0 \leq K \leq 1$

6.

On voit dans $\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2}{3M}(k' + 4k)x_1 - \frac{8}{3M}kx_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{2}{3M}(k' + 4k)x_2 - \frac{8}{3M}kx_1 = 0 \end{cases}$ *et dans* $\omega_0^2 = \frac{2}{3M}(k' + 4k)$

Que $\omega_0$est :

- La pulsation du premier cylindre quand le deuxième cylindre est bloqué ($x_2 = 0$)
- La pulsation du deuxième cylindre quand le premier cylindre est bloqué ($x_1 = 0$)

Ce résultat montre que le couplage des deux cylindres se traduit par un écartement des deux pulsations propres.

$$\omega_{02}^2 = \frac{2}{3M}k' < \omega_0^2 = \frac{2}{3M}(k' + 4k) < \omega_{01}^2 = \frac{2}{3M}(k' + 8k)$$

IV-5- Exercices non corrigés

Exercice N°1

Soit le système électrique de la figure IV-8 constitué de 2 circuits oscillants couplés par une inductance L suivant :

1) Etablir les 2 équations différentielles des 2 mailles en courants i_1 et i_2 (puis en charges q_1 et q_2).

2) Pour $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$, trouver les pulsations propres du système.

3) En déduire les solutions générales.

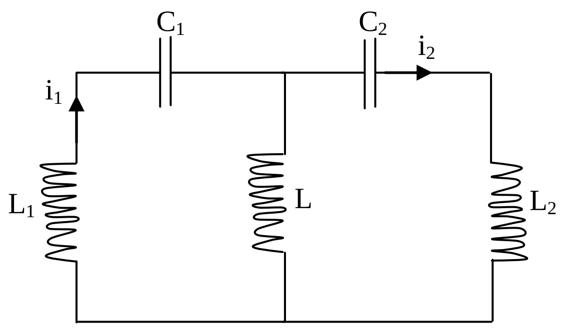


Fig. IV-8. Circuits oscillants LC couplés

Exercice N°2

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure IV-9.

Au repos $x = 0$, $\theta = 0$ (pendule vertical) et le ressort est non déformé. En mouvement la masse M glisse de x sans frottement sur un plan horizontal autour de sa position de repos et entraine par l'intermédiaire d'un ressort de constante k le pendule (de masse ponctuelle m, et de longueur L) dans son mouvement.

Le ressort horizontal soude à M et en A au pendule relie les deux oscillateurs.

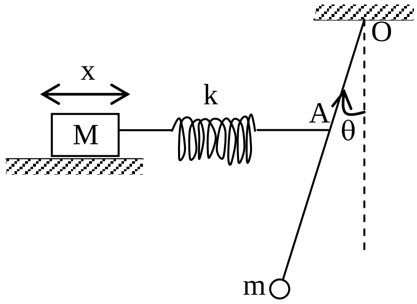


Fig. IV-9. Système mécanique à deux degrés de liberté (masse ressort et pendule simple)

1) Etablir les énergies cinétique et potentielle du système en fonction de x et θ

2) En utilisant le Lagrangien trouver les équations du mouvement dans le cas des petites oscillations.

3) On prend : *M=m, a=L/4, mg=(15/16)kL et L=1m* :

Calculer les pulsations propres.

4) En déduire la matrice de passage et les solutions générales.

Exercice N°3

Soit le montage de la figure IV-10.

Un pendule de masse m et de longueur L pivote avec un angle θ autour du centre de gravité G d'un cylindre (de masse M de rayon R et de moment d'inertie $J = (½)\, MR^2$) qui roule sans glisser sur un plan horizontale (c'est à-dire lorsque le cylindre tourne de φ son centre de gravité se déplace de $x = R\,\varphi$).

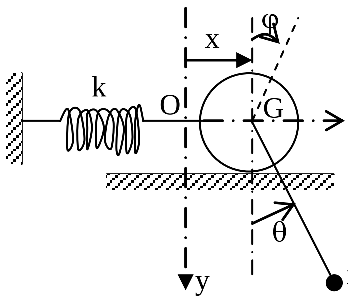


Fig. IV-10. Système mécanique à deux degrés de liberté (masse ressort et pendule simple)

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système oscillatoire en fonction de x et θ.

2) En utilisant la formule de Lagrange, trouver les équations différentielles du mouvement.

3) Dans le cas des petites oscillations, et en négligeant le terme composé en, écrire le système d'équations différentielles linéaires du mouvement.

4) Les solutions de ce systèmes sont sinusoïdales, trouver les fréquences propres.

Exercice N°4

Deux pendules identiques de longueur L = 2a portants à leurs extrémités deux masses ponctuelles (figure IV-11). Le ressort de constante k assure le couplage. Les deux pendules sont repérés à chaque instant par leurs élongations angulaires θ_1 et θ_2.

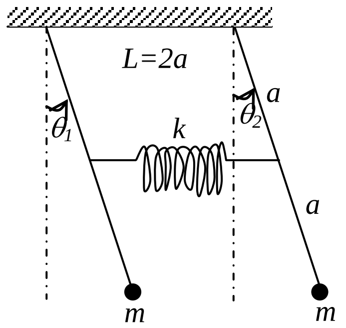


Fig. IV-11. Pendules couplés par élasticité

1) Déterminer l´énergie cinétique et potentielle du système et écrire le Lagrangien en fonction de θ_1 et θ_2.

2) En déduire les deux équations différentielles du mouvement, dans le cas des petites oscillations.

3) Calculer les deux pulsations propres du système.

Chapitre V:
Oscillations forcées des systèmes à deux degrés des liberté

V- Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

V-1- Equations de Lagrange

Les équations différentielles du mouvement oscillatoire forcé des systèmes à deux degrés de liberté sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q_1}} = F_{q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q_2}} = F_{q_2} \end{cases} \qquad \text{(V-1)}$$

F_{q1}, F_{q2} sont respectivement les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées q_1 et q_2.

V-2- Exercices corrigés

Exercice N°1

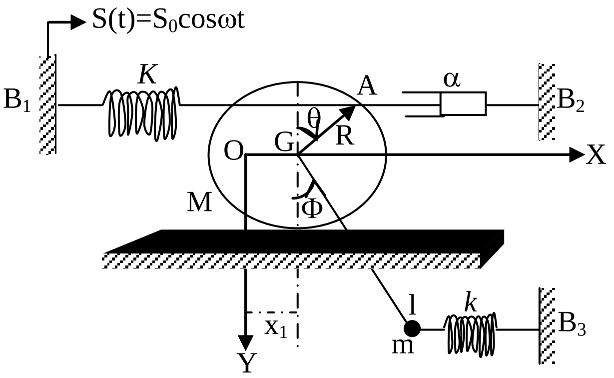


Fig. V-1. Système oscillant mécanique forcé de deux degrés de liberté

Dans le système oscillant représenté sur la Figure V-1, le cylindre est homogène, de masse *M* et de rayon *R*. Ce cylindre est relié au point A par un ressort de coefficient de raideur *K* à un bâti B_1 animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude S_0 et de pulsation ω. Il est également relié par un amortisseur de coefficient α à un bâti fixe B_2. Le cylindre roule sans glisser sur un plan horizontal. La tige est sans masse et de longueur *l*.
L'une de ses extrémités peut osciller sans frottement autour de l'axe du cylindre. Elle porte à l'autre extrémité une masse ponctuelle m qui est reliée à un bâti fixe B_3 par un ressort de coefficient de raideur *k*. A l'équilibre la tige est verticale et l'axe du cylindre *G* est à l'origine des coordonnées *O*, on suppose aussi que les ressorts ne sont pas déformés. La rotation de la tige par rapport à la verticale est repérée par l'angle φ et celle du cylindre par l'angle θ. On considère les oscillations de faibles amplitudes.
On pose : $3M = 2m$, $4K = k = \frac{mg}{l}$, $x_2 = l\varphi$ et $x_1 = R\theta$

1- Montrer que le lagrangien du système peut s'écrire sous la forme :

$$L = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - kx_1x_2 - kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1s - \frac{1}{8}ks^2$$

2- Déterminer les équations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Montrer que le système est équivalent à un système forcé soumis à une force F(t) sinusoïdale dont on précisera l'amplitude F_0.

3- Exprimer ces équations de mouvement en fonction des vitesses $\dot{x}_1$(t) et $\dot{x}_2$(t).

4- a- Déterminer $\dot{x}_1$(t) et $\dot{x}_2$(t) pour la pulsation $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$. En déduire le comportement du système à cette pulsation.

b- Déterminer l'impédance d'entrée du système, définie par $Z_e/\dot{x}_1$, à cette pulsation.

5-

a- Déterminer $\dot{x}_1$(t) et $\dot{x}_2$(t) pour la pulsation $\omega = \omega_1 = \sqrt{2k/m}$. En déduire le comportement du système à cette pulsation.

b- Déterminer l'impédance d'entrée du système, définie par $Z_e/\dot{x}_1$, à cette pulsation.

Solution N°1

L'énergie cinétique : $E_c = E_{cM} + E_{cm}$

Avec :

$$E_{cM} = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M\right)\dot{x}_1^2$$

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2$$

Donc $E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2)$

$E_p = \frac{1}{2}K(2x_1 - s(t))^2 + \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{l}x_2^2$ et $D = \frac{1}{2}\alpha(4\dot{x}_1^2)$

D'où le Lagrangien :

$$L = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - kx_1x_2 - kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1s - \frac{1}{8}ks^2$$

2- Equations différentielles en x_1 et x_2 :

A partir des équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$2m\ddot{x}_1 + 4\alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 + m\ddot{x}_2 + kx_2 = \frac{k}{2}S_0e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 + m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$

Le système est soumis à une force $F(t) = \frac{k}{2}S_0e^{i\omega t}$ d'amplitude $F_0 = \frac{k}{2}S_0$ et de pulsation ω

3- Equation en fonction des vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$:

$$\begin{cases} \left(4\alpha + 2i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)\dot{x}_1 + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\dot{x}_2 = \frac{k}{2}S_0e^{i\omega t} \\ i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\dot{x}_1 + i\left(m\omega - \frac{2k}{\omega}\right)\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

4- *Pour* $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

a- $\dot{x}_1 = \frac{1}{4\alpha} \times \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$ *et* $\dot{x}_2 = 0$ à cette fréquence la tige reste verticale

b- L'impédance d'entrée est $Z_e = \frac{F_0}{\dot{x}_1} = 4\alpha$

5- Pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{2k/m}$:

a. $\dot{x}_1 = 0$ *et* $\dot{x}_2 = -\frac{i}{(m\omega_1 - \frac{k}{\omega_1})} \times \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$ le cylindre ne se déplace pas

b- L'impédance d'entrée est $Z_e = \frac{F_0}{\dot{x}_1}$ est infinie.

Exercice N°2

1- Etablir les équations différentielles du système oscillatoire mécanique de la figure V-2.

2- On donne l'excitation $F(t) = F_o exp(i\Omega t)$. Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du régime permanant étant du même type que l'excitation, donner l'écriture matricielle des équations différentielles en amplitudes complexes $\overline{x}_1$et $\overline{x}_2$.

3- En déduire, lorsque β = 0, la pulsation de résonance existante.

4- Etablir les équations différentielles en courant puis en charges q_1 et q_2 du système oscillatoire électrique de la figure V-3.

5- Y a-t-il analogie entre ces deux systèmes ? Si oui, donner les correspondances entre les éléments mécaniques et électriques. En déduire, lorsque *R=0* la pulsation de résonance existante.

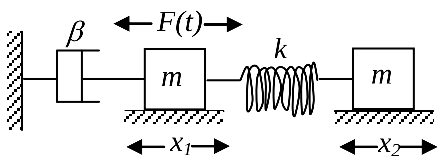


Fig. V-2. Système mécanique forcé à deux degrés de liberté

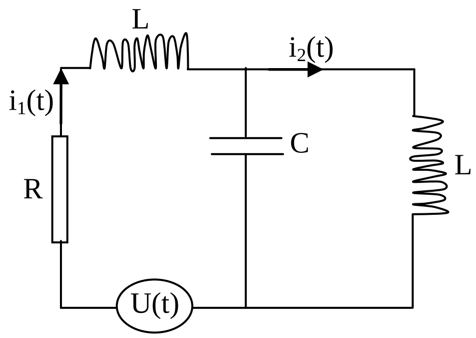


Fig. V-3. Système oscillatoire électrique

Solution N°2

1- Equation différentielle du mouvement :

$$L=E_c-E_p \Rightarrow \begin{cases} E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \\ E_p = E_{pk} = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

$$D = \frac{1}{2}\beta\dot{x}_1^2$$

Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x_1}} = F_{x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

On trouve le systéme d'équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{\beta}{m}\dot{x}_1 + \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) = \dfrac{F_0}{m}e^{i\Omega t} \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

2- Les solutions complaxes x_1 et x_2 s'écrivent comme :

$$x_1(t) = X_1 e^{i\Omega t} e^{i\varphi} = \overline{X}_1 e^{i\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{i\Omega t} e^{i\varphi} = \overline{X}_2 e^{i\Omega t}$$

En remplaçant ces solutions dans le système d'équations :

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + i\dfrac{\beta}{m}\Omega\right)\overline{X}_1 - \dfrac{k}{m}\overline{X}_2 = \dfrac{F_0}{m} \\ -\dfrac{k}{m}\overline{X}_1 + \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m}\right)\overline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

Le système matrecielle est donnée par :

$$\begin{vmatrix} \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + i\dfrac{\beta}{m}\Omega\right) & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m}\right) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant :

Det(Ω)=0 $\Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + i\frac{\beta}{m}\Omega\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$

3- Si $\beta=0$, le déterminant s'écrit :

$$\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0 \ \Rightarrow\ \Omega^4 - \frac{2k}{m}\Omega^2 = 0 \ \Rightarrow\ \Omega^2\left(\Omega^2 - \frac{2k}{m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}} = \Omega_R \end{cases}$$

4- Les équation différentielles de la figure V-4 :

D'après la loi des mailles :

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt} + Ri_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt = U(t) \\ L\dfrac{di_2(t)}{dt} - \dfrac{1}{C}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = U(t) \\ L\ddot{q}_2 - \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$$

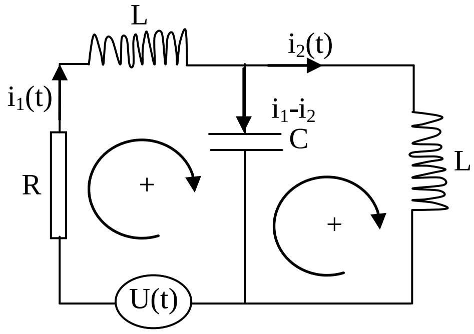


Fig. V-4. La loi des mailles et des nœuds de la figure V-3

5- Oui il existe une analogie, on constate :

$x \rightarrow q, R \rightarrow \beta, m \rightarrow L, k \rightarrow {}^{1}/_{C}, F(t) \rightarrow U(t)$ et la pulsation de résonnance : $\Omega_R = \sqrt{\frac{2}{LC}}$

Exercice N°3

Soit le système mécanique oscillant de la figure V-5 :

$x_1 = x_1(t)$ et $x_2 = x_2(t)$ sont respectivement les positions dynamiques (amplitudes à chaque instant) des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions de repos (d'équilibre).

F(t) force excitatrice appliquée en m_1.

1) Ecrire les équations différentielles avec :

$m_1 = m_2 = m$ *et* $k_1 = k_2 = k$

2) Trouver les solutions du régime permanant sachant que

$F(t) = k\, a \cos(\omega t)$.

3) Si $\beta = 0$, pour qu'elle valeur de ω a-t-on résonnance.

Donner dans ce cas la condition pour laquelle la 1ère masse reste immobile.

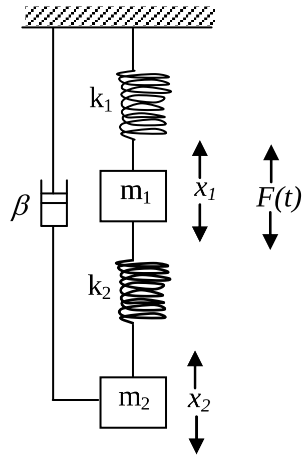


Fig. V-5. Système mécanique oscillant

Solution N°3

1- Les équations différentielles sont

Le lagrangien : $L = \frac{1}{2}m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_2\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\beta\dot{x}_2^2$

Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F_{x_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x_2}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) + \beta\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les constantes,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{2k}{m}x_1 - \dfrac{k}{m}x_2 = \dfrac{F(t)}{m} \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 + \beta\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

2- Les solutions en régime permanant :

$\overline{x}_{1,2} = \overline{X}_{1,2}e^{i\omega t}$ avec $\overline{X}_{1,2} = X_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \dfrac{2k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & -\omega^2 + \dfrac{k}{m} + i\omega\dfrac{\beta}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ka}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(\omega) = \left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{k}{m} + i\omega\frac{\beta}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2}$$

$\overline{X}_1 = \frac{1}{Det}\frac{ka}{m}\left(-\omega^2 + \frac{k}{m} + i\omega\frac{\beta}{m}\right)$ et $\overline{X}_2 = \frac{1}{Det}\frac{k^2}{m^2}a$

3- Calcul des pulsations pour β=0 :

$$Det = \left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^4 - \frac{3k}{m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{9k^2}{m^2} - \frac{4k^2}{m^2} = \frac{5k^2}{m^2} > 0$$

L'équation admet deux solutions :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(3\frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}\sqrt{5}\right) = \frac{k}{2m}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$$

m_1 est immobile $\rightarrow \overline{X}_1 = 0$ et $\beta=0 \rightarrow -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \ \rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercice N°4

Donner le système d'équations qui décrit le mouvement des circuits de la figure V-6 :

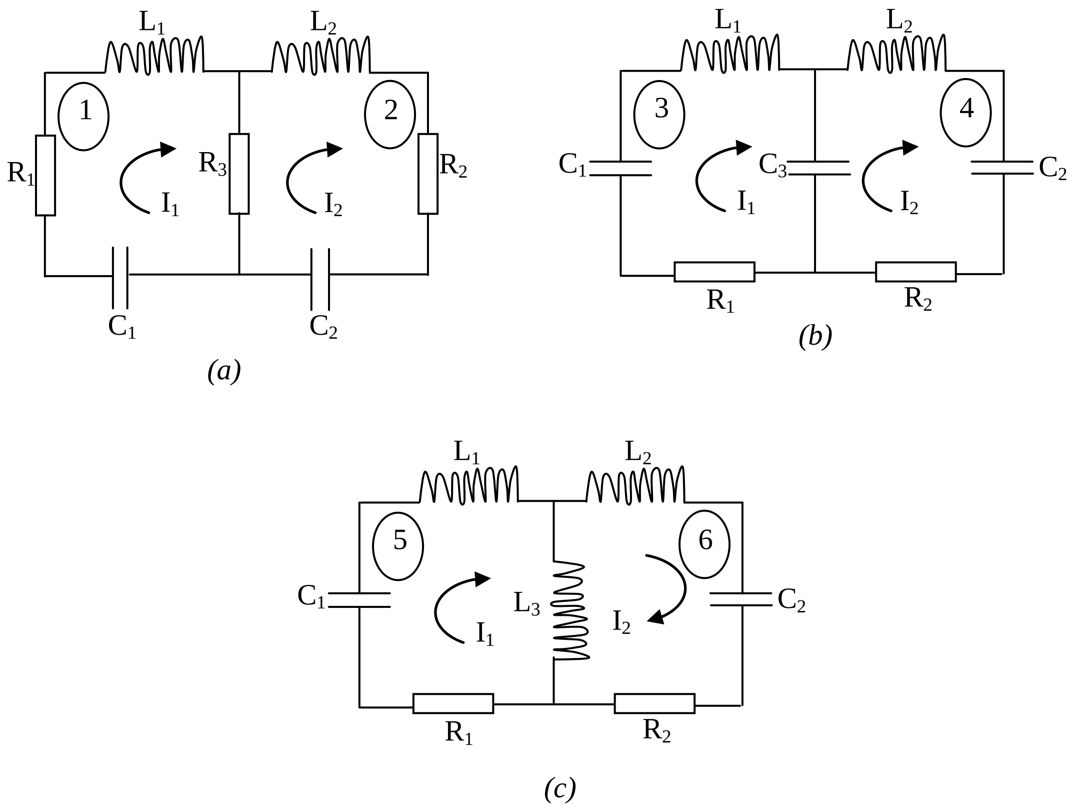


Fig. V-6. Circuits oscillants électriques :

(a) Circuits RLC couplés par viscosité

(b) Circuits RLC couplés par élasticité

(c) Circuits RLC couplés par inertie

Solution N°4

Mailles 1 et 2 :

$$L_1\ddot{q}_1 + (R_1 + R_3)\dot{q}_1 + \frac{1}{c_1}q_1 = R_3\dot{q}_2$$

$$L_2\ddot{q}_2 + (R_2 + R_3)\dot{q}_2 + \frac{1}{c_2}q_2 = R_3\dot{q}_1$$

Mailles 3 et 4 :

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3}\right)q_1 = \frac{1}{c_3}q_2$$

$$L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)q_2 = \frac{1}{c_3}q_1$$

Mailles 5 et 6 :

$$(L_1 + L_3)\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{c_1}q_1 = L_3\ddot{q}_2$$

$$(L_2 + L_3)\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{c_2}q_2 = L_3\ddot{q}_1$$

V-3- Exercices non corrigés

Exercice N°1

Un oscillateur a pour équation de mouvement :

$$0.2\ddot{x} + 1.2\dot{x} + 5x = 5\cos(2t)$$

1. Déterminer dans ce cas, la période propre To, le coefficient d'amortissement γ et la pulsation d'excitation

2. Montrer que la solution transitoire est un mouvement oscillatoire amorti, en déduire sa pseudo pulsation ω. Déterminer ce régime avec les Conditions Initiales :

x(t=0) = 0 et v(t=0) = 4

3. Déterminer la solution permanente.

Exercice N°2

Soit le système oscillatoire de la figure V-7.

1) Etablir les équations différentielles des masses m_1 et m_2, (x_1 et x_2) leurs amplitudes dynamique respectives).

2) Donner le schéma électrique équivalent du système en établissant d'abord les équations en charges q_1 et q_2 puis en courant i_1 et i_2.

3) On prend $m_1 = m_2 = m$. Trouver les expressions des amplitudes complexes des solutions x_1 et x_2 du régime permanant sachant que $F(t) = k.x_s = a.\exp(i\Omega t)$;

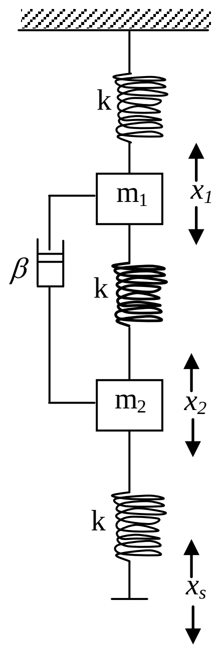


Fig. V-7. Système mécanique oscillant forcé amorti de deux degrés de liberté

4) Si $\beta = 0$ (pas d'amortissement) :

a) Pour quelle pulsation la masse m_2 reste immobile ;

b) Quelles sont les pulsations de résonance ;

c) Considérons le cas non excité ($F(t) = 0$), trouver :

- Les pulsations propres (correspondantes aux modes)
- La matrice de passage.
- Les solutions générales.

Exercice N° 3

Une force F vibratoire excitatrice d'amplitude y ($F = k_3.y$) est appliquée en A au système oscillatoire mécanique de la figure V-8.

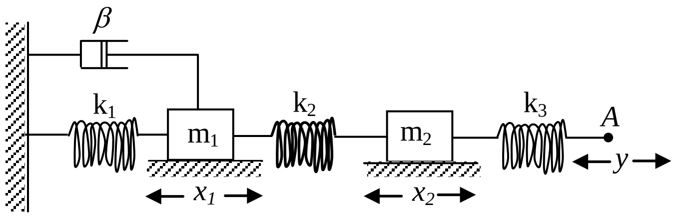


Fig. V-8. Système mécanique oscillant forcé amorti de deux degrés de liberté

Soient x_1 et x_2 les déplacements conséquents dynamique de m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibres.

1) Déterminer les équations du mouvement des masses m_1 et m_2

En déduire le système d'équations différentielles correspondant

2) Etablir les équations différentielles électriques analogues en charges q_1 et q_2 puis en courant i_1 et i_2

En déduire le schéma du circuit électrique équivalent à ce système.

3) On prend $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$

Sachant que $F = k.y = a.\exp(i\Omega t)$, donner le système d'équation différentiel en amplitudes complexes

$\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$ des solutions x_1 et x_2 du régime permanant

Si $\beta = 0$ (pas d'amortissement), Pour quelle pulsation la masse m_2 reste immobile

4) On considère $\beta = 0$ et le cas non excité : $a = 0$

Trouver les pulsations propres correspondantes aux modes de vibrations possibles, en déduire la matrice de passage et donner les solutions générales.

Bibliographies

[1] Dr. Aicha Flitti, Physique les vibrations cours, exercices et examens corrigés, pages Bleues, 2010.

[2] Pr. Djelouah Hakim, Vibration et ondes manuel de cours, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.

[3] H. J. Pain, The Physics of Vibrations and Waves, Sixth Edition, Formerly of Department of Physics, Imperial College of Science and Technology, London, UK, 2005.

[4] George C.King, Vibrations and waves, Wiley, This edition first published 2009.

[5] M. Balkanski et C. Sebenne, Physique 2 : ondes et phénomènes vibratoires, DUNOD, Paris

[6] G. Ney, Analogies et modèles électriques, acoustique et mécanique vibratoire, N°2579, Ecole supérieure d'électricité, Paris, 1978.

[7] J. Faget et J. Mazzaci, travaux dirigés de physique, Vuibert, Paris

[8] Tamer Bécherrawy, Vibrations et ondes, La voiser, 2010.

[9] André Lecerf, Rappel de cours et exercices résolus physique des ondes et des vibrations, TEC et DOC – L voisier, 1993.

[10] Janine Bruneaux, Jean Matricon, Vibrations ondes, ellipses, 2008.

[11] Mohamed Bendaoud, Vibrations et Ondes : cours et exercices (deuxième partie : Phénomènes de propagation), USTHB, office des publications universitaires, 1993.

[12] M. Tamine, O. Lamrous, Vibrations et ondes (première partie : Module TP010) cours et TD, Université de tizi-ouzou, office des publications universitaires, 1993.

[13] A Fouillé, P. déréthé, Cours de physique des vibrations, Dunod, 1976.

[14] David Holliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Cours et exercices corrigés : physique : ondes, optique et physique moderne, 6ième édition, Dunod, 2004.

[15] Hecht, Physique – ondes, optique physique moderne 3, de Boeck, 2007.

[16] Julie-Anne Denis, Bernard Marcheterre, Physique : ondes, optique et physique moderne solutions et corrigé des problèmes, 3ième édition, de boeck, 2005.

[17] N. Adnani, des vibrations à la lumière cours et applications, office publications universitaires, 1994.

[18] Jaques René Magné, Rose-Marie Magné-Marty, Cinématique/statique dynamique, phénomènes vibratoires : Rappels de cours – Exercices corrigés QCM avec réponses, ellipses, 2000.

[19] Jean-Paul-Mathieu, vibrations et phénomènes de propagation, Tome I, oscillateurs, Masson et Cie, Editeurs, 1974.

[20] J.P. Pérez, Mécanique : fondements et applications. Masson, Paris, 5e édition, 1997.

[21] R. F. J.P. Pérez, R. Carles, Electromagnétisme : fondements et applications. Masson, Paris, 3e édition, 2006.

[22] J.-Y. F. S. B. J.-P. Pérez, C. Lagoute, Electronique : fondements et applications. Masson, Paris, 2006.

[23] Bergson, Evolution créatrice, Paris, p. 318, 1907.

[24] D.Halliday, R. Resnick, Physics, Wiley, 2E édition, New-York.