الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

السنة الثانية ثانوي
علوم تجريبية – رياضيات – تقني رياضي

إشراف و تأليف
محمد فاتح مراد
مفتش التربية والتكوين

المؤلفون:
محمد قورين – مفتش التربية والتكوين
جمال تاوريرت – مفتش التربية والتكوين
كريمة بوعلي – أستاذة التعليم الثانوي
بن عيسى بن عيسى – أستاذ التعليم الثانوي
وهراني وهراني – أستاذ التعليم الثانوي

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية 2008

مقدمة

الرياضيات وسيلة لتكوين الفكر و أداة لإكساب المعرفة . فهي تساهم في نمو قدرات التلميذ الذهنية و تشارك في بناء شخصيته و تدعيم استقلاليته و تسهيل مواصلة تكوينه المستقبلي . و هي تسمح للتلميذ باكتساب أدوات مفهوماتية و إجرائية مناسبة تمكنه من القيام بدوره بثقة وفعالية في محيط اجتماعي متطلب أكثر فأكثر في عالم شمولي يتحول باستمرار . إن الرياضيات حاضرة أكثر من أي وقت مضى في المحيط الاجتماعي و الاقتصادي و الإعلامي و الثقافي للإنسان

و خاصة مع تطور الوسائل التكنولوجية للحساب السريع مثل الآلة الحاسبة و الحاسوب ، الأمر الذي يتطلب التحكم التدريجي في هذه الوسائل من طرف التلميذ ، ويبرر استحسان إدخال استعمال الآلة الحاسبة في السنة الأولى من التعليم القاعدي .

تساهم الرياضيات مع المواد الأخرى في تحقيق ملمح التلميذ عند نهاية المرحلة القاعدية ، فتدريسها يرمي الى تمكين التلميذ من اكتساب كفاءات قابلة للتحويل الى مختلف مجالات المعرفة . و ينتظر من تعلمها تحقيق غرضين اثنين ، أحدهما له طابع تكويني ثقافي ، و الآخر نفعي .

تستجيب المقاربة بالكفاءات لإرادة تطوير غايات المدرسة حتى تتكيف مع الواقع المعاصر في حقول الشغل و المواطنة و الحياة اليومية ، و هذا لا يعني أنها تستغني عن المعارف ، بل تعطيها دفعا جديدا ، لأنها تأخذ في الحسبان زيادة على المعارف نفسها ، القدرة على تجنيدها في وضعيات متنوعة .

و من هذا المنظور يكون المهم هو ربط المعارف بوضعيات تسمح بالتأثير ليس داخل المدرسة و حسب ، بل و خارجها . الأمر الذي يتطلب أن تكون مكتسبات التلميذ المتعلقة بهذه المعارف جاهزة و قابلة للتجنيد عند الحاجة و في الوقت المناسب ، خصوصا عندما يتعلق الأمر بحل مشاكل مركبة : بمعنى وضعيات تتطلب التحليل و التفسير و الاستباق و اتخاذ القرار و التعديل و أحيانا التفاوض .

إن نقطة البدء لنشاط رياضياتي ليست التعريف ، بل المشكل المطلوب حله . فبواسطة نشاط حل مشكل ما يبني التلميذ معارفه الشخصية ، و المشكل ينبغي أن يكون منطلق النشاط الفكري للتلميذ ، هذا النشاط لا يتمثل فقط في إيجاد إجابة عن كل سؤال محدد ، بل يتعداه الى صياغة أسئلة وجيهة تجاه وضعية إشكالية ، هذه الإشكالية تؤدي الى وضع تخمينات مقابل تخمينات الآخرين ، التي ينبغي تجريبها في حل المشاكل .

و حتى نجعل التلميذ يدرك معنى مفهوم رياضياتي و فائدته ، لا ننطلق من تمثيل للمعرفة المقصودة ، بل ننطلق من مشكل حقيقي (نسميه فيما بعد وضعية– مشكل) يستعمل التلميذ في حله إجراءات قاعدية متنوعة ، إلا أنها غير كافية . و هذا ما يسمح بإعطاء معنى لاستخدام هذا المفهوم ، و يصبح القسم هكذا مكانا لخطة قريبة من البحث و الحوار ، تتطلب الصبر و الجهد

فالنشاط الرياضياتي الذي يقوم به التلاميذ يسمح لهم بالانتقال من وضع " مستهلكين للمعرفة " الى وضع " منتجين للمعرفة " و نكون بذلك بعيدين عن البيداغوجية الإلقائية .

ينبغي اختيار المفاهيم التي يجب بناءها بهذه الكيفية في كل مستويات التعلم . و لأنه ليس ضروريا و لا ممكنا بناء كل المعارف هكذا ، علينا إذن أن نتساءل في كل مرحلة عن المعارف الرياضياتية القاعدية التي بامكان التلاميذ اكتشافها بأنفسهم .

و بالنسبة الى التقويم ، نقول عن تلميذ أن له معارف في الرياضيات إذا كان قادرا على :

– استحضار معارفه و تجنيدها كأدوات لحل مشاكل سواء تضمن نص المشكل مؤشرات أم لا .

– التكيف عندما تكون ظروف العمل مختلفة تماما .

إن العمل على المفاهيم التي تتدخل كأدوات يتطلب استحضار المعارف العامة للتلمبذ و يجرب دلالتها وانسجامها ، و هو الأمر الذي يعطي معنى لهذه المفاهيم .إن المقاربة بالكفاءات لا تحل مسألة الفروق الإجتماعية ، فهي يمكن أن تكون أيضا عائقا أمام التلاميذ الذين يواجهون صعوبات ، لأنها تتطلب الكثير .

– لا يمكن بناء كفاءات إذا كانت الموارد الضرورية (المفاهيم و القدرات) غير جاهزة .

– و حتى عند حضورها ، فان تجنيدها يمر بسيرورات ذهنية عالية المستوى ، من الصعب " تدريسها " للتلاميذ.

و هذا يتطلب الوقوف بانتظام عند الموارد الجاهزة عند كل تلميذ قصد تمييز المهام المقترحة و السماح لكل تلميذ بتدعيم مكتسباته تبعا لحاجياته الخاصة .

و في هدا الإطار حاولنا تضمين هذا الكتاب ما يمكن الأستاذ و التلميذ من تجسيد المقاربة المذكورة أعلاه.

(بناء المعرفة ثم توظيفها ثم تجنيدها)

من خلال مختلف فصوله التي وضعت بالتسلسل التالي : أنشطة – دروس و طرائق – أعمال موجهة – مسائل محلولة – أعمال تطبيقية و أخيرا مجموعة من التمارين متنوعة متعددة الأهداف .

كما حرصنا و نحن نعد فصول هذا الكتاب على التعبير بوجه مفصل عن نيات البرنامج مما يسهل للأستاذ المهمة و يفصل له ما أجمل في المنهاج و الوثيقة المرفقة .

و لسنا في هذ المقام بصدد تقديم وصفة عمل تحدد دور الأستاذ، ذلك أن هذا الدور أكبر من أن يحصر في تدريس ما تصمنته فصول الكتاب بالنظر الى طبيعة مهمة الأستاذ التربوية . و لكننا نرسم خطوطا أساسية و شواهد ثابتة تكون نبراسا له في أداء رسالته أداء في مستوى الطموحات التي تهدف إليها المناهج .

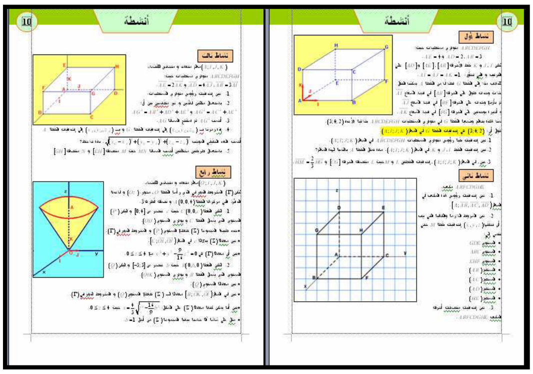
و إذ لا يخلو كتاب من نقائص فإننا نرحب بانتقادات القراء و نقدم الشكر المسبق لهم .

تقديم الكتاب

أنشطة

تمكن من التخمين لكفاءات مستهدفة كما تسمح للتلميذ من بناء معارفه بنفسه.

تسمح الأنشطة من مقاربة مفاهيم جديدة و هذا باستعمال مكتسبات قبلية.

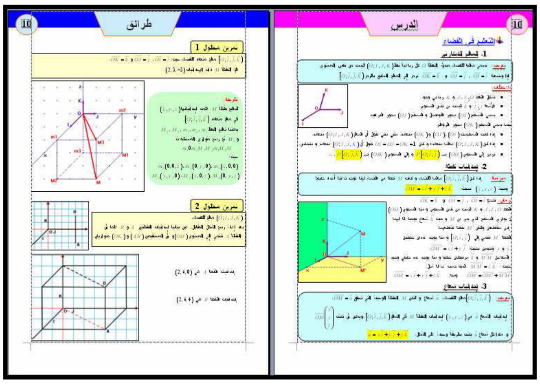


الدرس

المفاهيم المقررة مفصلة و مدعمة ببراهين و أمثلة.

طرائق

تمارين محلولة مدعمة بطرائق للحل و بتعاليق مناسبة.

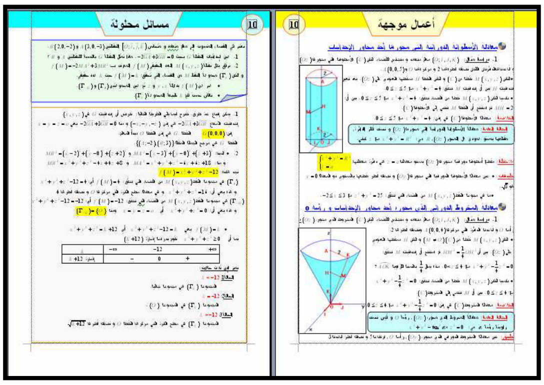


أعمال موجهة

تقترح مواضيع للدراسة توظف فيها مفاهيم الدرس بهدف التوصل إلى نتائج يمكن استثمارها في حل مشكلات.

مسائل محلولة

عبارة عن مسائل إدماجية محلولة يوظف فيها الدرس توظيفا شاملا.

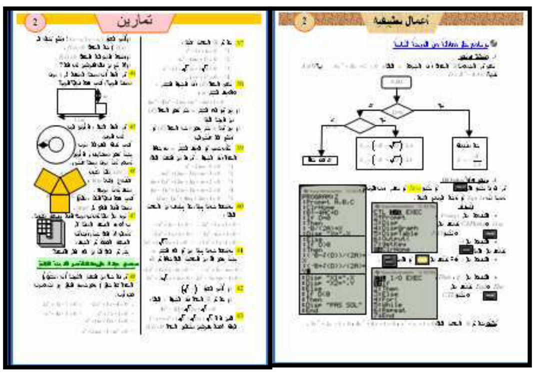


أعمال تطبيقية

تقترح أنشطة توظف فيها تكنولوجيات الإعلام و الاتصال.

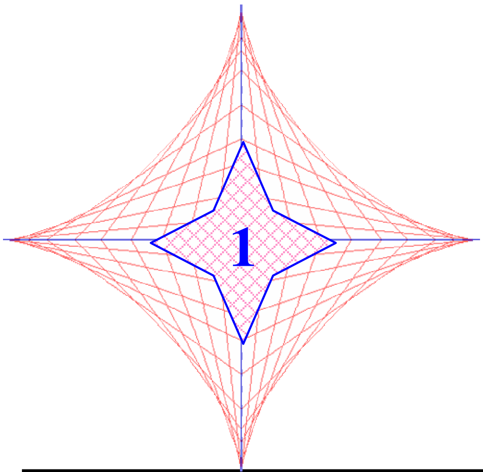
تمارين

- اختيار من متعدد
- أصحيح أم خطأ
- تمارين تطبيقية
- تمارين و مسائل متنوعة.



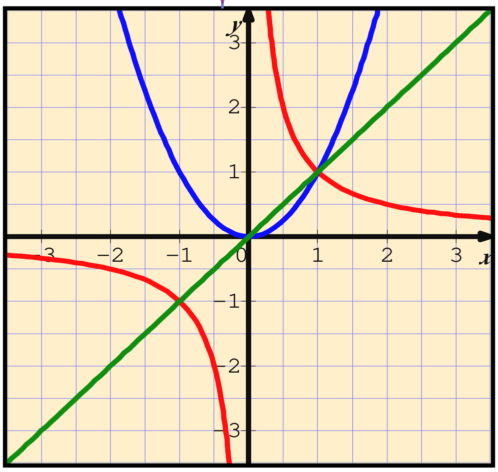
الفهرس

الفهرس



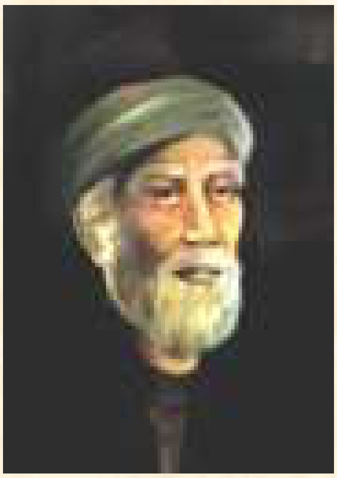
الدوال العددية

الكفاءات المستهدفة



- تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية
- دراسة اتجاه تغير دالة باستعمال الدوال المرجعية
- تمثيل بعض الدوال بيانيا باستعمال الدوال المرجعية

هو أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، ولد في خوارزم عام 973 م و توفي سنة 1050 م. لا يؤرخ مؤرخ لأبي الريحان إلا ويقر له بالعظمة في العلم، بل ويصل بعض مؤرخي العلوم من الغربيين إلى أنه من أعظم العلماء في كل العصور والأزمان. قد عاصر البيروني العديد من ملوك وسلاطين الهند وخوارزم من أمثال أبو العباس المأمون وقد كان للبيروني علاقات بمختلف علماء عصره، من أمثال ابن سينا والفلكي أبي سهل عيسى النصراني. لقد أتقن البيروني العديد من اللغات إلى جانب الخوارزمية – لغة بلده – والعربية، فقد أتقن الفارسية و السريانية و اليونانية مما ساعده على الاطلاع على أصول العلوم في لغاتها الأصلية.

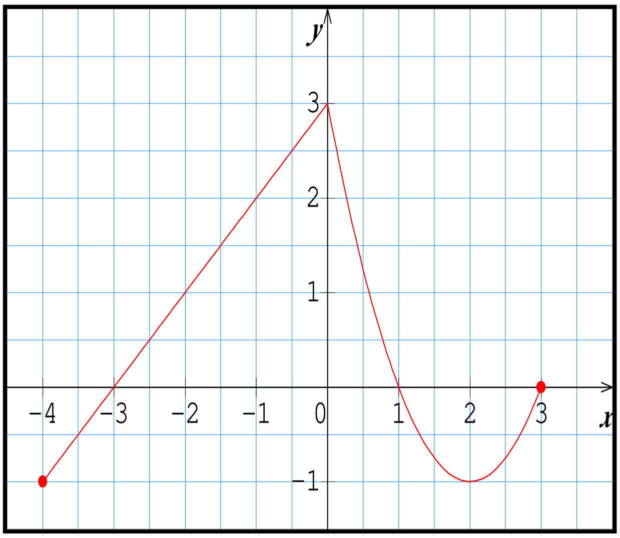


وقد كتب أبو الريحان عددًا كبيرًا من المؤلفات في مختلف العلوم، ونقل في كتبه آراء علماء الشرق والغرب القدماء، وناقشها وأضاف إليها، فوضع المؤلفات في مناقشة المسائل العلمية المختلفة، مثل وصفه لصورة واضحة في تثليث الزوايا في حساب المثلثات والدائرة، وبحث بحثًا مستفيضًا في خطوط الطول والعرض، ودوران الأرض حول محورها، كما بحث في الفرق بين سرعة الضوء وسرعة الصوت، وأوضح الفرق الكبير بين سرعتيهما هذا بالإضافة إلى ما كتبه في تاريخ الهند.

البيروني 973 م – 1050 م

1 أنشطة

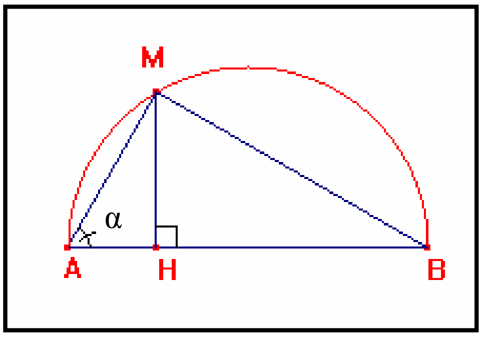
نشاط أول



المنحني (C_f) المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $[-4\ ,\ 3]$.

1. بقراءة بيانية عين صور كل من -2، 0 و 3.
2. حل بيانيا المعادلات التالية:
   ا) $f(x)=-1$، ب) $f(x)=0$، جـ) $f(x)=3$.
3. حل بيانيا المعادلتين التاليتين:
   ا) $f(x)=-x+1$ ، ب) $f(x)=-x$.
4. حل بيانيا المتراجحتين التاليتين:
   ا) $f(x)<0$ ، ب) $f(x)\geq -x+1$.
5. شكل جدول تغيرات الدالة f.
6. عين القيمتين الحديتين الصغرى و العظمى للدالة f على $[-4\ ,\ 3]$ محددا قيم المتغير x التي من أجلها تبلغ الدالة f هاتين القيمتين.

نشاط ثان



(C) نصف دائرة قطرها $[AB]$ حيث: $AB=1$. نرفق بكل نقطة M من (C)، مختلفة عن A، النقطة H مسقطها العمودي على (AB). (أنظر الشكل)

نضع: $\alpha=\widehat{BAM}$ ، $x=AH$ و $f(x)=AM$.

1. عبر عن $\cos\alpha$ بطريقتين مختلفتين.
2. استنتج عبارة $f(x)$ بدلالة x.
3. حدد مجموعة تعريف الدالة f.
4. حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نشاط ثالث

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^2+3x-4$.

1. باستعمال ورق ميليمتري أرسم في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2$ و $g(x)=-3x+4$.
2. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $h(x)=0$.
3. تحقق من النتائج بالحساب.

نشاط رابع

نعتبر الدالتين التآلفيتين f و g المعرفتين على المجال $[-2, 3]$ كالآتي:

$f(x)=\frac{1}{2}x+1$ و $g(x)=-x+2$.

ليكن (D) و (D') تمثيلاهما البيانيين في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. ما هو اتجاه تغير كل من الدالتين f و g ؟ أرسم كلا من (D) و (D').
2. بقراءة بيانية عين فاصلة و ترتيب نقطة تقاطع المنحنيين (D) و (D'). تحقق من النتيجتين بالحساب.
3. نعتبر الدوال f_1، f_2، f_3 و f_4 المعرفة على المجال $[-2,3]$ كما يلي:

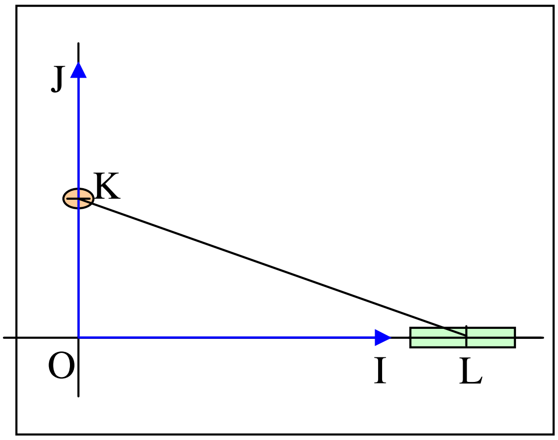
$f_1(x)=f(x)+g(x)$ ، $f_2(x)=f(x)\times g(x)$ ، $f_3(x)=-2\,f(x)$ و $f_4(x)=g(x)+1$.

- عين بدلالة x عبارة كل من $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ و $f_4(x)$.
- أرسم كلا من (D_3) و (D_4) التمثيلين البيانيين للدالتين f_3 و f_4 في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

عين D_h مجموعة تعريف الدالة h. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_h لدينا: $h(x)=-\frac{1}{2}-\frac{2}{x-2}$.

نشاط خامس



في الشكل المقابل، المعلم $(O,\overline{OI},\overline{OJ})$ متعامد ومتجانس

(وحدة الطول هي : $1km$).

النقطة $K\left(0,\frac{1}{2}\right)$ تمثل صومعة تبعد عن النقطة O بـنِـصف كيلومتر.

تتحرك عربة L على سكة حديدية ممثلة بمحور الفواصل.

لتكن f الدالة التي ترفق بالزمن t العدد x فاصلة النقطة L حيث:

$x=f(t)=25t$ (في اللحظة $t=0$ تكون L في O).

1. أحسب بدلالة x المسافة KL.
2. نضع: $y=KL=g(x)$. تحقق أن: $y=\sqrt{0.25+x^2}$.
3. بما أن لدينا x بدلالة t و y بدلالة x ، يكون المرور من t إلى y بواسطة الدالة h المحصل عليها بإتباع المخطط التالي:

$$t \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y$$
$$h$$

بين أن: $h(t)=\frac{1}{2}\sqrt{1+2500t^2}$

نتيجة: نقول أن h هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة g و نرمز إليها بالرمز $g\circ f$ ونكتب $h=g\circ f$ حيث:

$h(t)=g\left(f(t)\right)$

تذكير حول الدوال

1. الدالة و مجموعة التعريف

تعريف: D جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

إذا كانت D هي مجموعة تعريف الدالة f فإن f ترفق بكل عدد حقيقي x من D، عددا حقيقيا وحيدا نرمز له بالرمز $f(x)$. نقول أن $f(x)$ هي صورة x بالدالة f.

مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

2. التمثيل البياني لدالة

تعريف: f دالة و D مجموعة تعريفها.

التمثيل البياني (أو المنحنى الممثل) للدالة f في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ للمستوي، هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $x \in D$ و $y = f(x)$.

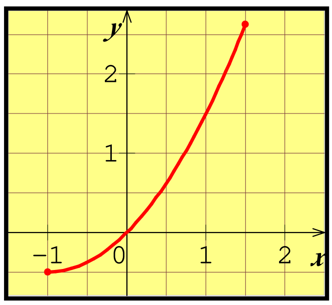
إذا رمزنا إلى منحنى الدالة f بالرمز (C) فإن $y = f(x)$ هي معادلة (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3. اتجاه تغير دالة على مجال

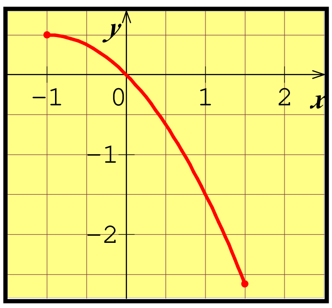
f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

تعاريف

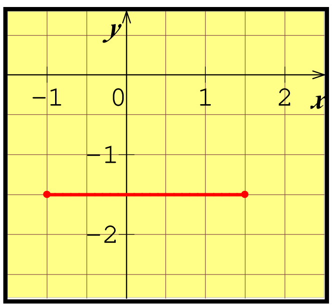
f متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن: $f(x_1) < f(x_2)$	f متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن: $f(x_1) > f(x_2)$	f ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، $f(x_1) = f(x_2)$



f متزايدة تماما على $[-1;1.5]$



f متناقصة تماما على $[-1;1.5]$



f ثابتة على $[-1;1.5]$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f إما متزايدة و إما متناقصة على مجال I نقول أنها رتيبة على هذا المجال.

تمرين محلول 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+6x+2$.

1. أوجد صور الأعداد 1، -2 و $\sqrt{3}$ بالدالة f .
2. أحسب سوابق العددين 2 و -7 بالدالة f .
3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x+a)^2-7$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه. هل يقبل العدد (-8) سوابق بالدالة f ؟

طريقة: لتعيين صورة عدد حقيقي α بدالة f معرفة بدستور نقوم بحساب $f(\alpha)$ أما لتعيين السوابق الممكنة لعدد حقيقي β نقوم بحل المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=\beta$

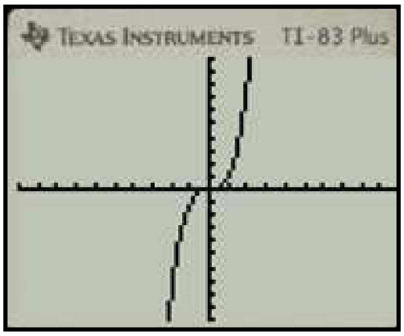
حـــل:

1. $f(1)=9$ ، $f(-2)=-6$ و $f(\sqrt{3})=5+6\sqrt{3}$.
2. $f(x)=2$ يعني $x^2+6x=0$ أي $x(x+6)=0$ أي $x=0$ أو $x=-6$ إذن للعدد 2 سابقتان هما 0 و -6.
$f(x)=-7$ يعني $x^2+6x+9=0$ أي $(x+3)^2=0$ أي $x=-3$ إذن للعدد -7 سابقة وحيدة هي -3.
3. لدينا: $f(x)=(x^2+6x)+2$ ومنه $f(x)=(x+3)^2-9+2$ إذن $f(x)=(x+3)^2-7$. إذن $a=3$.
$f(x)=-8$ يعني $(x+3)^2-7=-8$ أي $(x+3)^2=-1$. المعادلة لا تقبل حلولا و منه ليس للعدد -8 سوابق.

تمرين محلول 2

1. استعمل آلة حاسبة بيانية لتمثيل الدالة " مكعب " f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3$.
2. ما هو التخمين الذي يمكن الإدلاء به فيما يخص اتجاه تغير الدالة f ؟
3. تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 لدينا:
$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^{\,2}}{4}\right]$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .

حـــل:



1. بعد حجز عبارة $f(x)$ تظهر شاشة الآلة الحاسبة الرسم البياني للدالة f :
2. الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
3. لدينا: $(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^{\,2}}{4}\right]=(x_1-x_2)(x_1^{\,2}+x_1x_2+x_2^{\,2})$
$=x_1^{\,3}-x_2^{\,3}$

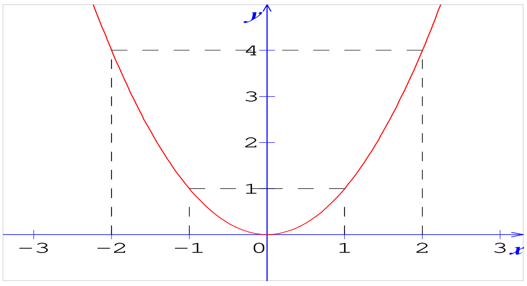
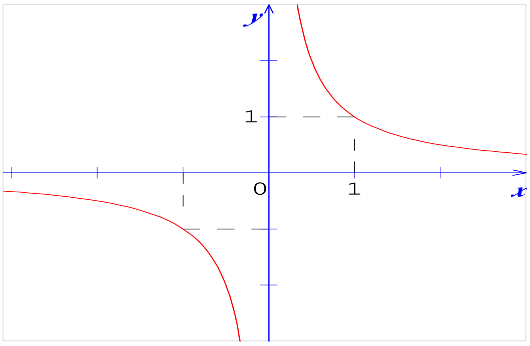
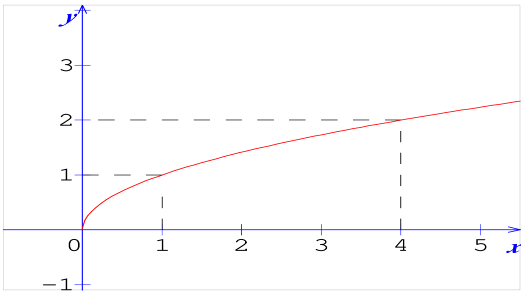
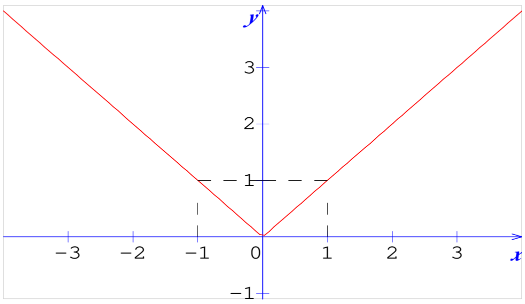
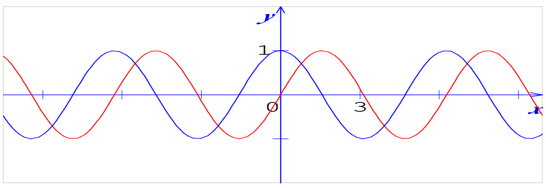
إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)<f(x_2)$ لأن $\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^{\,2}}{4}>0$ ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتيجة: الدالة " مكعب ": $x\mapsto x^3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

1 الدرس

الدوال المرجعية

نلخص في الجدول الموالي تذكيرا ببعض الدوال المرجعية التي درست في السنة الأولى ثانوي

الدالة	اتجاه التغير	التمثيل البياني
$f: x \mapsto x^2$	• f متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$ إذا كان $a < b \leq 0$ فإن $a^2 > b^2$ • f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ إذا كان $0 \leq a < b$ فإن $a^2 < b^2$	
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$	• f متناقصة تماما على $]-\infty, 0[$ إذا كان $a < b < 0$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ • f متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ إذا كان $0 < a < b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	• f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ إذا كان $0 \leq a < b$ فإن $\sqrt{a} < \sqrt{b}$	
$f: x \mapsto \lvert x \rvert$	• f متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$ إذا كان $a < b \leq 0$ فإن $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$ • f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ إذا كان $0 \leq a < b$ فإن $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$	
$f: x \mapsto \sin x$ $g: x \mapsto \cos x$	الدالتان $f: x \mapsto \sin x$ و $g: x \mapsto \cos x$ دوريتان دورهما 2π	

تمرين محلول 3

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2-4x+1$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=-(x+2)^2+5$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-2]$ و $[-2;+\infty[$

حـــل:

1. ننطلق من الشكل المعطى ثم نقوم بالنشر: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$-(x+2)^2+5=-(x^2+4x+4)+5=-x^2-4x-4+5=-x^2-4x+1=f(x)$$

2. لنعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2;+\infty[$

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث: $-2\le a<b$ و منه $0\le a+2<b+2$ (بإضافة العدد 2)

و بما أن الدالة " **مربع** " متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن $(a+2)^2<(b+2)^2$ ومنه $-(a+2)^2>-(b+2)^2$

إذن $-(a+2)^2+5>-(b+2)^2+5$. نجد هكذا إذن $f(a)>f(b)$.

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-2;+\infty[$.

بنفس الكيفية نثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$.

تمرين محلول 4

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+3$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;2[$.

حـــل: 1. ننطلق من الشكل المعطى ثم نقوم بتوحيد المقامات: من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا:

$$\frac{1}{x-2}+3=\frac{1+3(x-2)}{x-2}=\frac{1+3x-6}{x-2}=\frac{3x-5}{x-2}=f(x).$$

2. لنعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;+\infty[$

ليكن a و b عددين من المجال $]2;+\infty[$ حيث: $2<a<b$ و منه $0<a-2<b-2$ (بطرح العدد 2)

و بما أن الدالة " **مقلوب** " متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $\dfrac{1}{a-2}>\dfrac{1}{b-2}$ ومنه $\dfrac{1}{a-2}+3>\dfrac{1}{b-2}+3$.

نجد إذن $f(a)>f(b)$

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$.

بنفس الكيفية نثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$.

عمليات على الدوال

1. تساوي دالتين

تعريف: القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D و أن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا: $f(x)=g(x)$ و نكتب: $f=g$

2. العمليات الجبرية

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. λ و k عددان حقيقيان.

العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
مجموع f و g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D_f \cap D_g$
حاصل قسمة f على g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\{x\in D_f\cap D_g : g(x)\neq 0\}$

مثال: f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+2$

- الدوال $f+3$ ، $f+g$ ، $-2f$ ، $f\times g$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$(f+3)(x)=x^2+3$ ، $(f+g)(x)=x^2+x+2$ ، $(-2f)(x)=-2x^2$ ، $(f\times g)(x)=x^2(x+2)$

- الدالة $\dfrac{f}{g}$ هي الدالة المعرفة على $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ بـ: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

3. تركيب الدوال

تعريف: f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.
مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز $g\circ f$ و المعرفة على:
$D_{g\circ f}=\{x / f(x)\in D_g \text{ و } x\in D_f\}$ بـ: $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+3$ و لتكن g الدالة الجذر التربيعي $(x\mapsto\sqrt{x})$

يكون $-x+3\geq 0$ من أجل $x\leq 3$ ومنه مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$ هي: $D=]-\infty,3]$ و لدينا:

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{-x+3}$$

تمرين محلول 5

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+2$ و $g(x)=x^2+2x$

1. عرف الدوال $f+g$ ، $-f+2g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$
2. نعتبر الدالة h المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. هل الدالتان f و h متساويتان ؟

حــل:

1. من أجل كل عدد حقيقي x : $(f+g)(x)=x^2+3x+2$ ، $(-f+2g)(x)=2x^2+3x-2$

و $(f\times g)(x)=x^3+4x^2+4x$

من أجل $x\neq 0$ و $x\neq -2$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$ ($x^2+2x=0$ من أجل $x=0$ أو $x=-2$)

2. الدالتان f و h متمايزتان لأن ليس لهما نفس مجموعة التعريف.

تمرين محلول 6

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;+\infty[$ و $[1;+\infty[$ على الترتيب بـ: $f(x)=2x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$

1. أكتب كلا من f و g على شكل مركب دالتين مرجعيتين يطلب تحديدهما.
2. عرف الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

حــل:

1. لدينا: $x\xrightarrow{u_1}x^2\xrightarrow{v_1}2x^2+1$ (f) و $x\xrightarrow{u_2}x-1\xrightarrow{v_2}\sqrt{x-1}$ (g)

ومنه $f=v_1\circ u_1$ حيث: $u_1:x\to x^2$ و $v_1:x\to 2x+1$

و $g=v_2\circ u_2$ حيث: $u_2:x\to x-1$ و $v_2:x\to\sqrt{x}$

نلاحظ فعلا أن الدوال u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 دوال مرجعية.

2. تعريف الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

لدينا من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g(x)\geq 0$ أي $g(x)\in[0;+\infty[$ ومنه الدالة $f\circ g$ معرفة على $[1;+\infty[$

و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 1$ أي $f(x)\in[1;+\infty[$ ومنه الدالة $g\circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned}f\circ g(x)&=f\left[(g(x))\right]\\&=f\left(\sqrt{x-1}\right)\\&=2\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1\\&=2(x-1)+1\\&=2x-1\end{aligned}$$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned}g\circ f(x)&=g\left[f(x)\right]\\&=g\left(2x^2+1\right)\\&=\sqrt{\left(2x^2+1\right)-1}\\&=\sqrt{2x^2}\\&=\sqrt{2}\,x\end{aligned}$$

اتجاه التغير

1. اتجاه تغير الدالة: $f+k$

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و k عدد حقيقي.
للدالتين f و $f+k$ نفس اتجاه التغير على المجال I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.
إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I فإن $f(a)<f(b)$. بإضافة k إلى طرفي المتباينة نحصل على:
$f(a)+k<f(b)+k$ أي: $(f+k)(a)<(f+k)(b)$. إذن الدالة $f+k$ متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا إذا كانت f متناقصة تماما على المجال I.

2. اتجاه تغير الدالة: λf

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و λ عدد حقيقي غير معدوم.
- إذا كان $\lambda>0$ يكون للدالتين f و λf نفس اتجاه التغير على المجال I.
- إذا كان $\lambda<0$ يكون اتجاها تغير الدالتين f و λf متعاكسين على المجال I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.
إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I و كان $\lambda>0$ فإن: $f(a)<f(b)$ و $\lambda f(a)<\lambda f(b)$ أي أن:
$(\lambda f)(a)<(\lambda f)(b)$ إذن الدالة λf متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا في الحالات الثلاثة الأخرى.

3. اتجاه تغير الدالة: $g\circ f$

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و g دالة رتيبة تماما على مجال J حيث: $f(I)\subset J$
- إذا كان للدالتين f و g نفس اتجاه التغير تكون الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما على I.
- إذا كان اتجاها تغير الدالتين f و g متعاكسين تكون الدالة $g\circ f$ متناقصة تماما على I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.
إذا كانت f متزايدة تماما على I و كانت g متزايدة تماما على J فإن: $f(a)<f(b)$ و $g[f(a)]<g[f(b)]$
($f(a)$ و $f(b)$ عنصران من J) ومنه $(g\circ f)(a)<(g\circ f)(b)$. إذن الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا في الحالات الثلاثة الأخرى.

تمرين محلول 7

أدرس اتجاه تغير كل من الدالتين الآتيتين:

1) f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=-\dfrac{3}{x}+2$

2) g هي الدالة المعرفة على $[1.5;+\infty[$ بـ: $g(x)=(-2x+3)^2$

طريقة: عند دراسة اتجاه تغير دالة f يمكن أن نحاول كتابة f على الشكل $u+k$ ، λu أو $v\circ u$ حيث: u و v دالتان مرجعيتان.

حـــل:

1. إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{x}$ يكون لدينا: $f=-3h+2$.

للدالتين f و $-3h$ نفس اتجاه التغير ومنه فاتجاها تغير الدالتين f و h متعاكسين.

بما أن h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ فإن f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$.

2. إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على $[1.5;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ على الترتيب بـ:

$u(x)=-2x+3$ و $v(x)=x^2$ و علما أنه من أجل كل x من $[1.5;+\infty[$ ، $u(x)\leq 0$ يكون لدينا: $g=v\circ u$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على $[1.5;+\infty[$ و الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1.5;+\infty[$.

تمرين محلول 8

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة $(f+g)$ في الحالتين التاليتين:

ا) $f(x)=3x+1$ و $g(x)=-2x+3$ ب) $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x+5$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $(f\times g)$ علما أن: $f(x)=x-\sqrt{2}$ و $g(x)=x+\sqrt{2}$

حـــل:

1. ا) لدينا: $(f+g)(x)=-2x+3+3x+1=x+4$ ومنه الدالة $(f+g)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب)لدينا: $(f+g)(x)=2x+1-3x+5=-x+6$ ومنه الدالة $(f+g)$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. لدينا: $(f\times g)(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=x^2-2$. للدالتين $(f\times g)$ و الدالة " مربع " نفس اتجاه التغير و منه فالدالة $(f\times g)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

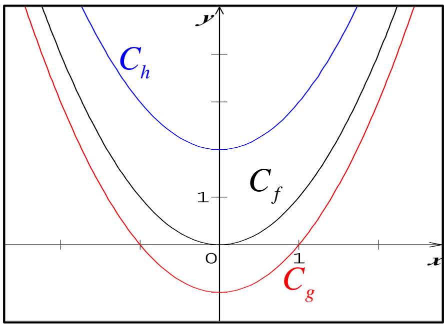
تعليق: لا يمكن إعطاء قواعد عامة تمكن من استنتاج اتجاه تغير الدالتين $(f+g)$ و $(f\times g)$ في كل الحالات إلا أن ذلك يكون ممكنا إذا أضيفت شروط على الدالتين f و g .

التمثيل البياني

1. التمثيل البياني للدالة: $f+k$

مبرهنة: إذا كان (C_f) و (C_{f+k}) التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين f و $(f+k)$ على الترتيب حيث k عدد حقيقي فإن (C_{f+k}) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

برهان: نعتبر النقطتين $M(x,f(x))$ من (C_f) و $M'(x,(f+k)(x))$ من (C_{f+k}). بما أن: $(f+k)(x)=f(x)+k$ فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ مركبتاه $(0,k)$ و $\overrightarrow{MM'}=k\vec{j}$. إذن M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$. و منه المنحنى (C_{f+k}) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.



مثال: نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

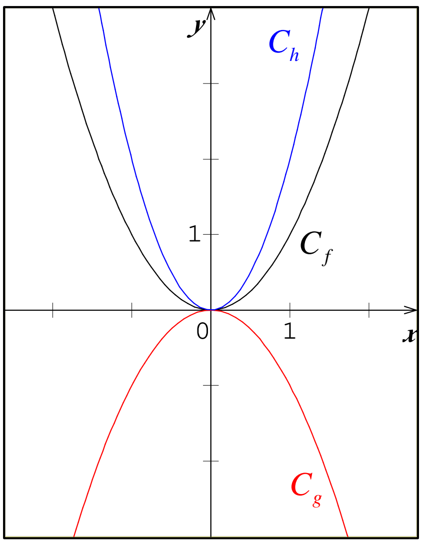
$f(x)=x^2$ ، $g(x)=x^2-1$ و $h(x)=x^2+2$

لدينا $g=f-1$ ومنه (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$.

لدينا $h=f+2$ ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$.

2. التمثيل البياني للدالة: λf

مبرهنة: ليكن (C_f) و $(C_{\lambda f})$ التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين f و (λf) على الترتيب حيث λ عدد حقيقي غير معدوم. و لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x.
نحصل على نقطة من $(C_{\lambda f})$ ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد λ.



برهان: إذا كانت $M(x,f(x))$ نقطة من (C_f) فإن $M'(x,\lambda f(x))$ نقطة من $(C_{\lambda f})$ لأن $(\lambda f)(x)=\lambda.f(x)$.

مثال: نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=-x^2$ و $h(x)=2x^2$

و لتكن (C_f)، (C_g) و (C_h) تمثيلاتها البيانية في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

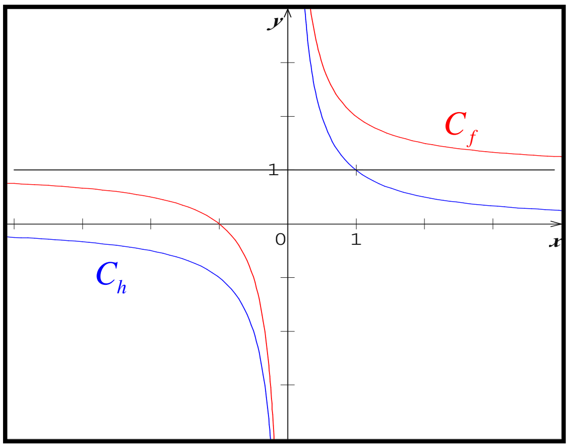
لدينا $g=-f$ و $h=2f$

ملاحظة: إذا كان $\lambda=-1$ يكون المنحنيان (C_f) و (C_{-f})، المرسومان في معلم متعامد، متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل.

تمرين محلول 9

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$
2. أرسم في معلم ، التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " مقلوب ".



حــــل:

1. من أجل $x\neq 0$ لدينا: $f(x)=\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$
2. إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

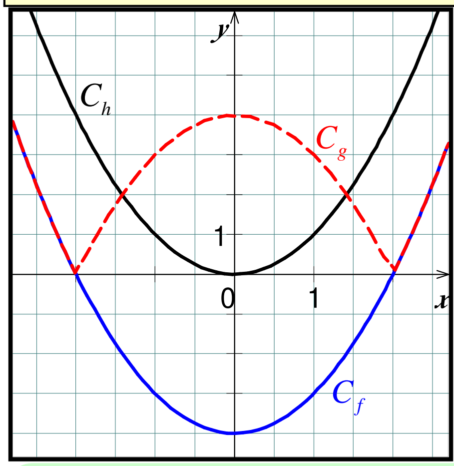
بـِ: $h(x)=\dfrac{1}{x}$ يكون لدينا: $f=h+1$

إذن، في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، المنحنى الممثل للدالة f هو صورة القطع الزائد الممثل للدالة h بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$

تمرين محلول 10

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\left|f(x)\right|$. نسمي (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان على الترتيب في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. ارسم المنحنى (C_f) انطلاقا من (C_h) التمثيل البياني للدالة $h:x\mapsto x^2$ (h هي الدالة " مربع ")
2. بين كيف يمكن استنتاج (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.



حــــل:

1. (C_f) هو صورة (C_h) بالانسحاب الذي شعاعه $-4\vec{j}$ (التمرين1)
2. إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن $g(x)=f(x)$

و إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن $g(x)=-f(x)$

إذن بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f)

و بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\leq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_{-f})

و نعلم أن (C_{-f}) هي نظيرة (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

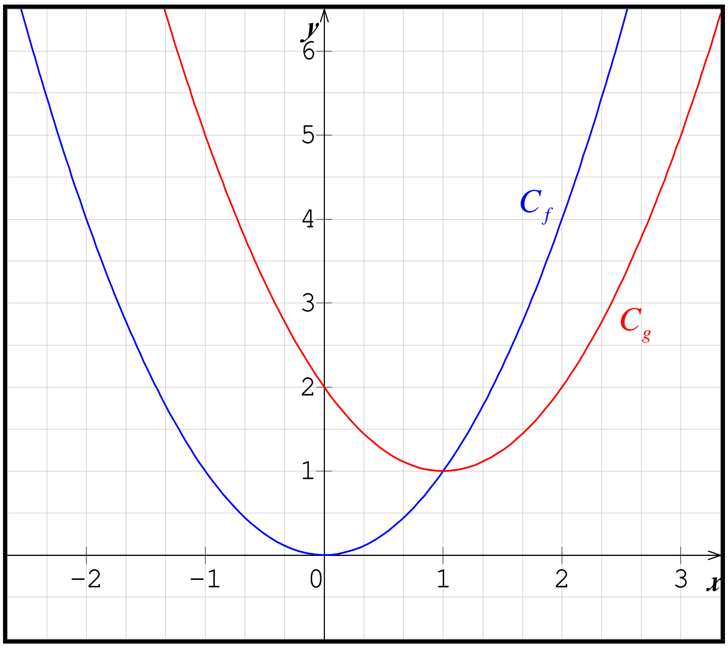
طريقة: لرسم التمثيل البياني للدالة $|f|$ نحتفظ بجزء (C_f) الواقع فوق محور الفواصل، و نرسم النظير بالنسبة إلى محور الفواصل لجزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل .

أعمال موجهة

1

التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto f(x+b)+k$

1. مثال باستعمال راسم منحنيات



باستعمال راسم منحنيات تحصلنا في الشكل المقابل

على (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين

f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=x^2$ و $g(x)=(x-1)^2+1$

لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x

لتكن M' نقطة من (C_g) فاصلتها $x+1$.

أثبت أن $\overrightarrow{MM'}$ شعاع ثابت

2. الحالة العامة

لتكن f و g دالتين معرفتين على D حيث: من أجل كل x من D لدينا: $g(x)=f(x+b)+k$ حيث b و k عددان حقيقيان معلومان.نرمز بـِ: (C_f) و (C_g) إلى تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقطتين $M(x, f(x))$ من (C_f) و $M'(x-b, g(x-b))$ من (C_g)

أ) بين أن: $\overrightarrow{MM'}=-b\vec{i}+k\vec{j}$ ثم استنتج التحويل النقطي الذي يحول النقطة M إلى النقطة M'.

ب) حدد طريقة لرسم المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f).

3. حالة خاصة ($k=0$)

إذا كانت f و g دالتين معرفتين على D حيث: من أجل كل x من D لدينا: $g(x)=f(x+b)$ حيث b عدد حقيقي معلوم و إذا كان (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم للمستوي، بين كيف يتم استنتاج المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f).

4. تطبيق

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]-1;+\infty[$ بـِ:

$g(x)=\sqrt{x+1}$ و $h(x)=\sqrt{x+1}+2$

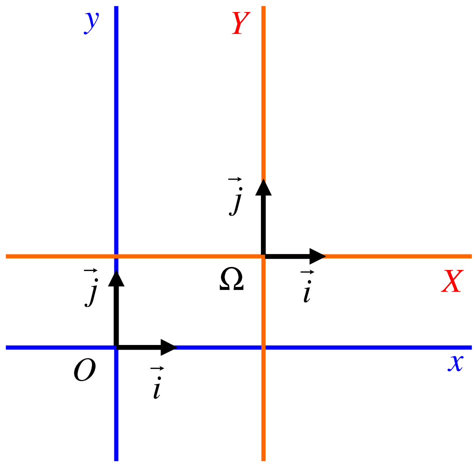
و ليكن (C_g) و (C_h) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم للمستوي.

ا) انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة " **الجذر التربيعي** " $f: x \to \sqrt{x}$ ارسم المنحنى (C_g).

ب) حدد طريقتين لرسم المنحنى (C_h) ثم ارسمه.

تغيير المعلم

1. دساتير تغيير المعلم



$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم للمستوي و Ω نقطة من المستوي حيث $\left(x_0\,,y_0\right)$ هي احداثياها بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. و ليكن $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم جديد للمستوي.

إذا كانت M نقطة من المستوي حيث $\left(x,y\right)$ هي احداثياها بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و حيث $\left(X,Y\right)$ هي احداثياها بالنسبة إلى المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ بين أن:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$ دساتير تغيير المعلم

2. دراسة مثال أول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + 4x + 3$ وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

ولتكن Ω النقطة ذات الإحداثيات $(-2,-1)$ بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

- ❖ بعد تعيين دساتير تغيير المعلم بين أن معادلة $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ هي: $Y = X^2$ ثم ارسمه.
- ❖ إذا كان المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ متعامدا عين معادلة محور تناظر المنحنى $\left(C_f\right)$

3. دراسة مثال ثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ولتكن Ω النقطة ذات الإحداثيات $(-1,1)$ بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

- ❖ بعد تعيين دساتير تغيير المعلم بين أن معادلة $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ هي: $Y = \dfrac{1}{X}$ ثم ارسمه.
- ❖ عين مركز تناظر المنحنى $\left(C_f\right)$

4. الحالة العامة

- ☒ حدد مختلف المراحل المتبعة لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـمنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
- ☒ حدد مختلف المراحل المتبعة لإثبات أن نقطة $\Omega(a,b)$ مركز تناظر لـمنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

5. تطبيق

بين أن النقطة $\Omega(2,3)$ مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$ الممثل في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ للدالة f المعرفة على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

لتكن f الدالة المعرفة على أكبر مجموعة ممكنة D جزء من $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

1. بين أن: $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$
2. بين أن: $f=g\circ h$ حيث g هي الدالة " الجذر التربيعي " و h دالة يطلب تحديدها.
3. تحقق أن من أجل كل x من D لدينا: $h(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$. استنتج اتجاه تغيّر h على $]-\infty;-2]$ وعلى $]-1;+\infty[$
4. عين اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;-2]$ و على $]-1;+\infty[$
5. باستعمال الحاسبة البيانية مثل بيانيا الدالة f ثم تحقق من صحة الجواب على السؤال 4.

1. التحقق من أن $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

تكون الدالة f معرفة من أجل قيم x التي تحقق: $\dfrac{x+2}{x+1}\geq 0$ و $x+1\neq 0$. لندرس حسب قيم x إشارة $\dfrac{x+2}{x+1}$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		-	0	+	|	+	
$x+1$		-	|	-	0	+	
$\dfrac{x+2}{x+1}$		+	0	-	||	+	

نستنتج من الجدول هكذا أن: $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

2. تعيين الدالة h

بإتباع المخطط التالي: $x\mapsto\dfrac{x+2}{x+1}\mapsto\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$ و علما أن: $g:x\mapsto\sqrt{x}$ فإن: $h:x\mapsto\dfrac{x+2}{x+1}$

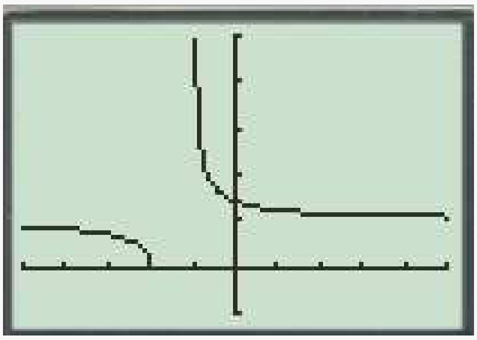
و لدينا فعلا: $f=g\circ h$

3. تغيرات الدالة h: لدينا من أجل كل x من D: $h(x)=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=1+\dfrac{1}{x+1}$

من $h(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$ نستنتج أن اتجاه تغير h هو نفسه اتجاه تغير الدالة: $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$

نلاحظ كذلك أن الدالة: $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ هي مركب الدالة: $x\mapsto x+1$ متبوعة بالدالة: $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

بما أن اتجاهي الدالتين $x\mapsto x+1$ و $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ متعاكسان فإن الدالة $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ متناقصة على $]-\infty;-2]$ وعلى $]-1;+\infty[$



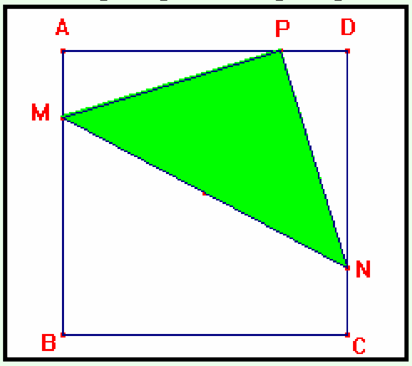
4. تعيين اتجاه تغير الدالة f

بما أن الدالة g متزايدة و الدالة h متناقصة فإن الدالة f متناقصة على $]-1;+\infty[$ وعلى $]-\infty;-2]$

5. التمثيل البياني للدالة f **و التحقق من صحة النتائج**

القراءة البيانية لمنحنى الدالة f تؤكد فعلا صحة نتائج السؤال الرابع.

$ABCD$ مربع طول ضلعه $2cm$. نعتبر النقط M ، N و P حيث: $M\in[AB]$ ، $N\in[CD]$ و $P\in[AD]$.



نفرض أن النقطة M تتحرك على $[AB]$ مع: $AM=CN=DP$.

نضع $AM=x$ و نرمز بـِ $f(x)$ إلى مساحة المثلث MNP .

1. عين D مجموعة تعريف f ثم تحقق أن: $f(x)=(x-1)^2+1$

2. أدرس على $[0;2]$ تغيرات الدالة: $x\mapsto(x-1)^2$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على $[0;2]$. شكل جدول تغيرات f ثم عين وضعية M التي تكون من أجلها مساحة المثلث MNP أصغر ما يمكن.

3. اشرح كيف يتم رسم (C_f) التمثيل البياني لـِ f انطلاقا من القطع المكافئ: $y=x^2$ ثم ارسمه.

1. **تعيين D و حساب $f(x)$** : بما أن M تتحرك على $[AB]$ و $AB=2$ فإن: $D=[0;2]$

المثلث MNP متساوي الساقين و قائم في P ومنه: $f(x)=\frac{1}{2}MP^2=\frac{1}{2}\left[x^2+(2-x)^2\right]=x^2-2x+2$

لدينا: $(x-1)^2+1=x^2-2x+1+1=x^2-2x+2$ ومنه: $f(x)=(x-1)^2+1$

2. تغيرات الدالة f

الدالة: $x\mapsto(x-1)^2$ متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;2]$ و بما أن للدالة: $x\mapsto(x-1)^2+1$ نفس اتجاه تغير $x\mapsto(x-1)^2$ فإن الدالة f متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;2]$.

x	0		1		2
$f(x)$	2	↘	1	↗	2

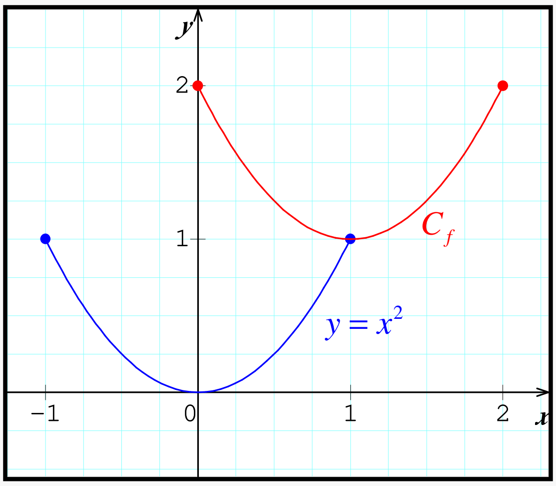
نلاحظ أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة 1 لـِ x إذن وضعية النقطة M التي تكون من أجلها مساحة المثلث MNP أصغر ما يمكن هي منتصف القطعة $[AB]$

3. رسم المنحني (C_f)

المنحني (C_f) هو صورة القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;1)$

نقوم برسم القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ في المجال $[-1;1]$ ثم نستنتج المنحني (C_f)

المنحني (C_f) قطع مكافئ ذروته هي صورة النقطة O ذروة القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;1)$. و منه ذروة (C_f) هي النقطة $(1;1)$.



التمثيل البياني للدالة kf

5. دراسة مثال

نعتبر الدالة " **مربع** " f المعرفة بــ: $f(x)=x^2$ و لتكن g الدالة المعرفة بــ: $g=kf$

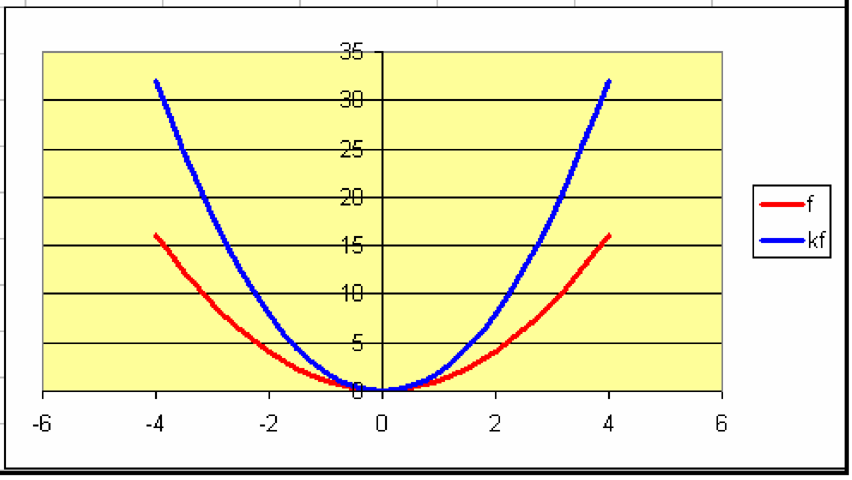
حيث k عدد حقيقي.

نرمز بــ (C_f) إلى منحنى الدالة f و بــ (C_{kf}) إلى منحنى الدالة $g=kf$.

حضر ورقة حساب مماثلة للورقة الموالية:

التمثيل البياني للدالة kf

k=	2	
x	f(x)	kf(x)
-4	16	32
-3	9	18
-2	4	8
-1	1	2
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	18
4	16	32



ملاحظات:

- حتى تتغير كل المعطيات و المنحنيات بتغير قيمة k يتم الحجز في الخلية $C5$ كما يلي: $=2F4*B5$
علما أنه يتم حجز $F4$ انطلاقا من لوحة المفاتيح.
- يمكنك تغيير قيم المتغير x و اختيار الخطوة التي تريد.

الأسئلة:

1. قم بتغيير قيم k في الخلية $B2$. ماذا تلاحظ ؟
2. ماذا يمكن القول عن (C_f) و (C_{kf}) لما $k=-1$ ؟ ماذا يحدث لما $k=0$ ؟
3. قارن بين اتجاهي تغيرات f و kf لما $k>0$ ثم لما $k<0$.

6. دراسة أمثلة أخرى غير الدالة f بأخذ دوال مرجعية أخرى مع تغيير المعطيات وفق طبيعة كل دالة. هل تبقى الملاحظات السابقة نفسها أم تتغير ؟

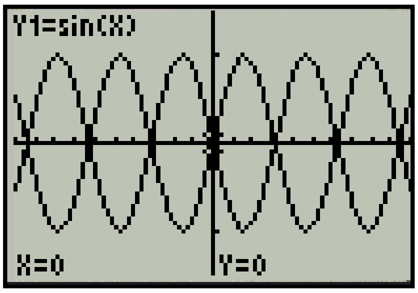
ملاحظة: باستخدام مجدول $Excel$ أو بأي راسم آخر للمنحنيات ، يمكن دراسة التمثيلات البيانية للدوال التالية:

$x\mapsto f(x)+b$ ، $x\mapsto f(x+a)$ ، $x\mapsto f(x+a)+b$.

إكتشاف بعض العلاقات المثلثية

1. دراسة مثال

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.



باستعمال آلة حاسبة بيانية تحصلنا على (C_f) و (C_g) منحنيي f و g.

نلاحظ أن (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل. يمكن إذن أن نضع التخمين التالي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

2. علاقات مثلثية أخرى

باستعمال آلة حاسبة بيانية أو أحد راسمات المنحنيات مثل بيانيا كلا من f و g و ضع تخمينا في كل مرة:

- $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\cos(\pi-x)$ • $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sin(\pi-x)$

3. مقارنة $\cos(2x)$ و $2\cos x$

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\cos(2x)$ و $g(x)=2\cos x$.

❖ باستعمال آلة حاسبة بيانية أو راسم منحنيات ارسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f.

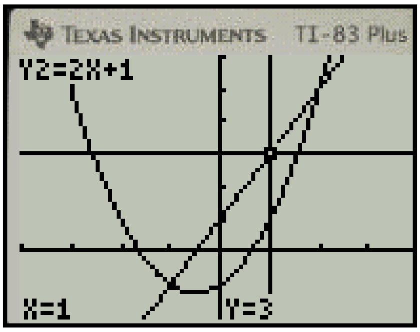
يظهر أن الدالة f دالة دورية. ضع تخمينا حول دورها ثم أنجز برهانا يؤكد صحة التخمين.

❖ أرسم على نفس شاشة آلة حاسبة بيانية (C_f) و (C_g) منحنيي الدالتين f و g. ماذا تلاحظ ؟

تعيين بيانيا $(g\circ f)(a)$ انطلاقامن منحنيي الدالتين f و g

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2+x-1$ و $g(x)=2x+1$

مثل على شاشة الآلة الحاسبة البيانية $Ti\,83+$ (C_f) و (C_g) حيث: $-4\le x\le 4$ و $-2\le y\le 6$



الهدف هو تعيين $(g\circ f)(1)$ بيانيا.

1. أحجز $f(x)$ في Y_1 و $g(x)$ في Y_2. أضغط على **TRACE** ثم أحجز 1 وصادق باللمسة **ENTER**. أضغط على **2nd** ثم **PRGM** ثم " *vertical* " ثم صادق باللمسة **ENTER** . في شاشة الحساب أحجز $Y_1(1)$ ثم خزنها بواسطة اللمسة **STO →** ثم **ALPHA** ثم **MATH**. أضغط على **TRACE** ثم انقل الزالق على Y_2.

أحجز A و صادق باللمسة **ENTER**. استعمل **2nd** ثم **PRGM** ثم " *Horizontal* ".ثم صادق باللمسة **ENTER** .

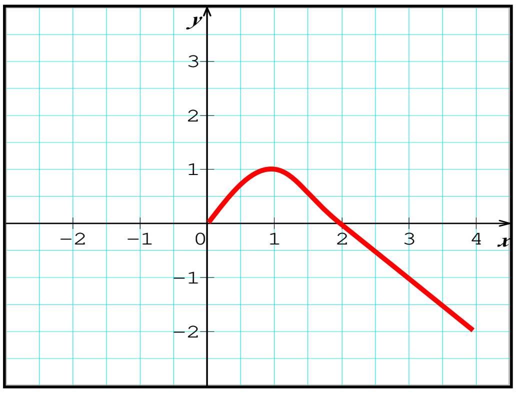
2. أرسم على نفس الشاشة (C_h) التمثيل البياني للدالة h حيث $h=g\circ f$. يمكنك حجز $Y_2(Y_1)$ في Y_3.

ما هو التخمين الذي يمكن وضعه فيما يخص (C_h) و نقطة تقاطع المستقيمين العمودي و الأفقي؟ تحقق من صحته.

أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **3** أجب بصحيح أم خاطئ

1 إليك منحنى دالة f معرَفة على المجال $[0;4]$



1) f متزايدة على المجال $[0,2]$

2) f موجبة على المجال $[0,2]$

3) f رتيبة تماما على المجال $[1,3]$

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين

5) (-2) حل للمعادلة : $f(x)=4$

2 f و g دالتان معرَفتان على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=-x^2+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$

1) $(f+g)(5)=-\dfrac{22}{5}$ ، 2) $(\dfrac{f}{g})(x)=-x^3+3x$

3) $(f.g)(x)=\dfrac{-x^2+3}{x}$ ، 4) $(2f+3g)(1)=7$

3 f و g و h دوال حيث :

$f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ و جدول تغيرات الدالة h هو :

x	0	3	7
$h(x)$	-1 ↗	0	↗ 4

نضع : $u=f\circ g$ و $v=g\circ h$

1) u معرَفة على المجال $[0,7]$

2) u متزايدة على المجال $[0,3]$

3) $u(x)$ عنصر من المجال $[0,9]$

4) v معرَفة على المجال $[0,7]$

5) v متزايدة على المجال $[0,\sqrt{7}]$

6) v معرَفة على المجال $[3,7]$

أسئلة متعددة الاختيارات

بالنسبة إلى التمارين من **4** إلى **7**

أختر الجواب الصحيح من بين الاقتراحات :

4 f و g دالتان معرَفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=x^2$ و $g(x)=x-2$

$(f.g)(x)=...$

1) x^3+2x^2 ، 2) x^3-2 ، 3) $x(x^2-2x)$

5 g و h دالتان معرَفتان على R بـ :

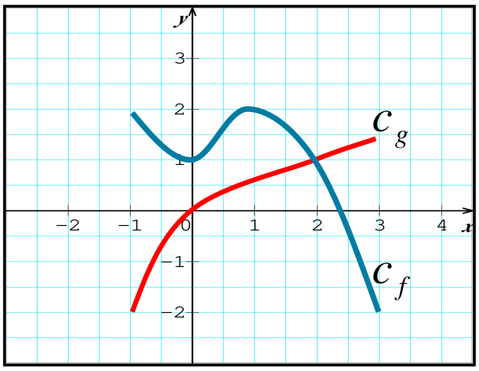
$g(x)=2x-1$ و $h(x)=x^2+3$

$(g\circ h)(x)=...$

1) $2x^2+5$ ، 2) $2x^2-1$ ، 3) $2x^2+2$

6 (C_f) و (C_g) منحنيا الدالتين f و g

في المستوي المزوَد بمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل)



في المجال $[-1,2]$ لدينا :

1) $f\geq g$ ، 2) $g\geq f$ ، 3) $f=g$

7 f دالة معرَفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

1) f متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$

2) f متزايدة على المجال $]-1;+\infty[$

3) f موجبة على المجال $]-1;+\infty[$

4) منحنى الدالة f يسمى قطع مكافئ .

8 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

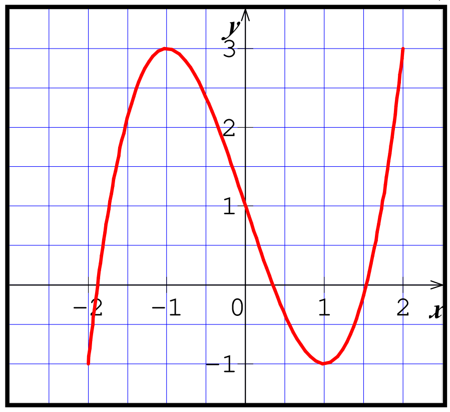
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+3$$

1) احسب صور الأعداد : 1 , 0 , -2 , $\sqrt{3}$

2) احسب سوابق الأعداد : 3 , $\frac{17}{2}$

9 لتكن الدالة f المعرفة في المجال $[-2;2]$

(C_f) هو المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم للمستوي



1) عين صور الأعداد -1 ، 0 ، 1 بالدالة f .

2) عين سوابق الأعداد -1 ، 1 ، 5 بالدالة f .

3) حل في $[-2;2]$ المعادلة $f(x)=3$.

• بالنسبة للتمارين من **10** إلى **21**

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

10 $f(x)=x^3-2x+5$

11 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{7}$

12 $f(x)=x^2-|x+1|$

13 $f(x)=x-\dfrac{1}{2x}$

14 $f(x)=x+1-\dfrac{1}{x-4}$

15 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-4}$

16 $f(x)=\dfrac{5}{2x^2+1}$

17 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x-3|}$

18 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-3}$

19 $f(x)=x-\sqrt{x-1}$

20 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2x-6}$

21 $f(x)=\sin x-3\cos x$

◄ بالنسبة للتمارين من **22** إلى **27**

أذكر إن كانت الدالتان f و g متساويتين في كل حالة من الحالات التالية :

22 $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}$

23 $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$

24 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$ و $g(x)=|x|$

25 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

26 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)}$ و $g(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^2-1}$

27 $f(x)=1+\dfrac{2}{x-3}$ و $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$

28 . f و g دالتان حيث :

$g(x)=x^2+2x-3$ و $f(x)=x^2+1$

1) عين مجموعة تعريف الدوال:

f ، g ، $f+g$ ، $f\times g$

2) أوجد عبارة الدالتين $(f+g)(x)$ و $(f\times g)(x)$

29 . f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$g(x)=1-\dfrac{4}{x+1}$ و $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

1) أوجد مجموعة تعريف الدالتين f و g

2) عين مجموعة تعريف : $3f$ و $-2g$

30 . لتكن الدالتان f و g المعرفتان على R كما يلي:

$g(x)=4x+3$ و $f(x)=2x^2-1$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد x يكون :

$(f+g)(x)=2(x+1)^2$

2) برهن أن الدالة : $2f+g$ هي مربع دالة تآلفية يطلب تعيينها .

31 . f و g دالتان معرفتان على $]0;+\infty[$ بــ:

$g(x)=\dfrac{-3}{2x}$ و $f(x)=5x-2$

1) عين صور الأعداد 1 ، 2 ، $\sqrt{5}$ بواسطة الدوال :

$f+g$ ، $3f$ ، $-2g$

2) عين صور الأعداد $-\dfrac{1}{2}$ ، -1 ، 3 بواسطة الدوال :

$f\times g$ ، $\dfrac{f}{g}$ ، $\dfrac{1}{2}f-g$

- بالنسبة للتمارين من **32** . إلى **36** .

عين $f\circ g$ و $g\circ f$ في كل حالة من الحالات التالية:

32 $g(x)=-3x$ وَ $f(x)=2x$

33 $g(x)=3x+2$ وَ $f(x)=x-3$

34 $g(x)=2-3x$ وَ $f(x)=x^2$

35 $g(x)=2x$ وَ $f(x)=\dfrac{-1}{x+1}$

36 $g(x)=\dfrac{1}{x}-3$ وَ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$

37 . f ، g ، h ، k دوال معرفة على R بــ :

1) $f(x)=2x$ ، $g(x)=x^2$ ، $h(x)=x+1$

$k(x)=x^2+1$

أثبت ما يلي :

1) $k=h\circ g$ 2) $f+k=g\circ h$

3) $f\circ k=2k$ 4) $k\circ h=g+2h$

5) $g\circ k=gk+k$ 6) $k\circ k=g^2+2k$

- بالنسبة للتمارين من . **38** . إلى . **43** .

فكك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

38 . $f(x)=(x-1)^2$

39 . $f(x)=(x+2)^2+1$

40 . $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$

41 . $f(x)=\sqrt{x+1}$

42 . $f(x)=\cos(x-1)$

43 . $f(x)=\left|\dfrac{2x}{5}-1\right|$

اتجاه التغيّر

44 f و g دالتان معرّفتان على المجال

$I=[0;+\infty[$ بــ :

$g(x)=x^2$ و $f(x)=x$

أثبت أن الدالة $f+g$ متزايدة تماما على المجال I

45 . f دالة معرَفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ :

$$f(x)=x^2+|x|$$

أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

46 . f دالة معرَفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x-\frac{1}{x}$$

بين أن f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

47 . f دالة معرَفة على المجال $]-\infty;3]$ بـ :

$$f(x)=\sqrt{3-x}$$

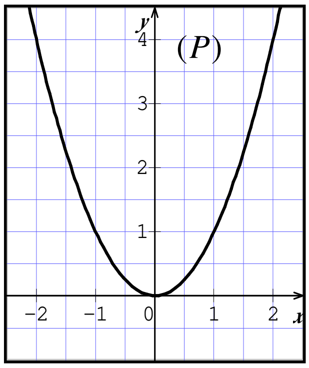
1) فكك الدالة f إلى مركب دالتين مرجعيتين يطلب تعيينهما .

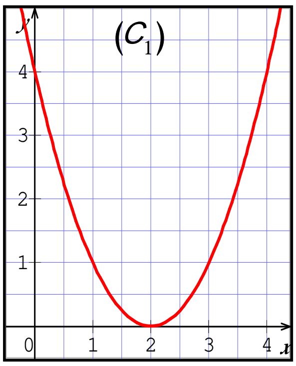
2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;3[$

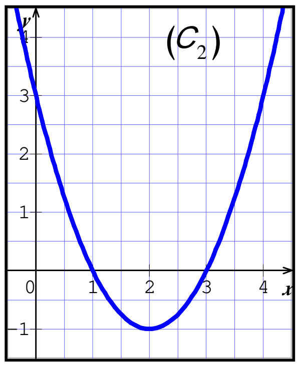
48 . (P) هو قطع مكافئ الممثل للدالة "مربع"

نرسم (C_1) صورة (P) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{i}$

و (C_2) صورة (C_1) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$



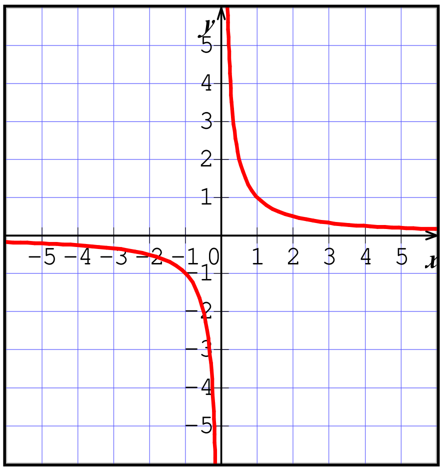


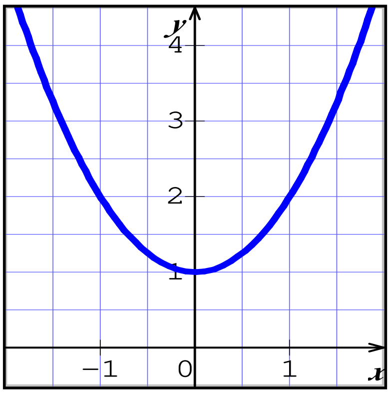


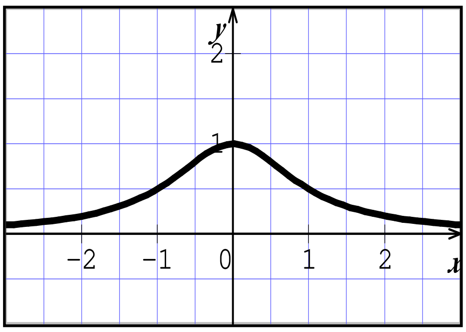
عين الدالتين f و g الممثلتين بالمنحنيين (C_1) و (C_2).

49 . f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}^*$ حيث :

$f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$. نضع $h=g\circ f$







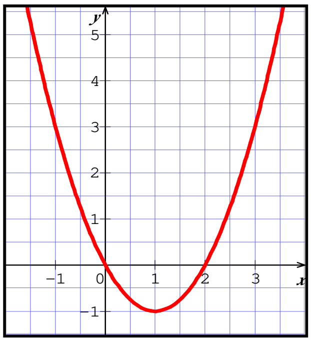
1) عين مجموعة تعريف الدالة h

2) أنسب كل منحنى لدالته .

3) أثبت أن h متناقصة على $]0,+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty,0[$.

تمارين

50 (C) هو المنحنى البياني للدالة f (انظر الشكل)



مثل في نفس المعلم المنحني البياني للدوال h و g و k حيث : $g(x) = -f(x)$

$h(x) = |f(x)|$ ، $k(x) = f(x-1)+3$

51 لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

(C) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

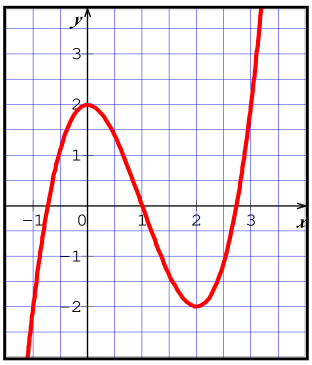
1) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث : من أجل كل عدد x يكون : $f(x) = (x-\alpha)^3 + \beta$

2) شكل جدول تغيرات الدالة : $x \mapsto x^3$

3) استنتج جدول تغيرات الدالة f .

4) أرسم المنحنى البياني للدالة f .

52 (C) هو المنحنى البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



أنقل هدا الشكل على ورقتك ثم في نفس المعلم مثل بيانيا الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين كما يلي :

$$f_1(x) = |x^3| - 3x^2 + 2$$

$$f_2(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$$

53 لتكن دالة f زوجية معرفة على $[-3,3]$ حيث من أجل كل عدد x من المجال $[0,3]$ لدينا :

$$f(x) = x + 1$$

1) عرف الدالة من أجل كل عنصر من المجال $[-3,0]$

2) مثل بيانيا الدالة f .

54 لتكن f دالة فردية حيث : جزء من جدول تغيراتها يكون من الشكل :

x	0		1		3		4
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	0

اتمم جدول تغيرات الدالة f .

55 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ حيث:

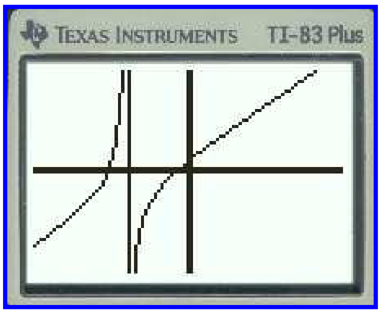
$$f(x) = \frac{x^2+3x}{2-x}$$

1) عين ثلاثة اعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{2\}$ لدينا : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2-x}$

2) أدرس وضعية (C_f) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y = -x - 5$

56 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$

إليك المنحنى البياني للدالة المحصل عليه بالحاسبة البيانية



لتكن النقطة $A(-2,-1)$

1) أكتب معادله المنحنى (C_f) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$

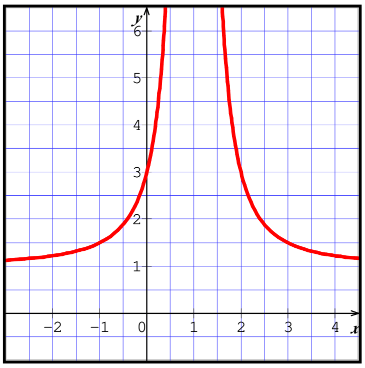
2) باستعمال الحاسبة البيانية أرسم (C_f) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$.

3) ماذا تمثل A بالنسبة للمنحنى (C_f)

تمارين

57. (C) هو المنحني البياني للدالة f حيث :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$$



أثبت أن المنحني (C) يقبل محور تناظر .

- بالنسبة للتمارين من **58** إلى **62**.

باستعمال عملية الجمع على الدوال عين اتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

58. $f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{X-2}$ ، $I=]-\infty,0[$

59. $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+2$ ، $I=]0,+\infty[$

60. $f(x)=x^2-\frac{1}{x-2}$ ، $I=]0,2[$

61. $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ ، $I=]0,+\infty[$

62. $f(x)=2x^2+\frac{1}{x+3}$ ، $I=]-\infty,-3[$

63. f و g دالتان معرفتان على $[0,+\infty[$ حيث :

$f(x)=x^2$ و $g(x)=-x^2-x$

1) عين اتجاه تغير الدالتان f و g .

2) نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي: $h=f+g$

- عرف الدالة h
- عين اتجاه تغير الدالة h.

64. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2+2+\frac{1}{x}$$

1) شكل جدول تغيرات الدالتين g و h المعرفتان كما يلي : $g(x)=x^2+2$ و $h(x)=\frac{1}{x}$

2) باستعمال عملية الجمع عين اتجاه تغير f على المجال $]-\infty,0[$.

3) هل باستعمال عملية الجمع يمكن استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]0,+\infty[$.

65. باستعمال عملية الضرب على الدوال أدرس اتجاه تغير الدالة في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=(x^2+1)\sqrt{x}$ على المجال $[0,+\infty[$

2) $f(x)=(-3x+2)x^2$ على المجال $]-\infty,0[$

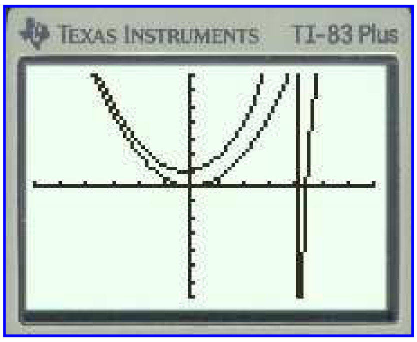
3) $f(x)=x^3(x-1)$ على المجال $[1,8]$

66. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعلاقة

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-1}{x-2}$$

ولتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $g(x)=x^2$

(C_f) و (C_g) المنحني البياني للدالتين f و g على الترتيب (إليك الشكل المحصل عليه بالحاسبة البيانية):



1) حدد المنحنيين (C_f) و(C_g)

2) استنتج حسب قيم x وضعية (C_f) بالنسبة للقطع المكافئ الذي معادلته $y=x^2$.

تمارين

67. 1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ حيث : $f(x)=x^2+2x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$
- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث :

$x\geq 0$ فإن $f(x)\geq 0$

2) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ حيث : $g(x)=-1+\sqrt{1+x}$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0,+\infty[$
- أثبت أنه إذا كان العدد x موجبا فإن $g(x)\geq 0$

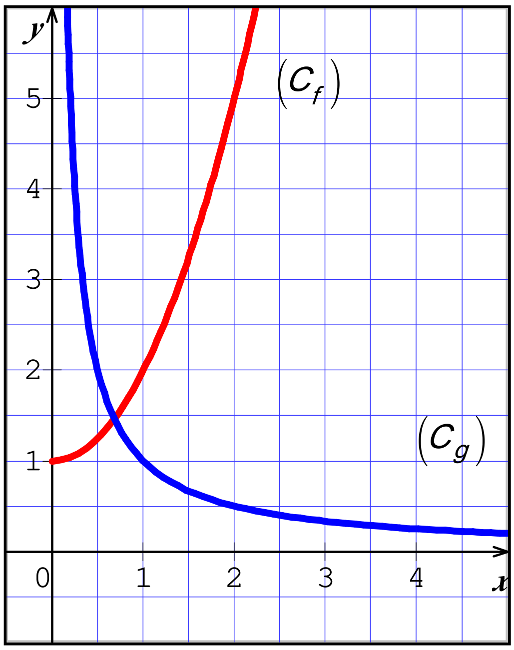
3) على أي مجال يمكن تعريف الدالة $g\circ f$ ؟

أحسب $(g\circ f)(x)$

4) على أي مجال يمكن تعريف الدالة $f\circ g$ ؟

أحسب $(f\circ g)(x)$.

68. ليكن (C_f) و (C_g) المنحنيين البيانيين للدالتين f و g و لتكن الدالة h حيث : $h=g\circ f$



لتكن M_1 نقطة من (C_f) فاصلتها x.

1) انطلاقا من M_1 انشئ النقطة M_2 من (C_g) ذات الفاصلة $f(x)$.
2) استنتج كيفية إنشاء نقطة من (C_h)

69 f و g و h دوال معرفة كما يلي :

$f(x)=3x-\frac{1}{3x}$ ، $g(x)=1-\frac{1}{3x}$

$h(x)=3x-1$

1) فكك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v يطلب تعيينهما

2) عين اتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $]-\infty,0[$ و على $]0,+\infty[$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و على $]0,+\infty[$

3) أحسب و بسط $\frac{f(x)}{g(x)}$

4) هل الدالتان h و $\frac{f}{g}$ متساويتان ؟

70 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $I=]0,+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\frac{x^2-1}{2x}$ ، $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$

1) فكك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v.

2) أدرس اتجاه تغير u و v على المجال I ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على I.

3) نضع $S=g+f$ و $D=g-f$

- عين اتجاه تغير الدالتين S و D على المجال I .
- مثل بيانياً في نفس المعلم الدالتين S و D .

4) بملاحظة أن: $g=\frac{1}{2}(S+D)$ مثل بدقة، بيانيا الدالة g .

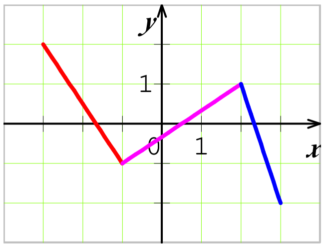
71 نعتبر دالة f معرفة على المجال $[-3;3]$.الـــشكل المقابل يمثل منحنيها البياني.مثل كل من الدوال التالية

1) $f_1(x)=-f(x)$

2) $f_2(x)=|f(x)|$

3) $f_3(x)=f(x)+1$

4) $f_4(x)=f(x+1)$.



72 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x)=4x^3-3x$ و $f(x)=2x^2-1$

بين أن : $f\circ g=g\circ f$

73 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$f(x)=|x-2|-3|x|+|x+2|$

1) بين أن الدالة f زوجية ثم اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2) ادرس تغيرات الدالة f و ارسم منحنها البياني في معلم متعامد و متجانس.

3) ارسم انطلاقا من منحنى الدالة f ، منحنى الدالة g حيث $g(x)=-f(x)$

74 لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ حيث $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$

1) ارسم التمثيل البياني للدالة f باستعمال الحاسبة البيانية.

2) خمّن وجود قيمة لعدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>-1$ يكون $f(x)<A$

3) أوجد عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ يكون: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$

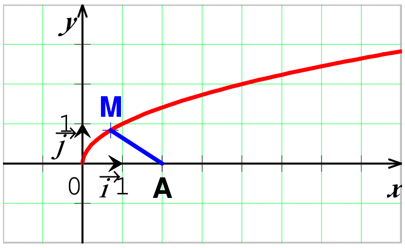
4) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

5) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$ يكون $f(x)<3$

6) استعمل الحاسبة البيانية لتخمين المجال الذي تنتمي إليه $f(x)$ لما يتغير x في المجال $]-1;+\infty[$

مســـائل

75 في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر المنحنى (C) الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ و النقطة A التي احداثيها $(2;0)$



الهدف من هذه المسألة هو تعيين النقطة من (C) الأقرب من A .

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x.

1) عبر عن AM بدلالة x.

2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

أ) ما هي العلاقة الموجودة بين AM و $f(x)$ ؟

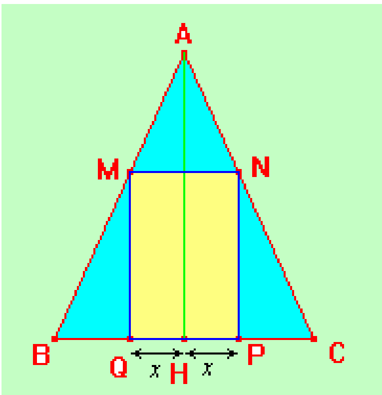
ب) عين جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

جـ) استنتج احداثيي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

76 ABC مثلث متساوي الساقين $(AB=AC)$ و $BC=12$. $[AH]$ الارتفاع المتعلق بالضلع (BC) حيث $AH=9$.

P و Q نقطتان من القطعة $[BC]$ متناظرتان بالنسبة لـ H . نضع $HP=HQ=x$.

M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AC]$ حيث $MNPQ$ مستطيل (انظر الشكل).



الهدف من التمرين تعيين طول و عرض المستطيل $MNPQ$ بحيث يكون محاطاً بالمثلث ABC و تكون مساحته أكبر ما يمكن.

1) – برهن أن $MQ=\frac{18-3x}{2}$

– نضع $A(x)$ مساحة المستطيل $MNPQ$ بدلالة x .

بين أن: $A(x)=-3\left[(x-3)^2-9\right]$

2) عين مجموعة تعريف الدالة A .

3) ادرس اتجاه تغير الدالة A على المجال $[0;6]$.

4) أثبت أن الدالة A تقبل قيمة حدية عظمى. ما هي قيمتها؟

5) احسب قياسات المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

77 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)(x-4)$

1) – تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

– ارسم في معلم $(O;I,J)$ المنحنى (P) الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ و استنتج رسم المنحنى الممثل للدالة f في نفس المعلم.

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$

– أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$: $g(x)=f(x)$

– أثبت أن g دالة زوجية.

3) ارسم منحنى g باستعمال منحنى f .

78 معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I) (P) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{2}x(4+x)$$

(H) منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ:

$$g(x)=\frac{-x-4}{x-3}$$

1) عين احداثيي نقط تقاطع (P) و (H).

2) ادرس الوضع النسبي لـ (P) و (H).

II) m عدد حقيقي غير معدوم. (P_m) المنحنى البياني للدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f_m(x)=mx^2-4mx+4m+2$$

1) أثبت أنه إذا كانت نقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (H) و (P_m) فإن x يحقق:

$$(E)\ldots\ldots mx^3-7mx^2+(16m+1)x-12m-2=0$$

2) أثبت أن $x=2$ يحقق المعادلة (E)

3) عين الأعداد الحقيقية a_m ، b_m و c_m حيث:

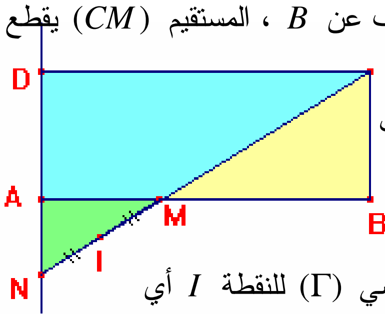
$$mx^3-7mx^2+(16m+1)x-12m-2=$$
$$=(x-2)(a_mx^2+b_mx^2+c_m)$$

4) استنتج قيم الأعداد m بحيث :

– (P_m) و (H) يتقاطعان في نقطة واحدة وواحدة فقط..

– (P_m) و (H) يتقاطعان في ثلاث نقط.

79 ليكن $ABCD$ مستطيلاً . من أجل كل نقطة M من المستقيم (AB) ، تختلف عن B ، المستقيم (CM) يقطع المستقيم (AD) في N . نسمي I منتصف القطعة $[MN]$



الهدف من هذه المسألة هو دراسة المحل الهندسي (Γ) للنقطة I أي مجموعة النقط I لما M تمسح المستقيم (AB).

نعتبر المعلم المتعامد $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ و نسمي t فاصلة النقطة M .

1) عين احداثيي النقطة I بدلالة t .

2) استنتج أن (Γ) هو المنحنى الذي معادلته $y=\frac{x}{2x-1}$

3) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{2x-1}$$

أ) عين عددين حقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{1}{2}$ لدينا: $f(x)=a+\frac{b}{2x-1}$

ب) استنتج تغيرات الدالة f على كل من المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

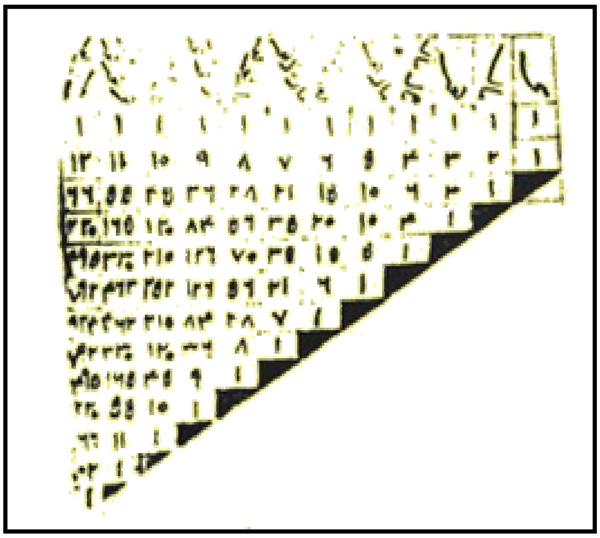
جـ) ارسم المنحنى (Γ) و برهن أنه يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

2

الدوال كثيرات الحدود
مسائل الدرجة الثانية

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها.
- حل مسائل تستخدم فيها معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية.



مثلث الكرخي لنشر $(a+b)^n$

أبو بكر الكرخي (الكرجي)

هو أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي . ولد في كرخ إحدى ضواحي بغداد، ولا يعرف تاريخ ولادته ويعد أحد كبار الرياضياتيين العرب . اهتم الكرخي اهتماماً كبيراً بعلمي الحساب والجبر إلا أنه لم يكن ميالاً لاستعمال الأرقام بل كان يثبت الأعداد مكتوبة بالأحرف على الطريقة اليونانية. اعتمد في أعماله على مؤلفات الخوارزمي خاصة في الجبر ولكنه زاد عليه في المعادلات والإكثار من البراهين سواء في الطول أو في درجات المعادلات .

أوجد الكرخي في كتابه (البديع في الجبر والمقابلة) طرقاً جديدة لإيجاد القيم التقريبية للأعداد والكميات التي لا يمكن استخراج جذورها واستعمل في ذلك طرقاً جبرية تدل على قوة الفكر وسعة العقل ومعرفة تامة بعلم الجبر ، ومن أشهر كتب الكرخي كتاب (الفخري في الجبر والمقابلة) الذي اشتمل على نظريات جديدة لم يسبقه إليها أحد ، تدل على أصالة الكرخي في التفكير ومنها (أن العدد الذي لو أضيف إليه مربع لكان الناتج مربعاً ولو طرح منه مربعه لكان الناتج مربعاً) كما استنبط الكرخي قانونا جديداً لإيجاد الجذر التربيعي . وفي كتاب (الكافي في الحساب) أوجد الكرخي حلولاً متنوعة وفريدة لمعادلات الدرجة الثانية . وتوفي الكرخي في عام 1020م.

نشاط أول

x عدد حقيقي.

1. أنشر و بسط ثم رتب العبارة: $\left(x^3+2x+1\right)\left(x^2+1\right)$
2. هل العدد 103121 أولي ؟

نشاط ثان

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2+6x+5$ و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x)=(x+1)(x+5) \quad \text{و} \quad f(x)=(x+3)^2-4$$

2. باستعمال عبارة $f(x)$ المناسبة حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

ا) $f(x)=0$ ب) $f(x)=5$ جـ) $f(x)+3=0$

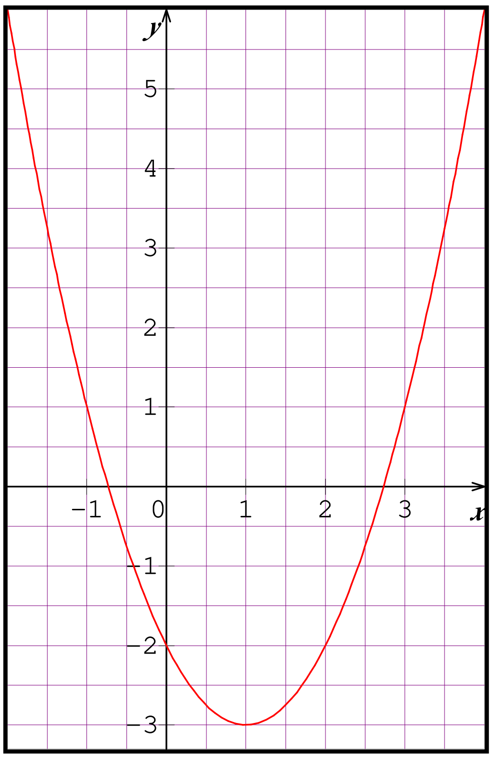
د) $f(x)=x+1$ هـ) $f(x)=-4$ و) $f(x)+20=0$

ماذا تمثل حلول كل معادلة من المعادلات السابقة ؟

نشاط ثالث

نعتبر في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى (P) ذا المعادلة: $y=(x-1)^2-3$

(أنظر الشكل المقابل)



1. عين شعاع الانسحاب الذي يسمح بالانتقال من القطع المكافئ ذي المعادلة $y=x^2$ إلى المنحنى (P)
2. حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$(x-1)^2-3=0$$

اشرح كيف يمكن إيجاد حلول المعادلة السابقة بيانيا.

3. باستعمال المنحنى (P) و النتائج السابقة عين في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة:

$$(x-1)^2-3<0$$

4. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة ذات المجهول x التالية:

$$(x-1)^2-3\geq 0$$

تحقق جبريا .

نشاط رابع

ورد في كتاب " المختصر في حساب الجبر و المقابلة " لمحمد ابن موسى الخوارزمي ما يلي:

" ... و أما الجذور و العدد التي تعدل الأموال فنحو قولك ثلاثة أجذار و أربعة من العدد يعدل مالا فبابه أن تنصف الأجذار فتكون واحدا و نصف فاضربها في مثلها فتكون اثنين و ربعا فزدها على الأربعة فتكون ستة و ربعا فخذ جذرها و هو اثنان و نصف فزده على نصف الأجذار و هو واحد و نصف فتكون أربعة و هو جذر المال و المال ستة عشر. و كل ما كان أكثر من مال أو أقل فاردده إلى مال واحد ... "

1. علما أن في النص السابق يعنى بالمال x^2 و بجذر المال x تحقق أن المعادلات المشار إليها في النص هي من الشكل: " $bx+c=ax^2$ " و أن المثال المذكور هو: " $3x+4=x^2$ "
2. أكتب باستعمال الرموز حل المعادلة $3x+4=x^2$ المقدم من قبل الخوارزمي – كلاميا –
3. أعط حسب الخوارزمي في الحالة العامة صيغة الحل الموجب للمعادلات من الشكل: $bx+c=x^2$

تطبيق: عين الحل الموجب لكل من المعادلتين: $4x+5=x^2$ و $3x+20=2x^2$

4. لتبرير الحل المقدم كلاميا للمعادلة $3x+4=x^2$ استعان الخوارزمي بالشكل الهندسي الموالي. كيف أنجز ذلك ؟

المعطيات:

$ABCD$ مربع

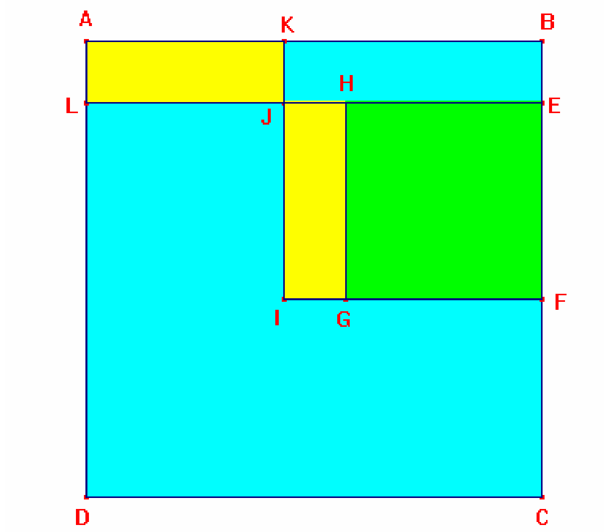
$AB=x$

$EC=3$

F منتصف القطعة $[EC]$

$EFGH$ مربع

$GI=BE$



نشاط خامس

نعتبر المعادلة ذات المجهول x : $2x^2+x-1=0$ .... $(*)$

1. بين أن حل المعادلة $(*)$ يؤول إلى حل المعادلة $2x+1=\frac{1}{x}$
2. باستعمال ورق ميليمتري ارسم في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ و القطع الزائد (H) ذا المعادلة $y=\frac{1}{x}$
3. استنتج بيانيا حلول المعادلة $(*)$. تحقق من صحة النتائج.

الدوال كثيرات الحدود

1. الدالة كثير حدود

تعريف: نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـِ:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة.

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$ هي دالة كثير حدود و بصفة خاصة الدالة المعدومة: $x \mapsto 0$.
- الدوال: $x \mapsto 0,3x^2+x-\sqrt{2}$ ، $x \mapsto (x+2)(x^2-2)$ ، $x \mapsto x^5$ هي كثيرات حدود.

2. درجة كثير حدود

مبرهنة و تعريف: كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \text{ مع } a_n \neq 0$$

يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f ، تسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته و يسمى $a_p\,x^p$ الحد الذي درجته p .

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto a_0$ $(a_0 \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0.
- كل دالة تآلفية: $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1.
- كل دالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية)

ملاحظة: درجة كثير الحدود المعدوم غير معيّنة.

3. تساوي كثيري حدود

مبرهنة:

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال: إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+bx^2+cx+d=2x^3-x+3$

فإن: $a=2$ ، $b=0$ ، $c=-1$ و $d=3$.

تمرين محلول 1

هل الدوال التالية كثيرات حدود ؟ في حالة الإجابة بنعم حدد درجتها.

ا) $f(x)=(x-1)(2x^2+3)$ ب) $g(x)=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}$ جـ) $h(x)=(\sin x)^2-3\sin x+2$

طريقة: تكون الدالة f كثير حدود إذا أجبنا بنعم على السؤالين التاليين:

1) هل f معرفة على $\mathbb{R}$ ؟ 2) هل يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ؟

حـــل:

ا) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=2x^3-2x^2+3x-3$

إذن الدالة f دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة.

ب) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2+1\neq 0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1}=x^2+1$

إذن الدالة g دالة كثير حدود من الدرجة الثانية.

جـ) الدالة h ليست دالة كثير حدود لأنه لا يمكن كتابة $h(x)$ **على الشكل:** $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

تمرين محلول 2

f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x)=x^3+x^2-4x-4$

1. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :
$$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=0$

حـــل:

.1 $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c=x^3+x^2-4x-4$

و هذا يعني $\begin{cases}a=1\\a+b=1\\b+c=-4\\c=-4\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-4\end{cases}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x+1)(x^2-4)$

.2 $f(x)=0$ يعني $(x+1)(x^2-4)=0$ أي $x+1=0$ أو $x^2-4=0$ أي: $x=-1$ أو $x^2=4$ ومنه

الحلول هي -1 ، -2 ، و 2 إذن مجموعة الحلول هي: $S=\{-2,-1,2\}$

عمليات على كثيرات الحدود

1. عمليات على كثيرات الحدود

تسمح قواعد الحساب الجبري من التوصل إلى النتائج التالية:

نتائج:

1. مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.
2. مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
3. جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.

ملاحظة: بصفة عامة حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود و تسمى الدالة: $h: x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة ناطقة.

2. جذر كثير حدود

تعريف: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha)=0$.

مثال:

ليكن f كثير الحدود المعرف بـِ: $f(x)=x^3-x^2-x-2$

لدينا: $f(2)=0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود f بينما العدد 0 ليس جذرا له لأن $f(0)\neq 0$ $(f(0)=-2)$

3. تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x-\alpha)$

مبرهنة: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

إذا كان $f(\alpha)=0$ (α جذر لكثير الحدود f) فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x)=(x-\alpha)\,g(x)$$

مثال:

ليكن f كثير الحدود المعرف بـِ: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

لدينا $f(1)=0$ و $f(2)=0$ و $f(3)=0$

و منه الأعداد 1، 2 و 3 هي جذور لكثير الحدود f.

يمكن إذن تحليل f و لدينا:

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

تمرين محلول 3

نعتبر الدالتين كثيري الحدود f و g المعرفتين بـِ: $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x^2+x-1$

1. عين كثيرات الحدود التالية: $f+g$ ، $2f-3g$ و $g\circ f$.

2. عين كثير الحدود $f\times g$ محددا درجته.

حــــل:

1. بتطبيق قواعد الحساب الجبري نحصل على:
   - $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-3x^2+3x$
   - $(2f-3g)(x)=2f(x)-3g(x)=9x^2+x+5$
   - $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=-12x^2-10x-3$
2. $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=-6x^3-x^2-x-1$ و لدينا درجة $f\times g$ هي 3.

تمرين محلول 4

f دالة كثير حدود معرفة بـِ: $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f

عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x-2)g(x)$

حــــل:

لدينا: $f(2)=0$ و منه العدد 2 جذر لكثير الحدود f. إذن حسب المبرهنة يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x-2)g(x)$

طريقة: لتعيين $g(x)$ يمكن فرض $g(x)=ax^2+bx+c$ ثم تعيين المعاملات a، b و c باستعمال تساوي كثيري حدود و ذلك بعد نشر و تبسيط و ترتيب العبارة $(x-2)g(x)$ كما يمكن استعمال خوارزمية القسمة.

الطريقة العملية لتعيين: $g(x)$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \cline{3-3}
- & \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-2 \\
 & x^2-4x+4 & \\
- & \underline{x^2-2x} & \\
 & -2x+4 & \\
- & \underline{-2x+4} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

نجد هكذا: $g(x)=x^2+x-2$

و منه: $f(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

المعادلات من الدرجة الثانية

1. المعادلة من الدرجة الثانية

تعريف: نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2+bx+c=0$
حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

2. الشكل النموذجي لثلاثي الحدود: ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$

و بما أن $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$ فإن $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$

ومنه $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

بوضع $\Delta=b^2-4ac$ نجد $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

تعاريف: **ليكن** ax^2+bx+c ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $(a\neq 0)$

- **يسمى العدد** b^2-4ac **مميز ثلاثي الحدود** ax^2+bx+c و نرمز إليه بالرمز Δ
- **يسمى** $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ **الشكل النموذجي لثلاثي الحدود** ax^2+bx+c

3. حل المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

باستعمال الشكل النموذجي نبرهن على المبرهنة التالية:

	إذا كان:	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هي:	يتم تحليل ax^2+bx+c على الشكل:
مبرهنة	$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
	$\Delta=0$	$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
	$\Delta<0$	**لا توجد حلول**	**لا يمكن تحليل** ax^2+bx+c

ملاحظة: إذا كان $\Delta=0$ نقول أن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا.

تمرين محلول 5

نعتبر ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f المعرف بـِ: $f(x)=x^2+3x-4$

1. عين الشكل النموذجي لـِ $f(x)$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)\geq -\frac{25}{4}$. استنتج أن f تقبل على $\mathbb{R}$ قيمة حدية يطلب تحديدها.

حـــل:

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

و منه $f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ و هو الشكل النموذجي لـِ $f(x)$.

2. لمقارنة $f(x)$ بالعدد $-\frac{25}{4}$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right]$

لدينا من السؤال الأول: $f(x)-(-\frac{25}{4})=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ وبما أن $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$ نستنتج أن $f(x)-(-\frac{25}{4})\geq 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)\geq -\frac{25}{4}$.

بما أن $f(x)\geq -\frac{25}{4}$ و $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{4}$ فإن $f(x)\geq f\left(-\frac{3}{2}\right)$ نستنتج أن الدالة f تقبل على $\mathbb{R}$ قيمة حدية صغرى هي $-\frac{25}{4}$ و تبلغها من أجل القيمة $-\frac{3}{2}$ للمتغير.

تمرين محلول 6

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

ا) $x^2+2x=0$ ب) $x^2+x+1=0$ جـ) $x^2-4x+4=0$ د) $x^2+x-6=0$

طريقة: عند حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ نستعمل بصفة عامة المميز إلا أنه يمكن في بعض الحالات ملاحظة ما إذا كان ثلاثي الحدود ax^2+bx+c يقبل تحليلا ظاهرا.

حـــل:

ا) $x^2+2x=0$ تعني $x(x+2)=0$ أي $x=0$ أو $x=-2$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{-2,0\}$

ب) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=1$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$ إذن ليس للمعادلة حلول ومنه $S=\varnothing$

جـ) $x^2-4x+4=0$ تكافئ $(x-2)^2=0$ إذن للمعادلة حل مضاعف $x=2$ ومنه $S=\{2\}$

د) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=-6$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(-6)=25$ إذن للمعادلة حلان متمايزان:

$x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2}=2$ و $x_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3$ ومنه $S=\{-3,2\}$

المتراجحات من الدرجة الثانية

1. المتراجحة من الدرجة الثانية

تعريف: نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين: $ax^2+bx+c\geq 0$، $ax^2+bx+c>0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

2. إشارة ثلاثي الحدود: ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

الحالة1: $\Delta>0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

بفرض $x_1<x_2$ نحصل على الجدول المقابل

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		إشارة a	0	إشارة $(-a)$	0	إشارة a	

الحالة2: $\Delta=0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ حيث: $x_1=\dfrac{-b}{2a}$ ومنه $ax^2+bx+c=0$ من أجل $x=x_1$ و إشارته هي إشارة a من أجل كل $x\neq x_1$.

الحالة3: $\Delta<0$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$ و بما أن $\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right]>0$

فإن من أجل كل عدد حقيقي x، إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a.

مبرهنة

$\Delta<0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا

من أجل كل عدد حقيقي x، إشارة ax^2+bx+c هي من نفس إشارة a

$\Delta=0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا x_1

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		إشارة a	0	إشارة a	

$\Delta>0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		إشارة a	0	إشارة $(-a)$	0	إشارة a	

$(x_1 \quad x_2)$

تمرين محلول 7

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

ا) $2x^2+4x-6\leq 0$ ب) $-x^2+10x-25\geq 0$ جـ) $x^2-x+4<0$

طريقة: يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c\geq 0$ ، $ax^2+bx+c>0$ ، $ax^2+bx+c\leq 0$ أو $ax^2+bx+c<0$ إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c

حـــل:

أ) لدينا $\Delta=64$ ومنه حلول المعادلة $2x^2+4x-6=0$ هما: -3 و 1

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2x^2+4x-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-3;1]$

ب) لدينا $\Delta=0$ ومنه للمعادلة $-x^2+10x-25=0$ حلا مضاعفا هو 5.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$-x^2+10x-25$		$-$	0	$-$	

مجموعة الحلول هي إذن: $S=\{5\}$

جـ) لدينا $\Delta=-15$ ومنه ليس للمعادلة $x^2-x+4=0$ حلولا لأن $\Delta<0$

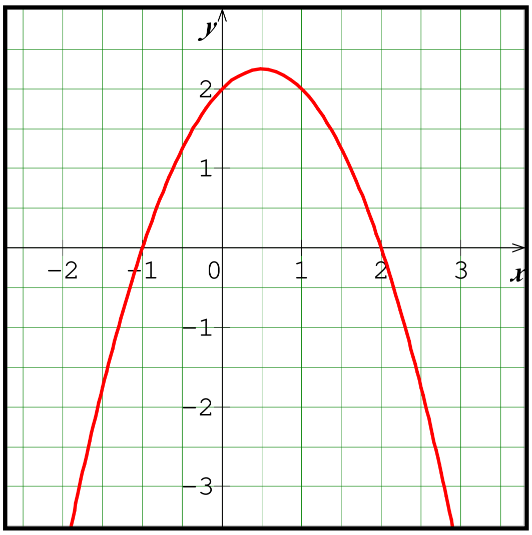
x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-x+4		$+$	

مجموعة الحلول هي إذن: $S=\varnothing$

تمرين محلول 8

1. باستعمال أحد راسمات المنحنيات مثل بيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+x+2$
2. استنتج بيانيا حلول المتراجحة $-x^2+x+2\leq 0$

حـــل:



1. انظر الشكل المقابل.
2. نلاحظ أن المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما -1 و 2 على الترتيب كما نلاحظ أنه يقع فوق هذا المحور من أجل $x\in[-1;2]$ و يقع تحته من أجل $x\in]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$. لدينا إذن:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن مجموعة الحلول هي: $S=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

أعمال موجهة

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots \quad (1) \qquad \text{مع } (a\neq 0)$$

نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين (جذرين) x' و x'' حيث:

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

إذا وضعنا $S=x'+x''$ و $P=x'\times x''$ حيث S هو مجموع الحلين و P جداؤهما بين أن:

$$S=-\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad P=\frac{c}{a}$$

تطبيق1: حساب أحد الحلّين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر و ذلك باستعمال المجموع S أو الجداء P

تمرين تطبيقي: نعتبر المعادلة التالية: $2x^2+\alpha x-3=0$ حيث α عدد حقيقي .

عين α حتىيكون (-3) حلا لهذه المعادلة ثم استنتج الحل الآخر.

تطبيق2: تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما

مبرهنة: يكون مجموع عددين هو S و جداؤهما هو P إذا و فقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x :

$$x^2-S\,x+P=0$$

أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

تمرين تطبيقي: عين بعدي مستطيل مساحته $77\,cm^2$ و محيطه $36\,cm$.

هل يوجد مستطيلا مساحته $30\,cm^2$ و محيطه $20\,cm$ ؟

تطبيق3: تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

مبرهنة: نعتبر المعادلة: $ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$ مع $(a\neq 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
2. إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
3. إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

تمرين تطبيقي: ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$$

أعمال موجهة

المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع

1. المعادلات مضاعفة التربيع

تعريف: نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c=0$
حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

بين أن حل المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$ يؤول إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$$

يسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

1) $x^4+x^2-6=0$ 2) $x^4-5x^2+4=0$ 3) $2x^4+5x^2+2=0$

2. المتراجحات مضاعفة التربيع

تعريف: نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:
$ax^4+bx^2+c\geq 0$، $ax^4+bx^2+c>0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

يؤول حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c

دراسة مثال:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x : $x^4-7x^2+12<0$ .... $(*)$

1. نضع: $f(x)=x^4-7x^2+12$
تحقق أن 3 و 4 هما حلا المعادلة ذات المجهول X: $X^2-7X+12=0$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=\left(x^2-3\right)\left(x^2-4\right)$
3. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$ (يمكنك استعمال جدول)
4. استنتج حلول المتراجحة $(*)$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x التالية:

$$-x^4+4x^2+5\leq 0$$

مسائل محلولة

نهدف إلى حساب المجموعين التاليين: $S_1 = 1+2+\ldots+n$ و $S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ حيث n عدد طبيعي.

1. حساب S_1

- عين كثير حدود f من الدرجة الثانية يحقق من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x+1)-f(x)=x$
- بين أن: $S_1 = f(n+1)-f(1)$ ثم استنتج حساب S_1 بدلالة n.
- أحسب مجموع الألف عدد طبيعي غير المعدومة الأولى.

2. حساب S_2

- عين كثير حدود g من الدرجة الثالثة يحقق من أجل كل عدد حقيقي x: $g(x+1)-g(x)=x^2$
- أحسب S_2 بدلالة n ثم استنتج مجموع مربعات الألف عدد طبيعي غير المعدومة الأولى.

1. حساب S_1

- نفرض $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية مع $a\neq 0$

لدينا: $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c = ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

ومنه $f(x+1)-f(x)=(ax^2+(2a+b)x+a+b+c)-(ax^2+bx+c)=2ax+a+b$

يكون $f(x+1)-f(x)=x$ من أجل كل عدد حقيقي x إذا و فقط إذا كان:

$\begin{cases} 2a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ نجد هكذا: $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+c$ ويمكن مثلا أخذ $c=0$.

و منه $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x$

- نلاحظ أن $1=f(2)-f(1)$، $2=f(3)-f(2)$، ... ، $n=f(n+1)-f(n)$

و منه $1+2+\ldots+n=[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\ldots+[f(n+1)-f(n)]$

نجد هكذا بعد عملية الاختزال: $S_1=f(n+1)-f(1)$

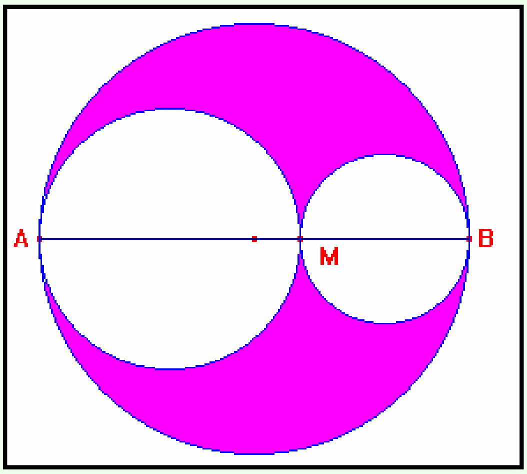
بما أن $f(1)=0$ و $f(n+1)=\dfrac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ فإن: $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+\ldots+1000=\frac{1000\times 1001}{2}=500500$$

2. حساب S_2 (نتبع نفس الطريقة)

- $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x+c$
- $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^2+2^2+\ldots+(1000)^2=\dfrac{1000\times 1001\times 2001}{6}$

مسائل محلولة



نعتبر دائرة قطرها $[AB]$ حيث $AB=4$. M نقطة من $[AB]$

ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$.

نرمز بـِ S إلى مساحة الحيز الملون و بـِ a إلى مساحة القرص الذي قطره $[AB]$. نضع $AM=x$

1. أحسب S بدلالة x .

2. هل توجد وضعية للنقطة M يكون من أجلها: $S=\frac{1}{2}a$ ؟

3. عين قيم x التي يكون من أجلها: $S>\frac{1}{4}a$.

---

1. حساب S بدلالة x

إذا رمزنا إلى مساحة القرص الذي قطره $[AM]$ بـ a_1 و إلى مساحة القرص الذي قطره $[MB]$ بـ a_2 فإن:

$$S=a-a_1-a_2$$

لدينا: $a=\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2=4\pi$ ، $a_1=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi x^2$ و $a_2=\pi\left(\frac{4-x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi(4-x)^2$ ومنه:

$$S=4\pi-\frac{1}{4}\pi x^2-\frac{1}{4}\pi(4-x)^2$$

بعد النشر و التبسيط نجد: $S=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$

2. تعيين وضعية M حيث: $S=\frac{1}{2}a$

$S=\frac{1}{2}a$ يكافئ $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)=\frac{1}{2}(4\pi)=2\pi$ أي: $-x^2+4x-4=0$ أي: $x^2-4x+4=0$

لدينا: $x^2-4x+4=0$ يكافئ $(x-2)^2=0$ و منه: $x=2$

وضعية النقطة M **التي** يكون من أجلها: $S=\frac{1}{2}a$ هي منتصف القطعة $[AB]$.

3. تعيين قيم x التي يكون من أجلها: $S>\frac{1}{4}a$

$S>\frac{1}{4}a$ يكافئ $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right) > \frac{1}{4}(4\pi)$ أي: $-x^2+4x-2 \quad 0$

لندرس إشارة $-x^2+4x-2$

لدينا $\Delta=8$ و منه $-x^2+4x-2$ يقبل جذرين هما: $x'=2-\sqrt{2}$ و $x''=2+\sqrt{2}$

x	0	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	4
$-x^2+4x-2$	$-$	0 $+$	0 $-$	

مجموعة قيم x التي يكون من أجلها: $S>\frac{1}{4}a$ هي: $\left]2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right[$.

خوارزمية هورنر (Horner)

نعتبر دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة f حيث: $f(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ و a عدد حقيقي ثابت.

α_3	$\alpha_2 + ah_3$	$\alpha_1 + ah_2$	$\alpha_0 + ah_1$
h_3	h_2	h_1	h_0

1. معاملات هورنر المرفقة بالعدد a

نضع: $h_3=\alpha_3$ ، $h_2=\alpha_2+ah_3$ ،

$h_1=\alpha_1+ah_2$ و $h_0=\alpha_0+ah_1$

تسمى الأعداد h_0 ، h_1 ، h_2 و h_3 معاملات هورنر المرفقة بالعدد a.

2. حساب $f(a)$

تحقق أن: $f(x)=\left[(\alpha_3x+\alpha_2)x+\alpha_1\right]x+\alpha_0$ ثم استنتج أن: $f(a)=h_0$

3. التحليل باستعمال العامل $(x-a)$

انطلاقا من تحليل $f(x)-f(a)$ بين أن: $f(x)=(x-a)\left(h_3x^2+h_2x+h_1\right)+h_0$

4. استعمال مجدول لتعيين معاملات هورنر

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة بـِ: $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$

❖ **تنظيم الحساب**

نقوم بحجز معاملات $f(x)$ في خط أفقي انطلاقا مثلا من الخلية $B1$ إلى غاية الخلية $E1$ ثم نحجز قيمة a في الخلية $A2$ و نحجز 0 في الخلية $A3$.

نحجز في الخلية $B2$ الدستور: $=\$A\$2*A3$ و في الخلية $B3$ الدستور: $=B1+B2$

للحصول على معاملات هورنر نحدد الخليتين $B2$ و $B3$ ثم ننقلها بالزالق إلى غاية العمود E.

نقرا هكذا المعاملات المرفقة بالعدد $a=-2$: $h_3=2$ ، $h_2=-3$ ، $h_1=1$ و $h_0=0$

	A	B	C	D	E	F	G
1		2	1	-5	2	معاملات f(x)	
2	-2	0	-4	6	-2	قيمة a	
3	0	2	-3	1	0	معملات هورنر	
4							
5		h3	h2	h1	h0		

القيمة0   =$A$2*A3   =B1+B2

❖ **حساب صور: -2، 1.2، 7 و -25** (يكفي تغيير قيمة a في الخلية $A2$)

لدينا: $f(-2)=0$ ، $f(1.2)=0.896$ ، $f(7)=702$ و $f(-25)=-30498$

❖ **تحليل $f(x)$ باستعمال المعامل** $(x+2)$

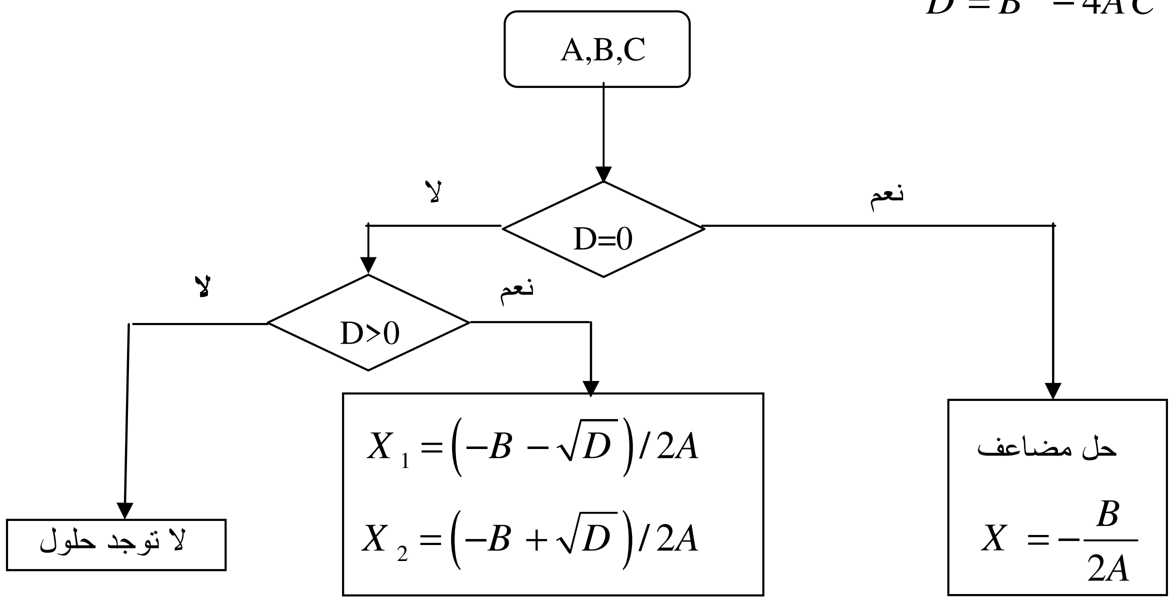
بما أن $f(-2)=0$ لدينا: $f(x)=(x+2)\left(2x^2-3x+1\right)$

برنامج حل معادلة من الدرجة الثانية

3. مخطط البرنامج

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية: $Ax^2+Bx+C=0$ مع $A\neq 0$

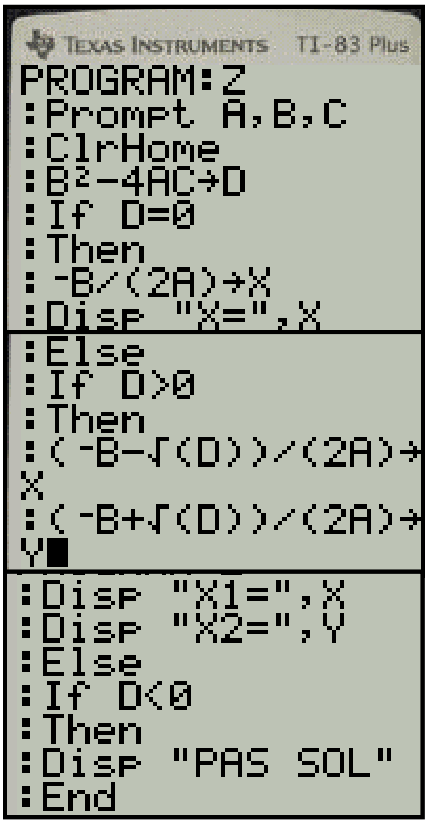
نضع: $D=B^2-4AC$



4. برنامج للآلة Ti83plus

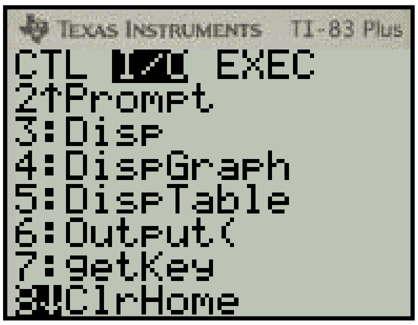
في البداية نختار اللمسة PRGM ثم نختار New ثم نعطي اسما للبرنامج.

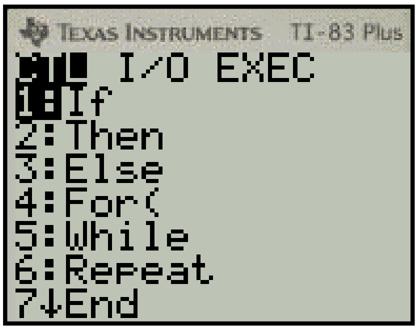
نسميه مثلا: $Equ\,2$ ثم ندخل البرنامج المقابل.



<u>إرشادات</u>

- للحصول على Prompt ، Disp و ClrHome نضغط على PRGM و نختار I/O
- للحصول على → نضغط على اللمسة STO →
- للحصول على > أو = نضغط على 2nd ثم اللمسة MATH .
- للحصول على If ، Then، Else و End نضغط على PRGM و نختار CTL





<u>تطبيق</u>: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $x^2+x+1=0$ ، $4x^2+4x+1=0$ ، $3x^2+2x-3=0$.

تمارين

أصحيح أم خطأ ؟

1 العبارة $f(x)=3x-1-2x^{3}$ هي كثير حدود من الدرجة الثالثة .

2 العبارة $f(x)=\left(\sqrt{x-3}\right)^{2}$ هي كثير حدود من الدرجة الأولى .

3 العبارة $f(x)=\dfrac{-2}{x^{4}}$ هي كثير حدود .

4 إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود من الدرجة الثانية فإن $f(x)+g(x)$ يكون من الدرجة الرابعة .

5 إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود من الدرجة الثالثة فإن $f(x)\times g(x)$ يكون من الدرجة السادسة .

6 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه الدالة f هي كثير حدود ؛ يطلب تعيين درجته.

1) $f:x\mapsto -\dfrac{1}{2}$ 2) $f:x\mapsto 2x^{2}+1-\sqrt{x}$

3) $f:x\mapsto 2x^{2}+\dfrac{1}{x}-3$ 4) $f:x\mapsto \dfrac{x^{2}-9}{x-3}$

5) $f:x\mapsto x\cos^{2}x-3x^{4}+x\sin^{2}x-3$

7 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه x_0 هو جذر لكثير الحدود $P(x)$.

1) $P(x)=x^{2}-5x-6$ و $x_0=-1$

2) $P(x)=-2x^{3}+5x^{2}+8x-3$ و $x_0=3$

3) $P(x)=x^{4}-x^{2}+2x+6$ و $x_0=\sqrt{3}$

8 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه كثير الحدود $P(x)$ يقبل جذرين متمايزين .

1) $P(x)=x^{2}+571x-6$

2) $P(x)=-7x^{2}+x-6$

3) $P(x)=2x^{2}-7x+5$

4) $P(x)=x^{3}-3x^{2}-5x+7$

5) $P(x)=\dfrac{3}{2}x^{2}+x\sqrt{6}+1$

9 a و b عددان حقيقيان .
إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x
$x^{3}-6x=x^{3}+(b-a)x^{2}-(b+5)x$ فإن $a=b$.

أسئلة متعددة الاختيارات

عين الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة.

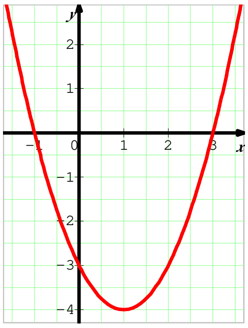
10 ليكن كثير الحدود $P(x)=x^{3}-3x^{2}-x+3$.

1) العدد 2 هو جذر لـ : $P(x)$.

2) العدد 3 هو جذر لـ : $P(x)$.

3) $P(x)$ لا يقبل جذور .

11 f هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية ، تمثيلها البياني موضح في الشكل المقابل.



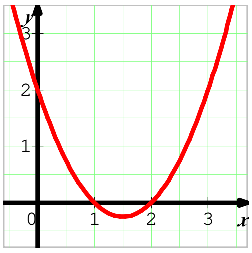
1) مميز $f(x)$ سالب .

2) $f(x)$ يقبل جذرين متمايزين.

3) من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)\geq 0$.

4) إشارة $f(x)$ هي إشارة معامل حدّه الذي له أعلى درجة

12 التمثيل البياني المقابل لدالة f معرفة بـ :



1) $f(x)=2x^{2}-3x+1$

2) $f(x)=x^{2}-3x+3$

3) $f(x)=x^{2}-3x+2$

4) $f(x)=-x^{2}+3x-2$

13 يعطى $f(x)=3x^{2}+4x-7$

$f(x)$ يحلل على الشكل :

1) $f(x)=3(x-1)(x+\dfrac{7}{3})$

2) $f(x)=(x-1)(x-7)$

3) $f(x)=(x-1)(7x-3)$

14 المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$
القطع المكافئ ذو المعادلة $y=-x^{2}+x-3$ هو صورة القطع المكافئ ذي المعادلة $y=x^{2}$ بـ :

1) التناظر العمودي بالنسبة إلى محور الفواصل .

2) الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{11}{4}\vec{j}$ ثم التناظر العمودي بالنسبة إلى محور الفواصل .

3) مركب الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-\dfrac{11}{4}\vec{j}$ و التناظر العمودي بالنسبة إلى محور الفواصل .

تمارين

الدوال كثيرات الحدود

15 f دالة معرفة على المجموعة D_f .
اشرح لماذا $f(x)$ ليس كثير حدود في كل الحالات المقترحة .

1) $f(x)=-2x^3+3x-5$ و $D_f=\mathbb{R}^*$

2) $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x+1}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

3) $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-3}{x^2+3}$ و $D_f=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\left(\sqrt{|x|}-5\right)^2$ و $D_f=\mathbb{R}$

16 من بين الدوال التالية عين الدوال كثيرات الحدود.

1) $f:x\mapsto(x^2+3)(x-2)$

2) $f:x\mapsto\left(\sqrt{x}+1\right)^2-2$

3) $f:x\mapsto\dfrac{5x^3+10x}{x^2+2}$

4) $f:x\mapsto 2\cos^2 x+\sin^2 x+1$

17 في كل حالة من الحالات التالية ، عين دالة f كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث :

1) f تأخذ قيمها موجبة تماما .

2) f تأخذ قيمها في المجموعة $\mathbb{R}_-$.

3) f تنعدم من أجل قيمتين مختلفتين .

18 نعتبر f الدالة كثير حدود حيث :

$$f(x)=-3x^2+2x+1$$

1)تحقق من أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكلين التاليين:

$$(x-1)(-3x-1) \text{ ؛ } -3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

2)بين أن العدد 0 له سابقتين بالدالة f يطلب تعيينهما.

3)بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى على $\mathbb{R}$.

4)أعط اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

19 عين دالة f كثير حدود من الدرجة الثانية تحقق الشرطين التاليين :

- f تنعدم من أجل القيمتين 4 ، -2
- -24 هي صورة العدد 0 بالدالة f

العمليات على كثيرات الحدود

20 أكتب كثير الحدود $P(x)$ على الشكل المبسط والمرتب ثم عين درجته في كل من الحالات الآتية :

1° $P(x)=(x+3)(x+2)^2$

2° $P(x)=(x-5)(x^2+2x-1)$

3° $P(x)=(x+5)(x-3)^2$

4° $P(x)=(3x+2)^2-9(x^2+2)$

21 ليكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرا حدود.
عين في كل حالة من الحالتين التاليتين كثيرا حدود :
$P(x)+Q(x)$ ؛ $P(x)-Q(x)$ ؛ $2\,P(x)+3\,Q(x)$

1) $P(x)=-3x^2+x-5$ و $Q(x)=2x^2+4x-1$

2) $P(x)=2x^3+x-5$ و $Q(x)=-2x^2+4$

22 عين درجة ومعامل الحد الأعلى درجة لكل من كثيرات الحدود التالية :

1) $P(x)=(2x^2+x)(5-3x^3)$

2) $Q(x)=(-3x+1)^3(x-3)^4$

3) $R(x)=(x^2+x)(x^3-2)-x^2(2-2x^2+x^3)$

23 في كل حالة من الحالات المقترحة التالية بين أن العدد α هو جذر لكثير الحدود $f(x)$.

1) $f(x)=x^3-x^2+x+3$ و $\alpha=-1$

2) $f(x)=2x^3-x^2+2x-16$ و $\alpha=2$

3) $f(x)=x^3+x^2-3x-3$ و $\alpha=\sqrt{3}$

24 نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث :

$$P(x)=x^3-x^2-4x+4$$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث يكون ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

2) حلل $P(x)$ إلى جداء كثيرات الحدود من الدرجة الأولى

3) عين كل جذور $P(x)$.

25 $P(x)$ كثير الحدود حيث :

$$P(x)=4x^3-4x^2-15x+18$$

1) أثبت أن -2 هو جذر لِـ $P(x)$.

2) حلل $P(x)$ إلى جداء كثيرات الحدود من الدرجة الأولى

3) عين كل جذور $P(x)$

26 a ، b عددان حقيقيان و $f(x)$ كثير حدود حيث :

$$f(x) = -2x^3 + ax + b$$

عين a و b بحيث يكون -2 جذرا لـــ $f(x)$ و $f(0) = 5$.

27 a ، b ، c أعداد حقيقية و $f(x)$ كثير حدود حيث :

$$f(x) = ax^3 - 3(x-b)x + cx^2 + (x^2 - 3)x$$

عين الأعداد a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)$ معدوما.

المعادلات من الدرجة الثانية

28 أكتب كثير الحدود $f(x)$ على الشكل النموذجي ، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ، في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

2) $f(x) = x^2 + x - 6$

3) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

4) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

5) $f(x) = x^2 - 2x + \dfrac{4}{5}$

6) $f(x) = -5x^2 + 15x$

29 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أكتب معادلة من الدرجة الثانية معاملاتها أعداد صحيحة وتقبل الحلين x' و x'' .

$x' = 2$ و $x'' = 3$ ؛ $x' = -1$ و $x'' = 5$

$x' = \dfrac{1}{2}$ و $x'' = -3$ ؛ $x' = \dfrac{1}{2}$ و $x'' = -\dfrac{1}{3}$

$x' = 0$ و $x'' = 3$ ؛ $x' = \dfrac{-3}{2}$ و $x'' = 0$

$x' = x'' = -2$ ؛ $x' = x'' = \dfrac{2}{3}$

30 بدون حساب المميز ، حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x التالية :

1) $x^2 - 3x = 0$ 2) $x^2 - 4 = 0$

3) $3x^2 - 3 = 0$ 4) $4x^2 - 7 = 0$

5) $x^2 + 9 = 0$ 6) $x^2 + 2x + 1 = 0$

7) $-x^2 + 6x - 9 = 0$ 8) $(x-3)^2 = 4$

$2x^2 - 2\sqrt{2}\, x + 1 = 0$ ، $(4x-3)^2 - (3x-2)^2 = 0$

31 ماهو مميز المعادلة $(67971\, x - 31527)^2 = 0$ ؟

32 برّر أن المعادلة ذات المجهول x :

$$1962\, x^2 + 110364\, x - 2007 = 0$$

تقبل حلين متمايزين .

33 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج تحليلا لـــ $f(x)$:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

3) $f(x) = -9x^2 - 3x + 2$

4) $f(x) = -5x^2 + 8x - 3$

5) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{3}\, x - 3$

34 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x التالية:

1) $x^2 + 3x - 10 = 0$

2) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$

3) $2x^2 + 7x + 8 = 0$

4) $x^2 + 5x + 5 = 0$

5) $-x^2 + 18x + 19 = 0$

35 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول x التالية :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و a غير معدوم.

نضع $b' = \dfrac{b}{2}$

1) أحسب Δ ، مميز المعادلة (E) ، بدلالة a ، b' ، c .

2) نضع $\Delta' = \dfrac{\Delta}{4}$ ، أحسب Δ' بدلالة a ، b' ، c .

3) أثبت أنه إذا كان $\Delta' \geq 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين هما $\dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ ؛ $\dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$

(Δ' يسمى المميز المختصر للمعادلة (E))

36 باستعمال المميز المختصر حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية :

1) $-x^2 + 18x + 19 = 0$

2) $x^2 + 200x + 9999 = 0$

3) $-2x^2 + 2\sqrt{6}\, x - 3 = 0$

37 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

1) $t^2-5t+6=0$

2) $-u^2-16u+17=0$

3) $x^2-(3+\sqrt{2})\,x+3\sqrt{2}=0$

4) $1+r+r^2=0$

38 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m :

$$(m^2-4)x^2-2mx+m^2-2m+1=0$$

1) عين قيم العدد الحقيقي m حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية

2) عين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E) ثم استنتج الحل الآخر لها.

39 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x في كل من الحالات التالية:

1) $x^2-2mx-5=0$

2) $mx^2+(2m-3)x+m-3=0$

3) $(m+1)x^2+(2m+1)x-m+2=0$

4) $(m-3)x^2+(2m-1)x+m+2=0$

5) $(2m-1)x^2+4mx+2m+1=0$

40 باستعمال حاسبة بيانية، حل بيانيا كلا من المعادلات التالية :

- $2x^2-5x+3=0$
- $-x^2+3x-1=0$
- $3x^2-6x+1=0$
- $-2x^2+3x+5=0$
- $-3x^2+3x-1=0$
- $5x^2+2\sqrt{10}\,x+2=0$

41 باستعمال حاسبة بيانية عين قيم العدد الحقيقي m بحيث يكون لكل من المعادلات التالية حلول في $\mathbb{R}$:

- $-x^2+3x-m=0$
- $-2x^2+3x+2-m=0$
- $2x^2-5x+m-1=0$
- $3x^2+2\sqrt{6}\,x+m=0$

42 1) أنشر العبارة $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$$

43 لتكن الدالة $f:x\mapsto x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$

الهدف هو حل بطريقتين مختلفتين المعادلة $f(x)=0$

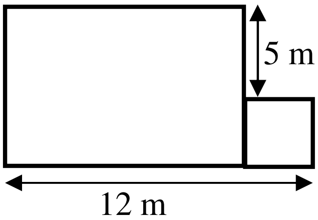
1) أنشر العبارة $(x-x_1)(x-x_2)$ ؛ استنتج تحليلا لـ $f(x)$ ثم حل المعادلة $f(x)=0$.

2) استعمل المميز لحل المعادلة $f(x)=0$

3) هل ينتج من كلتا الطريقتين نفس الحل ؟

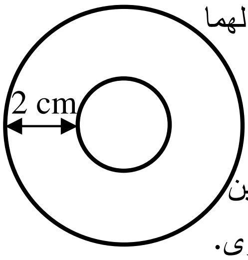
44 في الشكل أدناه مساحة المستطيل هي 8 مرات مساحة المربع ،

أحسب طول ضلع المربع.

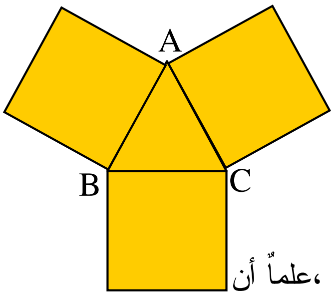


45 في الشكل المقابل ، الدائرتان لهما نفس المركز.

أحسب نصف القطر لكل منهما بحيث تكون مساحة إحدى الدائرتين تساوي ثلاث مرات مساحة الأخرى.



46 ABC مثلث متقايس الأضلاع ارتفاعه $\sqrt{3}\,m$ ، محاط بثلاث مربعات.

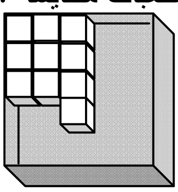


1 - أنشر العبارة $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

2 - أحسب طول ضلع المثلث، علماً أن مساحة الشكل الملون هي $\left(12+\sqrt{3}\right)m^2$.

47 نريد ملئ علبة قاعدتها مربعة الشكل بمكعبات متقايسة .

ما هو عدد المكعبات الممكنة التي تشملها هذه العلبة حيث إذا حذفنا المكعبات الموجودة في المحيط ، يبقى في العلبة 4 مكعبات ؟



مجموع وجداء حلى معادلة من الدرجة الثانية

48 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، تحقق أن المعادلة تقبل حلين ثم بدون حساب الحلين عين مجموعهما وجداؤهما .

- $-2x^2+3x+4=0$
- $2x^2+3x-7=0$
- $x^2+7x+1=0$
- $-x^2+4x-3=0$
- $x^2+(m+1)x-1=0$
- $x^2+2mx-1-m^2=0$

49 لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :
$ax^2+bx+c=0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و a غير معدوم .

1) نفرض أن x' و x'' هما حلا المعادلة (E) ،
و (E') هي المعادلة $x^2-(x'+x'')x+x'x''=0$
أثبت أن المعادلتين (E) و (E') متكافئتان .
(لهما نفس الحلول)

50 أكتب معادلة من الدرجة الثانية تقبل الحلين x' و x'' في كل حالة من الحالات التالية :

$x'=4$ و $x''=-7$ ، $x'=0$ و $x''=3$
$x'=3$ و $x''=\frac{1}{3}$ ، $x'=1$ و $x''=-\frac{2}{3}$
$x'=1-m$ و $x''=1+m$
$x'=5+\sqrt{2}$ و $x''=5-\sqrt{2}$

51 أكتب معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين x' و x'' يحققان الشرطين التاليين : $x'+x''=7$ ؛ $x'x''=4$
ثم عين x' و x'' .

52 عين العددين الحقيقيين a و b في كل حالة من الحالات التالية :

$\begin{cases}a+b=14\\a\times b=33\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}a+b=-25\\a\times b=100\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}a+b=4\\a\times b=-1\end{cases}$

$\begin{cases}a+b=\frac{10}{21}\\a\times b=\frac{1}{21}\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}a+b=0\\a\times b=-\frac{49}{4}\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}a+b=1+\sqrt{3}\\a\times b=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

53 عين العددين الحقيقيين a و b في كل حالة من الحالات التالية :

$\begin{cases}a-b=5\\a\times b=8\end{cases}$ ، $\begin{cases}a-b=4\\a\times b=-1\end{cases}$

$\begin{cases}a-2b=7\\a\times b=-5\end{cases}$ ، $\begin{cases}a+3b=8\\a\times b=5\end{cases}$

54 عين العددين الحقيقيين a و b في كل حالة من الحالات التالية :

$\begin{cases}a+b=8\\\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{8}{15}\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}a^2+b^2=73\\a\times b=24\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}|a|+|b|=11\\|a\times b|=24\end{cases}$

55 ليكن x ، y عددين حقيقيين حيث:

$$\begin{cases}x+y=17\\x^3+y^3=1241\end{cases}$$

1) أنشر $(x+y)^3$ ، ثم إستنتج قيمة xy.
2) احسب قيمة x^2+y^2 بدون حساب x و y

56 تعطى المعادلة (E) : $x^2-7x-34=0$.
1) برّر أن المعادلة (E) تقبل حلين غير معدومين لا يطلب تعيينهما .
2) أكتب معادلة من الدرجة الثانية تقبل الحلين $\frac{1}{x'}$ و $\frac{1}{x''}$ حيث x' و x'' هما حلا المعادلة (E) .

57 تعطى المعادلة (E) : $3x^2-2x-5=0$.
1) برّر أن المعادلة (E) تقبل حلين x' و x'' ، مختلفين في الإشارة لا يطلب تعيينهما .
2) أحسب $x'^2+x''^2$ ؛ $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$ ؛ $(x'-x'')^2$ ؛ $x'^4+x''^4$

58 عين قيم الوسيط الحقق m بحيث يكون للمعادلات المعطاة أدناه ، حلان x' و x'' يحققان العلاقة المقترحة.
1) $3x^2-2mx+1=0$ و $x'=3x''$
2) $4x^2-(1-m)x+2m=0$ و $x'-x''=\frac{1}{4}$.
3) $(m+1)x^2-(1-m^2)x+m=0$ و $x'+2x''=1$

59 لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m حيث: $x^2-(2m+3)x+m^2-2=0$
1) عين قيم العدد m حتى يكون 1 حل للمعادلة (E) .
2) أدرس حسب قيم الوسيط m وجود وإشارة حلول المعادلة (E) .

60 عين قيم العدد الحقيقي m ، إن أمكن ، حتى يكون للمعادلات التالية ، حلان مختلفان في الإشارة:
1) $x^2-8x+5m-1=0$
2) $(m+1)x^2-(2m+3)x+m^2-1=0$
3) $(m-3)x^2-2(m-4)x+m+2=0$
4) $(2m+1)x^2-4mx+1-3m=0$

61 عين قيم العدد الحقيقي m ، إن أمكن ، حتى يكون للمعادلات التالية حلان موجبان:

1) $x^2-9x+3m-4=0$

2) $mx^2-(3m-1)x+m+1=0$

3) $(m-1)x^2-2(m+2)x-m-1=0$

4) $(1-m)x^2+mx-3m-4=0$

62 حقل مستطيل الشكل مساحته $28\ m^2$ ومحيطه $23\ m$ أحسب طولي بعديه .

63 $ABCD$ مربع طول ضلعه m

1) نفرض أن $m=3cm$ أحسب طول لكل من بعدي المستطيل الذي محيطه هو نفس محيط $ABCD$ ومساحته نصف مساحة $ABCD$.

2) هل يوجد مستطيل له نفس المحيط للمربع $ABCD$ ومساحته أكبر تماما من مساحة المربع $ABCD$.

3) أحسب بدلالة m بعدي المستطيل الذي له نفس مساحة $ABCD$ ومساحته هي ثلث مساحة $ABCD$.

إشارة كثيرات الحدود

64 أدرس حسب قيم المتغير الحقيقي x إشارة كثيرات الحدود المقترحة في الحالات التالية :

1) $P(x)=(x-2)(2x+1)$.

2) $P(x)=(3-2x)(x+1)$.

3) $P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$.

4) $P(x)=(x^2-3)(x^2+2)$.

5) $P(x)=x^4-1$.

6) $P(x)=3x^2-7x$.

7) $P(x)=-2x^3+3x^2$

65 أدرس حسب قيم المتغير الحقيقي x إشارة كثيرات الحدود المقترحة في الحالات التالية :

1) $P(x)=2x^2+x-6$.

2) $P(x)=-3x^2+8x-4$.

3) $P(x)=-6x^2+x-2$.

4) $P(x)=5x^2-x+1$.

5) $P(x)=2x^2-6\sqrt{2}\,x+9$.

6) $P(x)=5x^2-2\sqrt{15}\,x+3$.

7) $P(x)=-x^2+12x-36$.

8) $P(x)=-x^2+2\sqrt{3}\,x-3$.

9) $P(x)=\frac{1}{2}x^2+x+9$.

66 أدرس حسب قيم المتغير الحقيقي x إشارة كثيرات الحدود المقترحة في الحالات التالية :

1) $P(x)=2x^3-3x^2+2x-3$.

2) $P(x)=-x^3+2x^2-6x+5$.

3) $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$.

4) $P(x)=-3x^3+11x^2-12x+4$.

5) $P(x)=x^4-3x^3-x^2+3x$.

67 حلل $P(x)$ ثم أدرس إشارته حسب قيم المتغير الحقيقي x في كل حالة من الحالات التالية :

1) $P(x)=x^4-3x^2+2$.

2) $P(x)=x^4+3x^2-4$.

3) $P(x)=3x^4-2x^2-8$.

68 $P(x)=2x^4-7x^3+9x^2-21x+9$

✓ أحسب $P(3)$ و $P\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم حلل $P(x)$

✓ استنتج إشارة $P(x)$ حسب قيم المتغير الحقيقي x .

69 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول كلا من المعادلات ذات المجهول x الآتية :

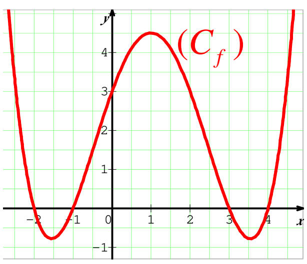
1) $(m-1)x^2-3mx+m+1=0$.

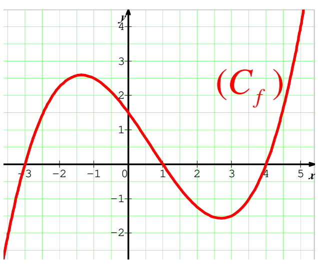
2) $(1-2m)x^2-2mx+m-2=0$.

3) $mx^2+(m-1)x+m+2=0$.

4) $(m+1)x^3-(5+m)x^2+(6-m)x-2+m=0$

70 (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f كثير حدود . أدرس بيانيا ، حسب قيم المتغير الحقيقي x ، إشارة $f(x)$ في كل من الشكلين التاليين :





71 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية :

1) $2x^2+5x-3\geq 0$
2) $-3x^2-5x+2\geq 0$
3) $2x^2+x-15<0$
4) $-3x^2+11x-10<0$
5) $-2x^2+x-5<0$
6) $-2x^2+2x-4>0$
7) $4x^2+x+9\geq 0$
8) $x^2-3x+7\leq 0$
9) $9x^2-6\sqrt{5}\,x+5\leq 0$

72 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية :

1) $x^3-x^2+3x-3<0$
2) $-2x^3+2x^2-x+1\leq 0$
3) $x^3-2x^2-x+2>0$
4) $x^4-5x^2+6>0$
5) $3x^{2008}+11x^{1962}+1964\geq 0$

المعادلات والمتراجحات المختلفة

73 نعتبر الدالة f المعرفة بالشكل :

$$f(x)=\frac{5x^2-11x+2}{3x^2-7x+2}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x ، $f(x)=0$.

74 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x الآتية:

- $\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{3x}{x-1}$ • $\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{x}{x-1}$
- $\dfrac{4x-1}{2x+1}-\dfrac{5x}{2x-1}=1$ • $\dfrac{x+7}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+7}=2$
- $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{x-4}$

75 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x الآتية:

- $\sqrt{x^2+3}-2x+1=0$ • $8\sqrt{x^2-x}=16x-17$
- $\sqrt{4x+7}=2+\sqrt{2x}$ • $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}=3$
- $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-6}=11$

76 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات ذات المجهول x الآتية:

- $\sqrt{3x+7}>x+3$
- $\sqrt{2x-3}<x-1$
- $\sqrt{-x-2}<x+2$

77 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x الآتية:

- $x^2+3|x-1|=0$ • $x^2-4|x-2|=0$
- $x^4+4|x^2-1|+3|x+2|+1=0$

78 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x الآتية:

- $(x-2)^2-3(x-2)+2=0$
- $x-5\sqrt{x}+6=0$
- $x+\sqrt{x}-6=0$
- $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x}+2=0$

79 نريد حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) ذات المجهول x :

$$(E)\ \ldots\ 3x^4-7x^3+8x^2-7x+3=0$$

1) تحقق من أن العدد 0 ليس حل للمعادلة (E)

2) برهن أن المعادلة المعادلة (E) مكافئة للمعادلة (E') حيث :

$$(E') : 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3u^2-7u+2=0$.

4) استنتج حلول المعادلة (E) .

80 ليكن $P(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x حيث :

$$P(x)=4x^3-4(\sqrt{3}+1)x^2+(9+4\sqrt{3})x-9$$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)<0$.

81 لتكن المعادلة (E) ذات المجهول x:

$$ax^2+bx+c=0$$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و a غير معدوم.

نفرض أن للمعادلة (E) حلين هما x' و x'' .

- بين أن العدد $\dfrac{x'+4x''}{5}$ محصور بين x' و x'' .
- استنتج إشارة العدد $a\left(\dfrac{x'+4x''}{5}\right)^2+ab\dfrac{x'+4x''}{5}+ac$

تطبيق عددي : (E) : $5x^2+7x-3=0$

ماهي إشارة العدد $(x'+4x'')^2+7x'+28x''-15$ ؟

82 a عدد حقيقي غير معدوم ، بحيث إذا أضفنا له مقلوبه نحصل على 3 . عين العدد a .

مسـائل

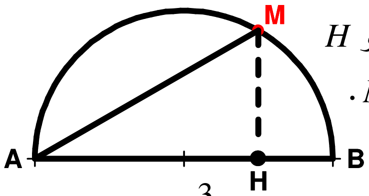
83 $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 5.

عين على القطعة $[AB]$ النقطة M بحيث يكون :

$$MA^2 - \overline{AB}.\overline{MB} = 0$$

84 نعتبر نصف الدائرة ذات القطر $AB = 8$.

عين النقطة M من هذا نصف الدائرة حيث مسقطها العمودي على $[AB]$ هو H و $MA^2 + 3MH^2 = 18$.



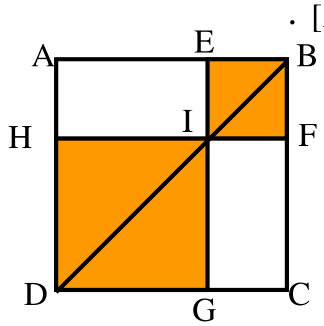
85 نعتبر الدالة f المعرفة بالشكل : $f(x) = \frac{3}{x}$.

نسمي (h) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} : \vec{j})$.

1) ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (h) مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y = 2x + m$.

2) في الحالة التي تكون لـ (h) و (D) نقطتان مشتركتان M' و M'' ، عين مجموعة النقط I منتصفات القطعة $[M'M'']$.

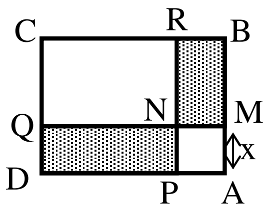
86 $ABCD$ مربع طول ضلعه 1 ، I نقطة من القطر $[BD]$



تعيّن مربعين $EBFI$ و $HIGD$.

كيف يمكن اختيار النقطة I بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين $EBFI$ و $HIGD$ يساوي $\frac{2}{3}$.

87 ليكن المستطيل $ABCD$ عرضه $AB = 3\ cm$ وطوله $BC = 5\ cm$.



النقطة M تتغير على القطعة المستقيمة $[AB]$ ونضع $AM = x$. نرسم المربع $AMNP$ حيث $P \in [AD]$ والمستطيلين $MBRN$ و $NPDQ$.

1) عين قيم العدد الحقيقي x حتى تكون $S(x)$ مجموع مساحتي المستطيلين $MBRN$ و $NPDQ$ أكبر ما يمكن.

2) من أجل أي قيم للعدد x تكون $S(x)$ تساوي نصف مساحة المستطيل $ABCD$.

88 نعرف الدالة P على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$P(x) = 2x^2 - 6x + 3$$

ليكن (γ) المنحنى الممثل للدالة P في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} : \vec{j})$.

لتكن النقطة S ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$.

1) أكتب $P(x)$ على الشكل $P(x) = a(x+b)^2 + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

2) أكتب معادلة للمنحنى (γ) في المعلم $(S ; \vec{i} : \vec{j})$. ثم أرسم (γ) .

3) أنجز جدول تغيرات الدالة P ثم وضح أصغر قيمة للدالة P على $\mathbb{R}$.

4) أعط حصرا للعدد $P(x)$ إذا كان $x \in [-2 ; 3]$.

5) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \leq x$.

6) مثل بيانيا في المعلم $(O ; \vec{i} : \vec{j})$ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ثم تحقق بيانيا من نتائج المتراجحة $P(x) \leq x$.

89 f ، g ، h ثلاث دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad ; \quad g(x) = f(|x|) \ ;$$

$$h(x) = |f(x)|$$

لكن C_f ، C_g ، C_h منحنيات الدوال f ، g ، h على الترتيب ، الممثلة في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} : \vec{j})$.

1) بين أن g زوجية ، كيف يستنتج C_g انطلاقا من C_f ؟

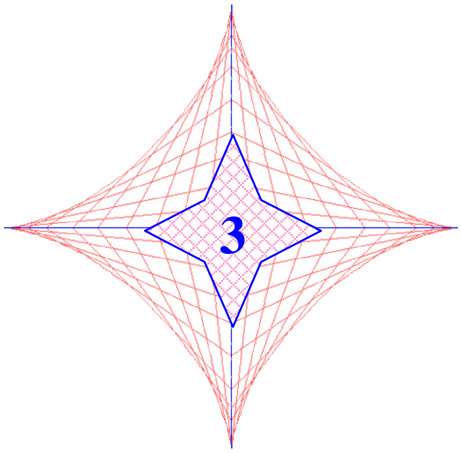
2) أدرس تغيرات الدالة f . (يمكن كتابة $f(x)$ الشكل النموذجي)

3) استنتج تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

4) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

5) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

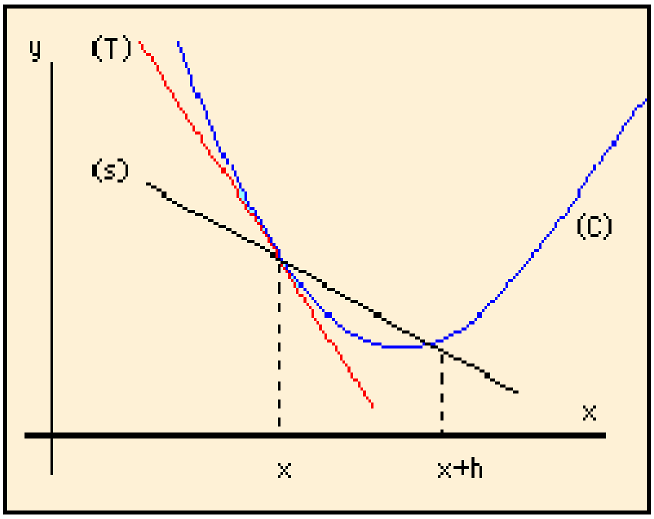
6) ارسم المنحنيات C_f ، C_g ، C_h في نفس الرسم .



الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي
- تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.
- حساب مشتقات الدوال المرجعية
- حساب مشتقات الدوال $f+g$، $f\times g$، $\frac{1}{g}$، $\frac{f}{g}$ ، $x \mapsto f(ax+b)$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

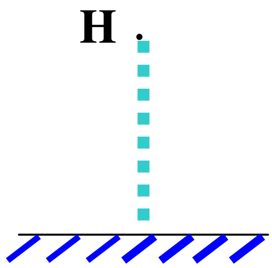
"ليبونارد أولر" من أكبر العلماء الذين عرفهم التاريخ ، استقرَ في البداية بِـسان بيترسبورق ثم في برلين سنة 1741 حيث ترأس أكاديمية العلوم إلى غاية 1766 .

تخصص في علم الفلك (دراسة مسار المجرَات) ، علم الفيزياء (الحقل المغناطيسي ، البصريات ، ...) الرياضيات (الحساب ، الهندسة التفاضلية ، مرورا بالتحليل الرقمي و الوظيفي ، حساب تغيرات البيانات ، المساحات الجبرية...) ، معادلة أولر (حساب التغيرات)

هو من أحد مؤسسي التحليل الو ظيفي و المعادلات التفاضلية.

EULER Leonhard
Suisse, 1707-1783

نشاط أول   السرعة اللحظية و السرعة المتوسطة:



الرسم المقابل يمثل سقوط كرة من النقطة H التي تبعد عن الأرض بمسافة 30 مترا . المسافة المقطوعة من طرف الكرة عند اللحظة t هي $d(t)$ حيث $d(t)=5t^2$ (وحدة الزمن هي الثانية s ، ووحدة المسافة هي المتر m)

. سرعة الكرة عند اللحظة t تسمى السرعة اللحظية للكرة و نرمز لها $v(t)$.

نريد حساب $v(2)$ عند اللحظة $t=2$.

. للتقريب من قيمة $v(2)$ نحسب السرعة المتوسطة بين اللحظتين $t=2$ و $t=2+h$

h) عدد حقيقي غير معدوم قريب من 0) السرعة المتوسطة v_m بين اللحظتين $t=2$ و $t=2+h$ معطاة بالعلاقة $v_m=\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h}$.

1) تأكد أن $v_m=20+5h$.

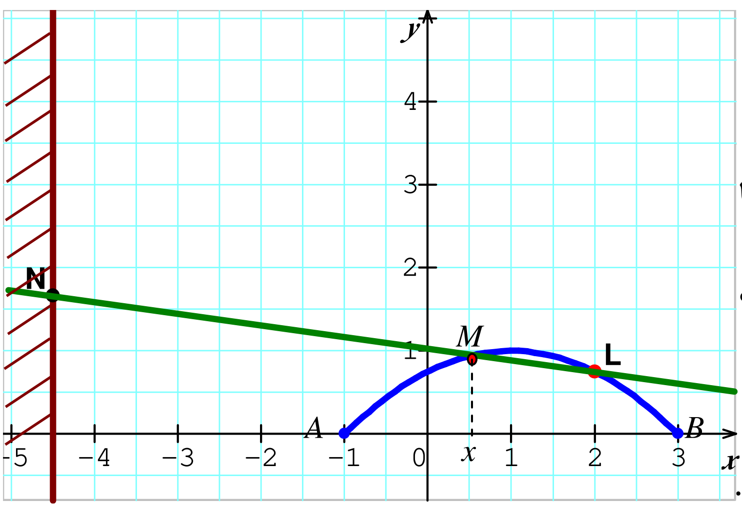
2) أكمل الجدول التالي:

h	-0.2	-0.1	-0.05	-0.001	$+0.00001$	$+0.0001$	$+0.005$	$+0.01$
v_m								

3) عين قيمة مقربة لـــ $v(2)$ بــــ $m\ s^{-1}$.

نشاط ثان   مفهوم المماس:

القوس $\overset{\frown}{AB}$ يمثل هضبة و هو الرسم البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدالة f المعرفة على $[-1,3]$ كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$. النقطة $L\left(2,\frac{3}{4}\right)$ تمثل ضوء على الهضبة. النقطة N ذات الفاصلة $-\frac{9}{2}$ تمثل شخصا يصعد على سلم بهدف مشاهدة الضوء الممثل بالنقطة L.



المستقيم (LN) يقطع القوس $\overset{\frown}{AB}$ في نقطة M فاصلتها x. نضع $h=x-2$

1) عين، بدلالة h، معامل توجيه المستقيم (LM)

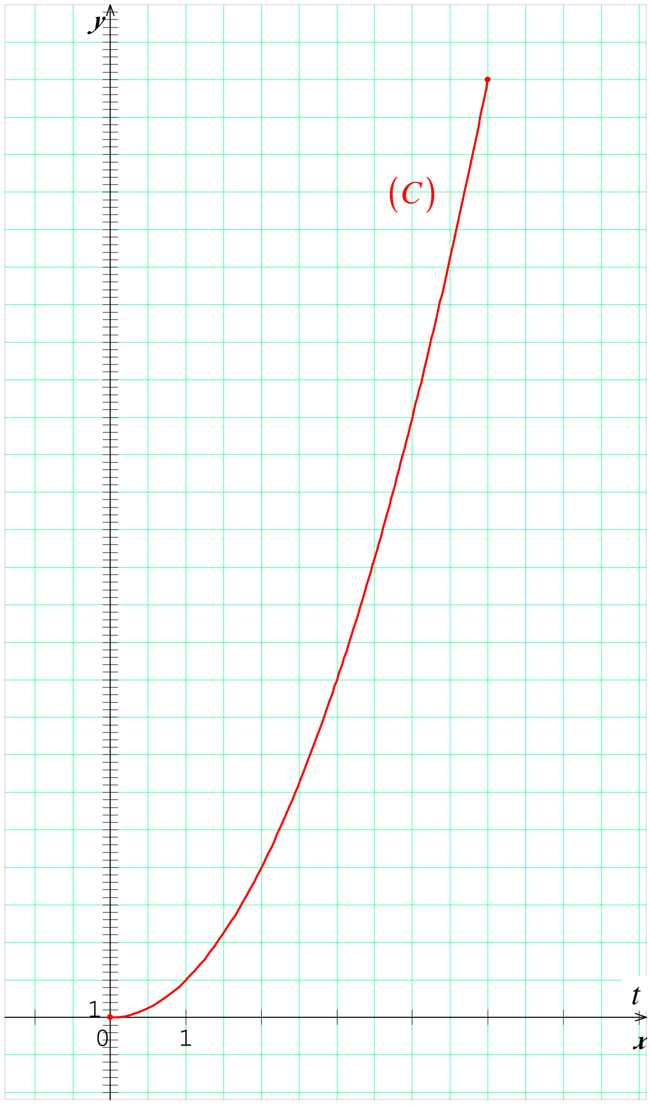
2) لتكن E وضعية الشخص على السلم التي منها يرى لأول مرة الضوء الممثل بالنقطة L.

أ - ماذا يمثّل المستقيم (LE) بالنسبة للقوس $\overset{\frown}{AB}$؟

ب - ما هي الوضعية النهائية للمستقيم (LM) لما يؤول h إلى 0؟ استنتج معامل توجيه (LE).

3) اكتب معادلة للمستقيم (LE). استنتج ترتيب E.

نشاط ثالث



نسقط جسما سقوطا حرا بدون سرعة ابتدائية . بعد t ثانية يكون هذا الجسم قد قطع مسافة $d(t)$ مقدرة بالمتر.

بحيث من أجل كل t من $[0,5]$: $d(t)=5t^2$.

(C) الرسم البياني للدالة d في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الرسم المقابل) .

1) أنشئ من جديد هذا الرسم على ورقة ملميترية.

2) أحسب السرعة المتوسطة للجسم خلال خمس ثوان من سقوطه . ما هو تفسيرها البياني؟

3) ليكن المستقيم (AM) الذي يشمل النقطة $A(2,20)$ و النقطة M تختلف عن A و تتغير على (C) ، نرمز إلى فاصلة النقطة M بـــ t .

- احسب ترتيب النقطة M .
- أثبت أن معامل توجيه المستقيم (AM) هو نسبة التزايد الدالة d عند $t_0=2$.
- كيف يمكن الحصول بيانيا على السرعة اللحظية عند $t_0=2$ ؟
- احسب السرعة اللحظية .هل هذا يتناسب مع التفسير الهندسي ؟

نشاط رابع

في كل حالة من الحالات التالية ، بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I معيّنا دالتها المشتقة:

1) $f:x\mapsto x^n$ مع n عدد طبيعي غير معدوم و $I=\mathbb{R}$.

2) $f:x\mapsto \dfrac{1}{x}$ و $I=]0;+\infty[$ أو $I=]-\infty;0[$.

3) $f:x\mapsto \sqrt{x}$ و $I=]0;+\infty[$.

الإشتقاقية.

1.العدد المشتق.

1.1 نهاية حقيقية لدالة عند الصفر.

D_f مجال من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ يشمل الصفر .

نقول أن العدد الحقيقي l هو نهاية الدالة f عند النقطة 0 معناه عندما يأخذ x قيما قريبة من 0 بالقدر الكافي فإن العدد $f(x)$ يأخذ قيما قريبة من l بالقدر الذي نريد . و نكتب $\lim_{x\to 0} f(x) = l$.

2.1 دالة قابلة للإشتقاق عند عدد.

تعريف: f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. x_0 عدد من D_f. القول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد x_0 معناه الدالة : $g : h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تقبل نهاية حقيقية l عند 0 . أي $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$

يسمى l العدد المشتق للدالة f في العدد x_0 . و نرمز له بـ $f'(x_0)$.

تعاليق:

- العدد $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ يسمى نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 و x_0+h ، نرمز له بـ $g(h)$ ؛ وهو معرف إذا كان h غير معدوم و x_0+h عنصرا من D_f.

و نكتب $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

2.الدالة المشتقة لدالة f .

تعريف: f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f .

تسمى الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f على D_f .

ويرمز لها بـ f' . و نكتب $f' : x \mapsto f'(x)$

مثال: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2$.

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ ، $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h(h+2x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 2x_0 = 2x_0$

إذن f تقبل الاشتقاق عند كل x_0 من $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x_0) = 2x_0$.

ومنه f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة بـ $f'(x) = 2x$.

تمرين محلول 1

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=x^2+2x-1$.

• عين العدد المشتق للدالة f عند $x_0=2$.

حــــل: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2+2(2+h)-1-7}{h}$$
$$=\frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$$
$$=\frac{h^2+6h}{h}$$
$$=h+6$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+6)$$
$$=6$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2)=6$.

تمرين محلول 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=-x^2+2$.

أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعيّن دالتها المشتقة f'.

طريقة: لمعرفة ما إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 يمكننا باستعمال التعريف في البداية حساب نسبة التزايد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ للدالة f بين العددين المتمايزين x_0 و x_0+h ثم نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

حــــل:

لدينا $f(x)=-x^2+2$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن x_0 عدد حقيقي . $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 و x_0+h مع $h\neq 0$

ومنه $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\left[-(x_0+h)^2+2\right]-(-x_0^2+2)}{h}=\frac{-2x_0h-h^2}{h}=-2x_0-h$

وبالتالي : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(-2x_0-h)=-2x_0$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x)=2x$.

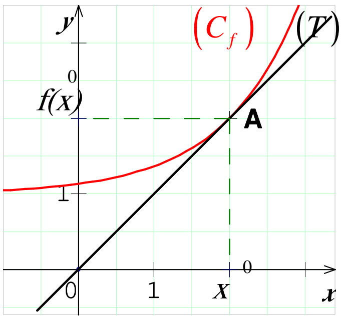
التفسير الهندسي للعدد المشتق.

1. مماس لمنحن عند نقطة.

تعريف: f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. x_0 عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)$ العدد المشتق عند العدد x_0 . ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$. مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(x_0)$. معادلته هي

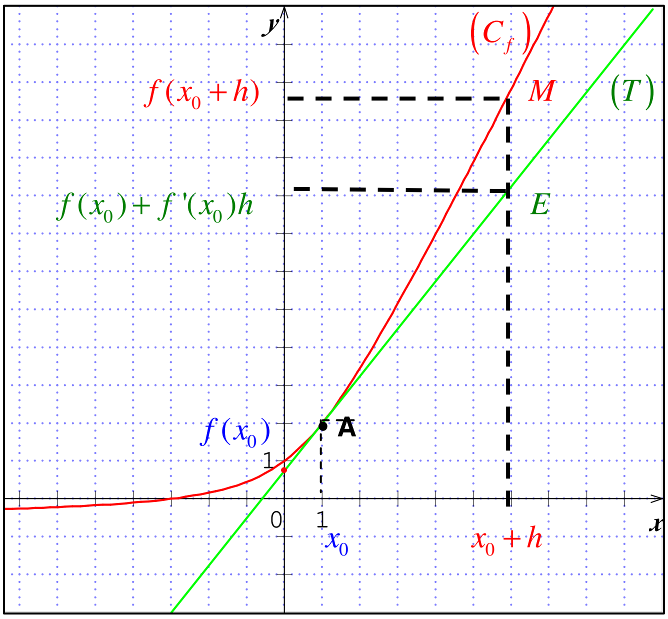
$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

المماس (T) هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$ إذن معادلة (T) من الشكل $y=f'(x_0)x+b$ و النقطة $A(x_0, f(x_0))$ تنتمي إلى (T) ومنه وبالتعويض $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. وبالتالي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



2. التقريب التآلفي لدالة:

(C_f) هو الرسم البياني لدالة f قابلة للإشتقاق عند نقطة x_0 و (T) مماس (C_f) عند النقطة $A(x_0 ; f(x_0))$. نعوض محليا عند x_0 الدالة f بالدالة التآلفية g الممثلة بالمستقيم (T).
أي نعوض العدد الحقيقي $f(x_0+h)$ بالعدد $f(x_0)+f'(x_0)h$. من أجل h قريب من الصفر $f(x_0)+f'(x_0)h$ يسمى تقريبا تآلفيا للعدد $f(x_0+h)$. بوضع $x_0+h=x$ ومن أجل x قريب من x_0 فإن $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ يسمى تقريبا تآلفيا لـــ $f(x)$ بجوار x_0.
نقبل أن أحسن تقريب تآلفي بجوار x_0 للدالة f هو الدالة $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



تمرين محلول 3

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+2$.
ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
• عين معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

حـل:

• في التمرين المحلول الأول رأينا أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ و $f'(x) = -2x$ ؛ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 و $f'(1)=-2$ و بالتالي -2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند A
لدينا $f(1)=1$.
معادلة للمماس (T) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.
و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y=-2x+3$.

تمرين محلول 4

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x+1$.
ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) .
• عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 0 .
• عين تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار 0 .
• عين قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$.

حـل:

• بنفس الطريقة المعتمدة في التمرين المحلول 1 الدالة f قابلة للإشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ ، و $f'(x)=2x+2$ ، إذن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة 0 و $f'(0)=2$ و بالتالي 2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0. لدينا $f(0)=1$ و منه معادلة للمماس (T) هي : $y=f'(0)(x)+f(0)$.
و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y=2x+1$.
• تقريب تآلفي لـ f بجوار 0 هو $f'(0)(x)+f(0)$ أي $2x+1$. و الدالة $g:x\mapsto 2x+1$ هي أحسن تقريب تآلفي لها.
• $1.00004=1+4\times10^{-5}$ و $f(x)=(1+x)^2$ و منه قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي $1+2\times4\times10^{-5}$
أي 1.00008 إذن قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي 1.00008

مشتقات الدوال المألوفة :

مبرهنة1: الدالة التآلفية $f:x\mapsto ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\mapsto a$

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h}=\frac{ah}{h}=a$$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$ و منه صحة المبرهنة.

ملاحظة:

* إذا كان $a=1$ و $b=0$ نستنتج أن الدالة $f:x\mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto 1$.

* إذا كان $a=0$ نستنتج أن الدالة $f:x\mapsto b$ (الدالة الثابتة)قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto 0$

مبرهنة 2: الدالة $f:x\mapsto x^n$ (n عدد طبيعي غير معدوم) قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\mapsto nx^{n-1}$

مبرهنة 3: الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\mapsto-\frac{1}{x^2}$.

مبرهنة 4: الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مبرهنة5:(تقبل بدون برهان) الدالة $f:x\mapsto\sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\mapsto\cos x$

مبرهنة 6:(تقبل بدون برهان) الدالة $f:x\mapsto\cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$f':x\mapsto-\sin x$

تمرين محلول 5

f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ: $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{x}$.

ليكن (C_f) و (C_g) رسميهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

عين المماسات المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

حـــل: حسب المبرهنتين 1 و 2 ، الدالتان f و g قابلتان للإشتقاق على $]-\infty, 0[$.ولدينا:

$f'(x)=2x$ و $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

$A(x_0, f(x_0))$ نقطة من (C_f) و $B(x_1, g(x_1))$ نقطة من (C_g) .

ليكن (T) مماس (C_f) عند النقطة A و (T') مماس (C_g) عند النقطة B .

معادلة لـ (T) : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي $y=2x_0x-x_0^2$

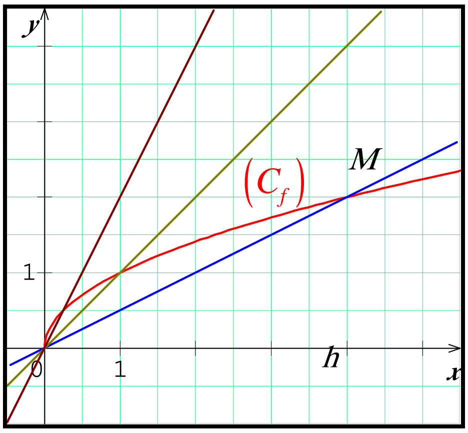
معادلة لـ (T') : $y=g'(x_1)(x-x_1)+g(x_1)$ أي $y=-\frac{1}{x_1^2}x+\frac{2}{x_1}$

(T) و (T') منطبقان معناه
$$\begin{cases} 2x_0=-\dfrac{1}{x_1^2} \\ -x_0^2=\dfrac{2}{x_1} \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نحصل على $x_0=-2$ و $x_1=-\frac{1}{2}$.

و منه معادلة (T) و (T') : $y=-4x-4$.

تمرين محلول 6



الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$. قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة f' معرفة من أجل كل x من $]0,+\infty[$ كما يلي: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

نريد دراسة قابلية إشتقاق f عند **0**. ليكن (C_f) الرسم البياني لــ f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل)

M نقطة من (C_f) فاصلتها h . معامل توجيه المستقيم (OM) هو $\frac{f(h)}{h}$ أي $\frac{1}{\sqrt{h}}$. كلما اقترب h من الصفر اقتربت النقطة M من النقطة O و عليه يأخذ $\frac{1}{\sqrt{h}}$ قيما كبيرة أكثر فأكثر

نقر عندئذ أن الوضعية النهاية للمستقيم (OM) هي حامل محور التراتيب .

نقول أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة **0** و المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور التراتيب .

عمليات على الدوال المشتقة:

مشتقة مجموع دالتين:

مبرهنة: u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$. الدالة $(u+v)$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي: $(u+v)'=u'+v'$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا:

$$\frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h)+v(x_0+h)-u(x_0)-v(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}+\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

نضع $g_1(h)=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ و $g_2(h)=\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$.

بما أن u و v قابلتان للإشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D $\lim\limits_{h\to0} g_1(h)=u'(x_0)$ و $\lim\limits_{h\to0} g_2(h)=v'(x_0)$

و منه $\lim\limits_{h\to0}\frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}=u'(x_0)+v'(x_0)$ و منه صحة المبرهنة.

مشتقة جداء دالتين:

مبرهنة: لتكن دالتان u و v قابلتان للإشتقاق على D (D هو مجال أو إتحاد مجالات من $\mathbb{R}$).الدالة $(u.v)$ قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $(u.v)'=u'.v+u.v'$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا:

$$\frac{(u.v)(x_0+h)-(u.v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h).v(x_0+h)-u(x_0).v(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h).v(x_0+h)-u(x_0).v(x_0)+v(x_0+h).u(x_0)-v(x_0+h).u(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0+h)+\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}u(x_0)$$

نضع $g_1(h)=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ و $g_2(h)=\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$ بما أن u و v قابلتان للاشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D $\lim\limits_{h\to0} g_1(h)=u'(x_0)$ و $\lim\limits_{h\to0} g_2(h)=v'(x_0)$ و $\lim\limits_{h\to0} v\left(x_0+h\right)=v\left(x_0\right)$

ومنه $\lim\limits_{h\to0}\frac{(u.v)(x_0+h)-(u.v)(x_0)}{h}=u'(x_0).v(x_0)+u(x_0).v'(x_0)$ إذن صحة المبرهنة.

حالة خاصة: الدالة (λu) (حيث λ عدد حقيقي) قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $(\lambda u)'=\lambda u'$.

تمرين محلول 6

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حـل:

الدالة f هي مجموع ثلاثة دوال u ، v و w . حيث: $u:x\mapsto x^3$ ، $v:x\mapsto \frac{1}{x}$ و $w:x\mapsto \sqrt{x}$.

هذه الدوال الثلاثة قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto 3x^2$ ، $v':x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ و $w':x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$. ودالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto 3x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

تمرين محلول 7

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=(x^3+x+1)\sqrt{x}$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حـل:

الدالة f هي جداء دالتين u و v . حيث: $u:x\mapsto x^3+x+1$ ، $v:x\mapsto \sqrt{x}$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto 3x^2+1$ ، $v':x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.ودالتها المشتقة f' هي: $f'(x)=(3x^2+1)\sqrt{x}+(x^3+x+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

تمرين محلول 8

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-7x^3+4x^2+3x-2$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حـل:

الدالة f هي دالة كثير حدود .إذن فهي قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (تطبيق المبرهنات السابقة). و دالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x)=(-7)\times(3x^2)+(4)\times(2x)+(3)\times(1)+0$$

$$f'(x)=-21x^2+8x+3$$

عمليات على الدوال المشتقة (تابع):

مشتقة مقلوب دالة:

مبرهنة: v دالة قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و v لا تنعدم على D. الدالة $\left(\frac{1}{v}\right)$ قابلة للاشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h}=\frac{\left(\frac{1}{v(x_0+h)}\right)-\left(\frac{1}{v(x_0)}\right)}{h}$$

$$=\left(\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{v(x_0+h).v(x_0).h}\right)$$

$$=\frac{1}{v(x_0+h).v(x_0)}\left(-\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$

بما أن v قابلة للإشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h}=-\frac{v'(x_0)}{\left(v(x_0)\right)^2}$

ومنه صحة المبرهنة.

مشتقة نسبة دالتين:

مبرهنة: لتكن دالتان u و v قابلتان للإشتقاق على D (D هو مجال أو إتحاد مجالات من $\mathbb{R}$) و v لا تنعدم على D.

الدالة $\left(\frac{u}{v}\right)$ قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

برهان: نلاحظ أن $\frac{u}{v}$ يكتب $u\times\frac{1}{v}$ و نطبق مبرهنة مشتقة مقلوب دالة و مبرهنة مشتقة جداء دالتين .

مشتقةالدالة: $f:x\mapsto u(ax+b)$

مبرهنة:(تقبل بدون برهان) u قابلة للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$. a و b عددان حقيقيان. E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى D. الدالة $f:x\mapsto u(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على E و دالتها المشتقة f' هي : $f':x\mapsto au'(ax+b)$. حيث u' مشتقة الدالة u على D.

ملاحظة: الدالة f هي دالة مركبة من الدالة $k:x\mapsto ax+b$ متبوعة بالدالة u أي $f=u\circ k$.

تمرين محلول 9

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x-4}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حــــل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2x-4\neq 0$.

$2x-4=0$ معناه $x=2$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f و منه $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.

- الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f=\dfrac{u}{v}$. حيث: $u:x\mapsto 3x+5$ ، $v:x\mapsto 2x-4$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$ نعلم أن : $u':x\mapsto 3$ ، $v':x\mapsto 2$.

بما أن $v(x)\neq 0$ على D_f وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$. و دالته المشتقة f' معرفة بـِ: $f'(x)=\dfrac{3(2x-4)-2(3x+5)}{(2x-4)^2}=\dfrac{-22}{(2x-4)^2}$

تمرين محلول 10

لتكن الدالة f المعرفة على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ كما يلي : $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حــــل:

- الدالة f معرفة على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ لأن على هذا المجال $\cos x\neq 0$.

الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f=\dfrac{u}{v}$. حيث: $u:x\mapsto \sin x$ ، $v:x\mapsto \cos x$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto \cos x$ ، $v':x\mapsto -\sin x$.

بما أن $v(x)\neq 0$ على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

دالتها المشتقة f' معرفة بـ :

$$f'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

جدول ملخص:

الدالة f	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة f'
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$u+v$	يجب أخذ شروط كل دالة بعين الاعتبار	$u'+v'$
$u.v$		$u'.v+u.v'$
$\lambda u \ (\lambda \in \mathbb{R})$		$\lambda u'$
$\frac{1}{u}$		$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$		$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$x \mapsto u(ax+b)$		$x \mapsto au'(ax+b)$

تمرين محلول 11

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-6}$.

- **عين مجموعة تعريف الدالة** f .
- **عين الدالة المشتقة** f' **للدالة** f .

حـــل:

- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-6\geq 0$.

$2x-6\geq 0$ معناه $x\geq 3$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f و منه $D_f=[3,+\infty[$.

- الدالة f هي مركبة من الدالة $v:x\mapsto 2x-6$ تتبعها الدالة $u:x\mapsto\sqrt{x}$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v':x\mapsto 2$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و نعلم أن $v':x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

الدالة v موجبة تماما على $]3,+\infty[$. إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]3,+\infty[$

وتطبيقا لمبرهنة مشتقة الدالة $x\mapsto u(ax+b)$ نجد أن : $f'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x-6}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

تمرين محلول 12

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\cos(-4x+3)$.

- **عين الدالة المشتقة** f' **للدالة** f .

حـــل:

- الدالة f هي مركبة من الدالة $v:x\mapsto -4x+3$ تتبعها الدالة $u:x\mapsto\cos x$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v':x\mapsto -4$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v':x\mapsto -\sin x$.

الدالة f هي مركبة من الدالة $v:x\mapsto -4x+3$ تتبعها الدالة $u:x\mapsto\cos x$ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

وتطبيقا لمبرهنة مشتقة الدالة $x\mapsto u(ax+b)$ نجد أن : $f'(x)=(-4)\times[-\sin(-4x+3)]$

$$=4\sin(-4x+3)$$

كيفية إنشاء مماس لقطع مكافئ و لقطع زائد.

مسألة1: مماس لقطع مكافئ.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن (P) لقطع المكافئ الممثل للدالة :

$f:x\mapsto\frac{1}{k}x^2$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم . لتكن A النقطة من (P) التي فاصلتها a ($a\neq0$).

- عين بدلالة a معادلة للمماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة A .
- عين إحداثيتي نقطة تقاطع المماس (T) مع محور الفواصل .
- استنتج إنشاء بسيطا للمماس (T).

تطبيق: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن (P) القطع المكافئ الممثل للدالة :

$f:x\mapsto-3x^2$.

- أنشئ (P) .
- أنشئ المماس (T_1) للمنحنى (P) عند النقطة A التي فاصلتها **1**.
- أنشئ المماس (T_2) للمنحنى (P) عند النقطة B التي فاصلتها -2 .
- أنشئ المماس (T_3) للمنحنى (P) عند النقطة C التي فاصلتها $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

مسألة2: مماس لقطع زائد.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$ ليكن (H) القطع الزائد الممثل للدالة :

$f:x\mapsto\frac{1}{x}$. لتكن M نقطة من (H) فاصلتها a ($a\neq0$).

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- عين بدلالة a معادلة للمماس (T) للمنحنى (H) عند النقطة M.
- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع المماس (T) مع محوري المعلم . لتكن A و B هاتين النقطتين.
- تأكد أن M منتصف للقطعة $[AB]$.
- استنتج إنشاء بسيطا للمماس (T).
- أنشئ (H).
- أنشئ المماس (T_1) للمنحنى (H) عند النقطة R التي فاصلتها -1.
- أنشئ المماس (T_2) للمنحنى (H) عند النقطة N التي فاصلتها -3.
- أنشئ المماس (T_3) للمنحنى (H) عند النقطة P التي فاصلتها $-\frac{1}{2}$.

تقريبات تآلفية مألوفة عند0:

تذكير: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند عدد a فإن:

$f(x) \simeq f(a) + f'(a) \times (x-a)$ من أجل x قريب من a

أو $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$ من أجل h قريب من 0 $(x = a+h)$

1. أنقل ثم أكمل ملئ الجدول التالي:

$f(x) =$	$(1+x)^2$	$(1+x)^3$	$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\cos x$	$\sin x$
التقريب التآلفي عند0	$1+2x$					1	

2. باستعمال التقريب التآلفي المناسب أحسب قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

$\sqrt{0,99}$ ،$\sqrt{1,004}$ ،$(0,99)^2$، $(1,002)^2$ ،$(0.98)^3$ ،$(1,003)^3$ ،$\frac{1}{0,98}$ ،$\frac{1}{1,003}$

.$\frac{1}{(0.99)^2}$ ،$\frac{1}{(1.01)^2}$

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـِ:

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

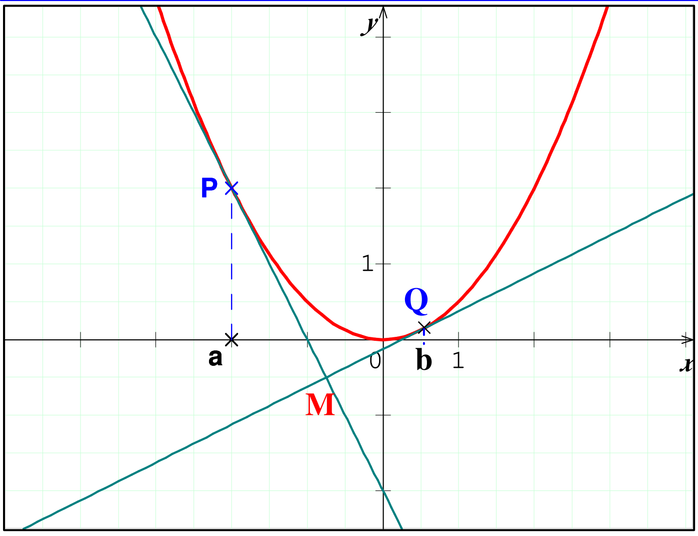
- ❖ عين المعادلة المختصرة لـِ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- ❖ لتكن g الدالة التي تمثيلها البياني (Δ). عين، باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، مجالا محتوى في المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ يكون فيه: $f(x) - g(x) \leq 10^{-3}$.
- ❖ بين أنه من أجل كل x من $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ لدينا: $0 \leq \frac{1}{x+1} - (1-x) \leq 2x^2$ $\quad (1)$
- ❖ عين، باستعمال العلاقة (1) ، ، مجالا محتوى في المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ يكون فيه: $f(x) - g(x) \leq 10^{-2}$.

الهدف من هذه المسألة هو البحث عن مماسين متعامدين لقطع مكافئ .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$

حيث أن $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ و ليكن $\left(C_f\right)$ رسمها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أوجد مجموعة النقط M من المستوي التي منها يمكن إنشاء مماسين للمنحنى $\left(C_f\right)$ متعامدين.



نفرض وجود نقطة M من المستوي منها يمكن رسم مماسين للمنحنى $\left(C_f\right)$ متعامدين ونضع $M\left(x_0\,,y_0\right)$ ليكن (T) أحد المماسين المتعامدين ولتكن النقطة P نقطة التماس ، نضع a فاصلة P ، ليكن (T') المماس الثاني ولتكن النقطة Q نقطة التماس ، نضع b فاصلة Q . (a و b عددين حقيقيين غير معدومين).

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي : $f'(x)=x$.

المماس (T) معادلته: $y=ax-\frac{1}{2}a^2$.

المماس (T')معادلته: $y=bx-\frac{1}{2}b^2$. النقطة M تنتمي إلى (T) ومنه $y_0=a\,x_0-\frac{1}{2}a^2$ أي $a^2-2ax_0+2y_0=0$.

النقطة M تنتمي إلى (T') ومنه $y_0=b\,x_0-\frac{1}{2}b^2$ أي $b^2-2bx_0+2y_0=0$.

بما أن (T) و (T') متعامدين فإن جداء معاملي توجيههما يساوي -1 أي $a\times b=-1$.

من الجملة $\left.\begin{array}{r} a^2-2ax_0+2y_0=0\\ b^2-2bx_0+2y_0=0\\ a\times b=-1\end{array}\right\}$ نستنتج $\left.\begin{array}{r} ba^2-2abx_0+2by_0=0\\ ab^2-2abx_0+2ay_0=0\\ a\times b=-1\end{array}\right\}$ و منه $\boxed{y_0=-\frac{1}{2}}$

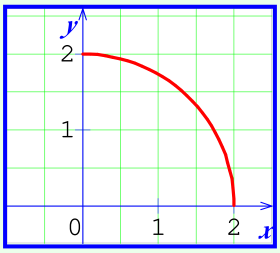
إذن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$.

<u>المسألة العكسية:</u> لتكن نقطة $M\left(x_0,-\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$. ليكن (T) المماس لـــ$\left(C_f\right)$ عند نقطة التماس التي فاصلتها a و يشمل النقطة M ، معادلة لـــ(T) $y=ax-\frac{1}{2}a^2$.

النقطة M تنتمي إلى (T) ومنه $-\frac{1}{2}=a\,x_0-\frac{1}{2}a^2$ ومنه $a^2-2ax_0-1=0$ (معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول a) المميز x_0^2+1 موجب تماما . و منه المعادلة تقبل حلين وبالتالي يوجد مماسان يشملان M ، من جهة أخرى جداء الحلين يساوي -1 ومنه المماسان متعامدان لأن الحلين هما معاملي توجيه المماسين .

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=-\frac{1}{2}}$.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. f دالة معرفة على المجال $[0,2]$ كما يلي:
$f(x)=\sqrt{4-x^2}$. (C_f) رسمها البياني (انظر الشكل)



1) ماذا تخمن بالنسبة: للمماس عند النقطة التي فاصلتها 0 ، للمماس عند النقطة التي فاصلتها 2 و لوجود محور تناظر.

2) أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;2[$.

- **تأكد أن $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=\sqrt{2-x}\times\sqrt{2+x}$**
  ثم عين f' مشتقة f على المجال $[0;2[$
- **اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .**

3) علما أن الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند 0، عين المماس لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2.

4) لتكن M نقطة كيفية من (C_f) فاصلتها x، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. نسمي M' نقطة من (C_f) ترتيبها x. عين احداثيي M و M' .
أثبت أن (D) محور القطعة $[MM']$ و استنتج أن (D) محور تناظر للمنحني (C_f) .

1) التخمين

- المماس عند 0 يوازي محور الفواصل ، المماس عند 2 يوازي محور التراتيب ، المنصف الأول محور تناظر.

2) نعتبر u و v حيث $u:x\mapsto 4-x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $v:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$
لدينا $f=\sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق على $[0;2[$ لأن $4-x^2>0$ من أجل كل x من المجال $[0;2[$

- $4-x^2=(2-x)(2+x)$
  في المجال $[0;2[$ يكون $2-x>0$ و $2+x>0$
  ومنه $f(x)=\sqrt{2-x}\times\sqrt{2+x}$
- حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

3) المماس لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2 يوازي محور التراتيب .

4) $M\left(x;\sqrt{4-x^2}\right)$ ، $M'(x';x)$

حساب x' : $f(x')=x$ و منه $\sqrt{4-x'^2}=x$ و منه $x'=\sqrt{4-x^2}$ ، إذن $M'\left(\sqrt{4-x^2};x\right)$

- المثلث OMM' متساوي الساقين إذن (D) محور القطعة $[MM']$

النتيجة : المنحني (C_f) يقبل المستقيم (D) كمحور تناظر .

طريقة أولر (Euler) بمجدول

تقديم: تسمح طريقة أولر من إنشاء تمثيل بياني تقريبي لدالة عبارتها ضمنية و قابلة للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بمعرفة دالتها المشتقة و $f(a)$ صورة العدد a بواسطة الدالة f. ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة.

دراسة مثال: نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ و $f(0)=0$

نريد تعيين قيمة مقربة لـِ $f(1)$ ثم إنشاء تمثيل بياني تقريبي للدالة f على المجال $[0;1]$.

نعلم أنه إذا كان h قريبا من 0 فإن: $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$. يمثل هنا h الخطوة.

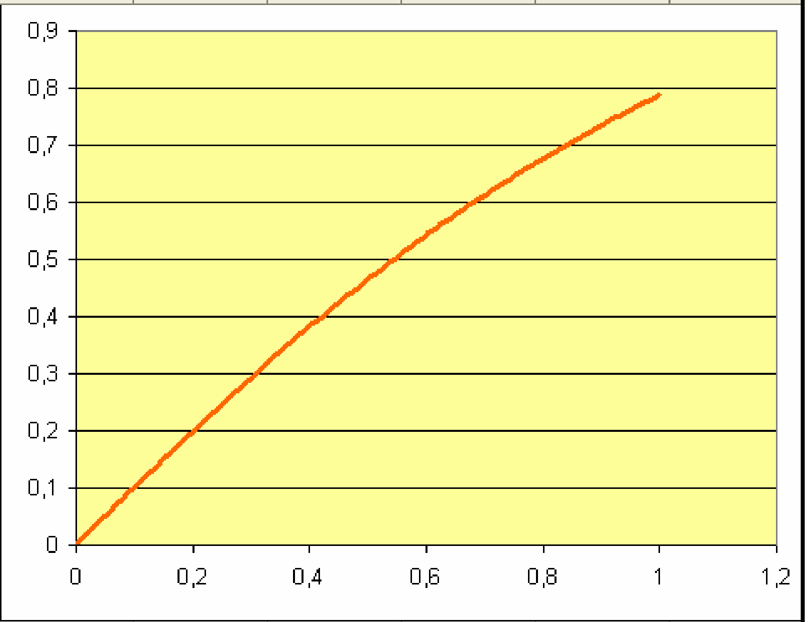
بعد اختيار خطوة h تسمح بالذهاب من a إلى b ننشئ متتالية فواصل (x_k) و متتالية تراتيب (y_k) و هي قيم مقربة للأعداد $f(x_k)$ على النحو التالي:

للحصول على n حدا نأخذ الخطوة: $h=\dfrac{b-a}{n}$ ثم نضع:

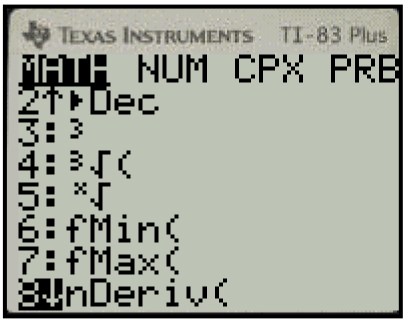
x_k	y_k
$x_0=a$	$f(a)=y_0$
$x_1=x_0+h=a+h$	$f(x_1)\simeq y_1=y_0+hf'(x_0)$
$x_2=x_1+h=a+2h$	$f(x_2)\simeq y_2=y_1+hf'(x_1)$
$\dots$	$\dots$
$x_n=x_{n-1}+h=a+nh=b$	$f(b)=f(x_n)\simeq y_n=y_{n-1}+hf'(x_{n-1})$

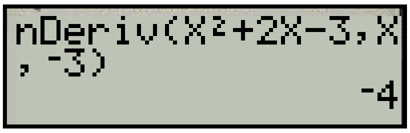
بأخذ $h=0.01$ أنجز ورقة الحساب الموالية. اقرأ قيمة $f(1)$ المحصل عليها في الخلية $C102$.

	A	B	C
1	Xk	f'(Xk)	Yk
2	0	1	0
3	0,01	0,99990001	0,01
4	0,02	0,99960016	0,019999
5	0,03	0,99910081	0,029995
6	0,04	0,99840256	0,03998601
7	0,05	0,99750623	0,04997004
8	0,06	0,99641291	0,0599451
9	0,07	0,99512389	0,06990923
10	0,08	0,9936407	0,07986047
11	0,09	0,99196508	0,08979687
12	0,1	0,99009901	0,09971652
13	0,11	0,98804466	0,10961751
14	0,12	0,98580442	0,11949796
15	0,13	0,98338086	0,129356
16	0,14	0,98077678	0,13918981
17	0,15	0,97799511	0,14899758
18	0,16	0,975039	0,15877753
19	0,17	0,97191175	0,16852792
20	0,18	0,96861682	0,17824704
21	0,19	0,9651578	0,18793321
22	0,2	0,96153846	0,19758479



استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحساب العدد المشتق و رسم المماس





1. حساب العدد المشتق عند a

بالنسبة للآلة الحاسبة Ti83 plus نضغط على اللمسة MATH ثم نختار 8.

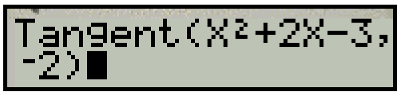
نحجز على الترتيب عبارة الدالة، المتغير و العدد a ثم نصادق بـ: ENTER

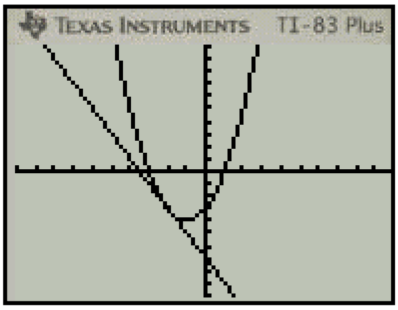
مثال: نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=x^2+2x-3$

العدد المشتق للدالة f عند $a=-3$ هو -4.

تطبيق: احسب العدد المشتق للدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$ عند العدد 0. علق على النتيجة.

2. رسم مماس منحن عند نقطة منه





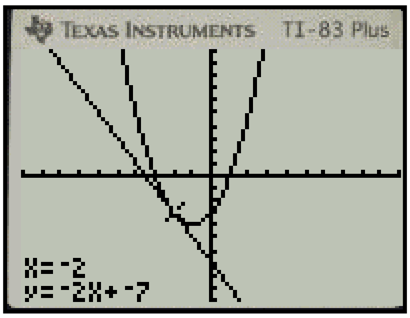
- **انطلاقا من حجز عبارة الدالة**

بالنسبة للآلة الحاسبة Ti83 plus نضغط على اللمسة 2nd ثم اللمسة PRGM و نختار 5. نحجز على الترتيب عبارة الدالة وفاصلة النقطة ثم نصادق.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=x^2+2x-3$

نمثل على شاشة الآلة الحاسبة المماس عند النقطة ذات الفاصلة (-2)

تطبيق: مثل على شاشة الآلة الحاسبة البيانية مماس المنحنى الممثل للدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.



- **انطلاقا من التمثيل البياني للدالة**

بالنسبة للآلة الحاسبة Ti83 plus و بعد تمثيل الدالة بيانيا

نضغط على اللمسة 2nd ثم اللمسة PRGM

و نختار 5. بواسطة الزالق نحدد النقطة كما يمكننا حجز فاصلة النقطة و المصادقة عليها باللمسة ENTER .

مثال: مثلنا على شاشة الآلة الحاسبة مماس المنحنى الممثل للدالة f المعرفة في المثالين السابقين عند النقطة ذات الفاصلة (-2). نلاحظ أن المعادلة المختصرة للمماس تظهر على الشاشة.

ملاحظة: لمحو المماسات الممثلة على الشاشة نضغط على اللمسة 2nd ثم اللمسة PRGM ثم نختار 1.

الاشتقاقية

من **1** إلى **21** ينسب المستوي إلى معلم .

أصحيح أم خطأ

1 من أجل $h \neq 0$ نسبة تزايد الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^2+1$ ، بين 3 و $3+h$ هي $h+6$.

2 إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل -1 فإن عدده المشتق هو : $\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}$

3 إذا كانت الدالة f تحقق من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h ، $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=2h^2-3h-4$ فإن $f'(1)=-4$

4 إذا كان $f(-2)=0$ و $f'(-2)=2$ فإن $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-2)}{h}=2$

5 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3$. من أجل $h\neq 0$ ، $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=-8$.

6 إذا كان العدد المشتق للدالة f يحقق $f'(3)=1$ فإن $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=1$.

7 إذا كانت $y=3$ هي معادلة لمماس منحنى الدالة f عند النقطة $A(0\,;3)$ فإن $f'(0)=3$.

8 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-x$ معادلة المماس للمنحنىالممثل للدالة f في معلم عند النقطة $A(2\,;2)$ هي $y=3x+1$.

9 إذا كانت f دالة تحقق $f(1)=-2$ و $f'(1)=-1$ فإن $y=-x-1$ هي معادلة لمماس منحنها عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

10 إذا كان مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة -2 ، موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y=\dfrac{x}{2}$ فإن $f'(-2)=4$.

11 إذا كان مماس منحنى الدالة f عند لنقطة $\omega(2\,;-1)$ ، يشمل $O(0\,;0)$ فإن $f'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

12 الدّالتان $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ و $x\mapsto \dfrac{2x+1}{x}$ لهما نفس الدالة المشتقة على $\mathbb{R}^*$.

أسئلة متعددة الاختيارات

من بين الأجوبة المقترحة اختر الجواب الصحيح.

13 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-3$.
- $f'(1)=0$
- $f'(1)=-3$
- $f'(1)=2$

14 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-1)^2$ ، h عدد حقيقي غير معدوم.
- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=h^2+h-1$
- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=h+2$
- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-h$

15 f دالة حيث $f(1)=-1$ و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)+1}{h}=2$
- الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 .
- $f'(1)=3$.
- الدالة f غير معرفة عند 1 .

16 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. العدد $f'(2)$ هو :
- 0 ؛
- -1 ؛
- غير موجودة .

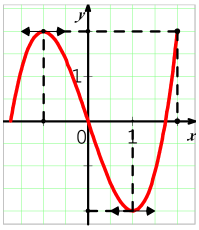
17 f الدالة المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x}$
- $f'(0)=1$
- $f'(0)$ غير معرف
- $f'(0)=-1$

18 f دالة حيث : $f(0)=1$ و $f'(0)=3$. معادلة مماس المنحنى للدالة f عند النقطة $A(0;1)$ هي:
- $y=3x+1$ ؛
- $y=3x$ ؛
- $y=3x+3$

19 $y=2x-3$ هي معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة $A(1;-1)$. العدد $f'(1)$ هو :
- 6
- 2
- 0 .

20 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+x$ الدالة المشتقة f' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
- $f'(x)=2x$
- $f'(x)=2x+1$
- $f'(x)=2x-1$

21 (C_f) المنحنى الممثل لدالة f المعرفة على $[-\sqrt{3};2]$.



- المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا واحدا
- $f'(-1)=0$.
- من أجل كل x من $[-1;2]$: $f'(x)\geq 0$.

تمارين تطبيقـيـة

العدد المشتق لدالة f عند a

أحسب العدد المشتق للدالة f عند القيمة a في التمرينين 22 ، 23

22
1) $f: x \mapsto x^2$ ؛ $a=0$.
2) $f: x \mapsto -3x+5$ ؛ $a=3$.
3) $f: x \mapsto 3x^2+4$ ؛ $a=-2$

23
1) $f: x \mapsto -\frac{1}{x}$ ، $a=-1$
2) $f: x \mapsto \frac{3}{x}$ ، $a=1$
3) $f: x \mapsto \frac{1}{2x}$ ، $a=-3$
4) $f: x \mapsto \sqrt{2x}$ ، $a=4$
5) $f: x \mapsto \sqrt{-3x}$ ، $a=-1$
6) $f: x \mapsto 3-\sqrt{x}$ ، $a=\frac{1}{4}$

24 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :
$f(x)=4x-6$ وليكن h عدد حقيقي غير معدوم .
1) عين نسبة تزايد الدالة f بين العددين -1 و $-1+h$.
2) استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل -1 ، وعين $f'(-1)$.
3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل 0 ؟

25 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=x^3$.
1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h :
$$\frac{(2+h)^3-8}{h}=h^2+6h+12$$
2) استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 2 ، وعين $f'(2)$.

26 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :
$$f(x)=x^3-6x^2+4x-2$$
1) ليكن h عدد حقيقي غير معدوم ، أحسب
$f(2+h)-f(2)$
2) بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 ؛ ما هي قيمة $f'(2)$ ؟

27 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+1$.
برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 ، وعين $f'(2)$.

28 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :
$f(x)=3x-x^2$. بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند -1 وعين $f'(-1)$.

29 بين أن الدالة $f: x \mapsto x^2-5x+3$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ، تقبل الاشتقاق عند 3 و أحسب عددها المشتق .

30 بين أن الدالة $f: x \mapsto \frac{-4}{x}$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ، تقبل الاشتقاق عند -2 و أحسب عددها المشتق .

31 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ :
$f(x)=\frac{1}{x+1}$.
برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 ، وعين العدد المشتق للدالة f عند 2 .

32 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ :
$f(x)=3+\frac{1}{x+1}$.
برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 ، وعين العدد المشتق للدالة f عند 2 .

33 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـِ :
$f(x)=\frac{x}{x-2}$.
1) برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 3 ، وعين العدد $f'(3)$.
2) أحسب $f'(5)$.
3) أحسب $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
4) أحسب $f'\left(\sqrt{3}\right)$.
5) أحسب $f'(0)$.

34 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ :

$f(x)=1-\dfrac{x}{x-2}$.

برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل 3 ، وعين العدد $f'(3)$.

35 لتكن الدالة f المعرفة على $[-3\,;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\sqrt{3+x}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h حيث $h>-4$ لدينا : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h}$.

2) بين أن : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

3) استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 1 ، وعين $f'(1)$.

36 لتكن الدالة f المعرفة على $[2\,;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\sqrt{x-2}$.

برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل 7 ، وعين العدد $f'(7)$.

37 لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty\,;1]$ بـ :

$f(x)=\sqrt{1-x}$.

برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل -3 ، وعين العدد $f'(-3)$.

38 استعمل التعريف لحساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة من الحالات المقترحة التالية :

1) $f(x)=2x-7$ و $a=3$ ؛ ثم $a=-2$

2) $f(x)=-3x-1$ و $a=1$ ؛ ثم $a=-\sqrt{2}$

3) $f(x)=x^2-3$ و $a=-1$.

4) $f(x)=x^3+1$ و $a=0$.

5) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x$ و $a=2$.

39 استعمل التعريف لحساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة من الحالات المقترحة التالية :

1) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ و $a=-2$.

2) $f(x)=\dfrac{-1}{2x}$ و $a=\dfrac{1}{2}$.

3) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ و $a=-3$.

4) $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ و $a=-2$ ؛ ثم $a=3$

5) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ و $a=2$ ؛ ثم $a=-3$

40 استعمل التعريف لحساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة من الحالات المقترحة التالية :

1) $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $a=4$.

2) $f(x)=\sqrt{2x+5}$ و $a=2$.

3) $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $a=-2$.

4) $f(x)=\sqrt{3-2x}$ و $a=-11$.

5) $f(x)=\sqrt{-x}$ و $a=-4$.

التقريب التآلفي لدالة f عند a

41 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أحسب $f(a+h)$ بدلالة العدد الحقيقي h ، ثم استنتج العدد المشتق للدالة f من أجل a .

1) $f:x\mapsto x^2+2$ ؛ $a=6$ ثم $a=0$.

2) $f:x\mapsto x^2+x-1$ ؛ $a=2$ ثم $a=-\dfrac{1}{2}$.

3) $f:x\mapsto -3x^2+6x-5$ ؛ $a=1$ ثم $a=0$.

4) $f:x\mapsto x^3+2x-5$ ؛ $a=0$ ثم $a=\sqrt{2}$.

5) $f:x\mapsto x^3-3x^2+2$ ؛ $a=-1$ ثم $a=2$.

42 الدالة $f:x\mapsto x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

1) أحسب العدد المشتق للدالة f من أجل القيمة 3 .

2) استنتج أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(3+h)$ من أجل القيم الصغيرة للعدد $|h|$.

43 الدالة $f:x\mapsto x^2+2$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

1) أحسب العدد المشتق للدالة f من أجل القيمة -1 .

2) استنتج أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(h-1)$ من أجل القيم الصغيرة للعدد $|h|$.

44 1) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+h)^2$ عندما ينتهي h إلى 0 .

2) عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$(2{,}04)^2$ ؛ $(1{,}98)^2$ ؛ $(2{,}001)^2$.

تمارين تطبيقـــية

45 1) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\frac{1}{3+h}$ عندما يؤول h إلى 0 .

2) باستعمال هذا التقريب جد قيمة تقريبية لكل من الأعداد : $\frac{1}{3,02}$ ؛ $\frac{1}{2,99}$ ؛ $\frac{1}{3,1}$.

46 1) جد أحسن تقريب تآلفي للعبارة $(1+h)^3$ لما h يقترب من 0 .

2) استنتج قيمة مقربة لكل من العددين : $(1,04)^3$ ؛ $(0,96)^3$.

47 1) جد أحسن تقريب تآلفي للعبارة $\sqrt{5+h}$ عندما ينتهي h إلى 0 .

2) استنتج قيمة مقربة لكل من الأعداد : $\sqrt{5,01}$ ؛ $\sqrt{4,97}$ ؛ $\sqrt{4,83}$.

48 f تقبل الاشتقاق عند كل قيمة a من المجموعة $\mathbb{R}$ حيث أن : $f(2)=3$ ، $f'(2)=4$ و $f'(2,1)=2$

1) باستعمال أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند 2 ، عين قيمة مقربة للعدد $f(2,1)$.

2) باستعمال أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند $2,1$ ، عين قيمة مقربة للعدد $f(2,2)$.

معادلة المماس

في التمارين من 49 إلى 57 ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

49 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و A نقطة من منحنيها (C) .

في كل حالة من الحالات الآتية ، أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة A والذي معامل توجيهه هو a

1) $A(2\,;0)$ و $a=1$ 2) $A(-1\,;3)$ و $a=-2$

3) $A(-2\,;3)$ و $a=\frac{3}{2}$ 4) $A(2\,;\sqrt{2})$ و $a=\sqrt{2}$

50 باستعمال التعريف للعدد المشتق ، عين معامل التوجيه لمماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، ثم أكتب معادلة له ، في كل حالة من الحالات التالية:

1) معادلة (C) هي : $y=\frac{2x^2}{5}$ ، و $x_0=3$

2) معادلة (C) هي : $y=-x^2+4$ ، و $x_0=2$

3) معادلة (C) هي : $y=x^2-3x+2$ ، و $x_0=1$

4) معادلة (C) هي : $y=\frac{x-1}{3x}$ ، و $x_0=-2$

51 $y=x^2-2x$ هي معادلة للمنحني (C) . أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

52 $y=\frac{-4}{x}$ هي معادلة للمنحني (C) . أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

53 $y=2-\frac{1}{2}x^2$ هي معادلة للمنحني (C) .

برهن أن مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1، يقطع محور الفواصل عند النقطة $B\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$.

54 (C) و (D) منحنيان معادلتيهما على الترتيب : $y=x^2$ و $y=-4x-4$.

1) أدرس تقاطع المنحنيين (C) و (D) .

2) استنتج أن (D) هو المماس لـ (C) عند نقطة يطلب إحداثياها .

55 (C) و (D) منحنيان معادلتيهما على الترتيب : $y=3x^3+2x^2-7x-6$ و $y=2x+2$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :

$$3x^3+2x^2-9x-8=(x+1)(ax^2+bx+c)$$

2) أثبت أن المنحنيين (C) و (D) لهما نقطة مشتركة ترتيبها معدوم .

3) اثبت أن (D) مماس للمنحني (C) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

56 (C) منحن يشمل النقطة $A(2\,;4)$ و (Δ) مستقيم معادلته $y=3x+5$.

أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي يوازي المستقيم (Δ) .

57 (C) منحن يشمل النقطة $A(-1\,;-3)$.

أكتب معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي شعاع توجيهه $\vec{i}$.

الدوال المشتقة

58 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x-1$.

1) من أجل كل عدد حقيقي a ، برر قابلية اشتقاق الدالة f عند a وعين $f'(a)$.

2) ليكن m و p عددين حقيقيين. عين الدالة المشتقة للدالة التآلفية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $x \mapsto mx+p$.

59 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3$.

1) باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة f عند قيمة a ، بين أن الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f'(x)=3x^2$.

2) أكتب معادلة لمماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

60 لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$$

1) بين أن الدالة g تقبل الاشتقاق على المجموعة $\mathbb{R}$ وعين دالتها المشتقة.

2) لتكن الدالة f التي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(t)=2-t$ و $f(0)=1$. نضع $\varphi=f-g$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي a ، ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h لدينا :

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}=$$
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+a-2+0,5h$$

ب) استنتج أن الدالة φ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ج) برر أن الدالة φ ثابتة .

61 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-5x+4$ و $(\mathcal{P})$ منحنيها الممثل في المعلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن دالتها المشتقة معرفة بـ : $f'(x)=2x-5$.

2) أكتب معادلة لمماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند نقطته $E(0\,;4)$.

3) هل توجد نقطة M من $(\mathcal{P})$ يكون مماسه عندها موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}x$.

4) a عدد حقيقي . أكتب معادلة لمماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند النقطة ذات الفاصلة a .

5) استنتج أن المنحني $(\mathcal{P})$ يقبل مماسين كل منهما يشمل مبدأ المعلم O .

62 عين أكبر مجموعة من الأعداد الحقيقية بحيث تكون الدالة f قابلة الاشتقاق على هذه المجموعة ، ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto 2x^3+5x^2-x+1$.

2) $f: x \mapsto x^2(\cos\frac{\pi}{3})-x+\sin\frac{\pi}{6}$.

3) $f: x \mapsto \sqrt{x-1}$.

4) $f: x \mapsto \frac{2x^3+5x^2}{x^2+1}$.

63 بين أن الدالة $f: x \mapsto x\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $f'(x)$.

64 باستعمال النظريات على المشتقات أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto 3x^2-4x+1$.

2) $f: x \mapsto \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+5$.

3) $f: x \mapsto \frac{3x^2+12x+1}{6}$.

4) $f: x \mapsto \sqrt{3}x^4-\sqrt{2}x^3-\sqrt{6}x^2+3x-5$.

65 باستعمال النظريات على المشتقات أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto \frac{-2}{x}$.   2) $f: x \mapsto \frac{-x+1}{x+2}$.

3) $f: x \mapsto 2x+1-\frac{x+1}{x-3}$.

4) $f: x \mapsto \frac{2x^2+3x-1}{x^2-3}$.

66 نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=x^3$
أحسب $f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$ حيث g الدالة المعرفة بالحالات المقترحة التالية : $g(x)=f(x-3)$ ؛ $g(x)=f(2x+5)$ ؛ $g(x)=f(-3x+2)$

67 نعتبر الدالتين f و g حيث : $f(x)=\sqrt{x}$ و g الدالة المعرفة بالحالات المقترحة أدناه .
1) عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g .
2) عين مجموعتي قابلية الاشتقاق للدالتين f و g .
3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$.
$g(x)=f(x-1)$ ؛ $g(x)=f(2x+5)$ ؛ $g(x)=f(-3x+2)$.

68 باستعمال النظريات على المشتقات أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:
1) $f:x\mapsto(3x-2)^2$.
2) $f:x\mapsto 3\sqrt{x}-2$.
3) $f:x\mapsto\sqrt{x-3}$.
4) $f:x\mapsto\sqrt{2-3x}$.
5) $f:x\mapsto(2x-3)\sqrt{x}$.
6) $f:x\mapsto(x^2+2x-3)\sqrt{-x+3}$.

69 باستعمال النظريات على المشتقات أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:
1) $f:x\mapsto\cos(3x-2)$.
2) $f:x\mapsto\sin(3x-2)$.
3) $f:x\mapsto\sin x\times\cos x$
4) $f:x\mapsto\sin(x-2\pi)\times\cos(x+\pi)$.
5) $f:x\mapsto\cos^2 3x$.

70 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :
$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x+1} .$$
عين أكبر مجموعة بحيث تكون الدالة f قابلة للاشتقاق ، ثم أحسب دالتها المشتقة ؛ استنتج قيمة مقربة لكل من العددين $f(1,02)$ و $f(0.96)$.

71 (C_f) منحنى الدالة f الممثل في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، ω نقطة من (C_f) فاصلتها x_0 . في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أكتب معادلة لمماس المنحني (C_f) عند النقطة ω .
1) $f:x\mapsto x^2+3x+4$ و $x_0=0$.
2) $f:x\mapsto 2x^3-x^2+3x$ و $x_0=-1$.
3) $f:x\mapsto\dfrac{x+3}{1-2x}$ و $x_0=1$.
4) $f:x\mapsto\sqrt{2-x}$ و $x_0=-2$.

72 $y=-x^2+3$ و $y=\dfrac{2}{x}$ معادلتا المنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب الممثلين في معلم متعامد ومتجانس.
1) بين أنه يوجد مستقيم (Δ) يمس المنحنيين في نقطة A يطلب تعيين إحداثييها.
2) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) .
3) أدرس وضعية كل من (C_1) و (C_2) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

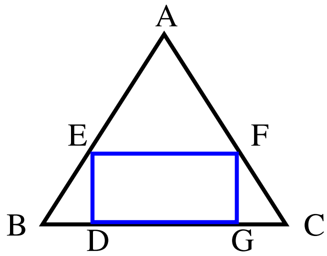
73 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، (C_f) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=\dfrac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$ حيث α ، β عددان حقيقيان .
1) أحسب $f'(x)$.
2) عين α و β حتى يكون المستقيم ذو المعادلة $y=4x+3$ ، مماسا للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

74 f الدالة المعرفة على $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$ بـ :
$f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{1}{3-x}$ حيث α ، β عددان حقيقيان
عين α و β حتى يتحقق الشرطان التاليان :
$f(2)=1$ و $f'(2)=0$.

75 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، (C_f) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=mx^3-x^2+3$ حيث m وسيط حقيقي.
ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد المماسات للمنحني (C_f) ، ذات معامل التوجيه معدوم .

مسائل

76 ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه m، حيث $m \in \mathbb{R}_+^*$ ؛ يحصر داخل هذا المثلث ، مستطيلا $DEFG$ كما هو في الشكل أدناه . نضع $BD = x$



1) عين x حتى تكون للمستطيل أكبر مساحة ممكنة .

2) في هذه الحالة بين أن مساحة المستطيل $DEFG$ هي نصف مساحة المثلث ABC ؛ ثم عين أحسن تقريب للمساحتين من أجل $m = 4,002$.

77 $y = \frac{-4}{x}$ هي معادلة القطع الزائد (H) الممثل في معلم متعامد ومتجانس ، M نقطة من (H) فاصلتها m حيث m عدد حقيقي غير معدوم .

A و B نقطتان من محوري المعلم على الترتيب حيث M هي منتصف القطعة $[AB]$.

1) عين إحداثيات النقطتين A و B بدلالة m .

2) بين أن المستقيم (AB) هو مماس للمنحنى (H) .

78 1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ بـ:

$$f(t)=\sqrt{25-4t^2}$$

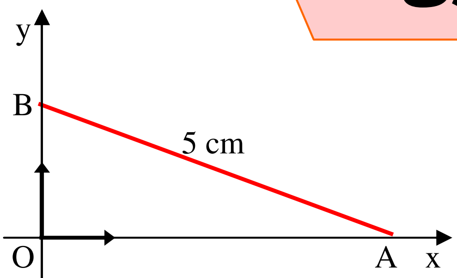
من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h نضع :

$$T(h) = \frac{f(\frac{3}{2}+h)-f(\frac{3}{2})}{h}$$

أ) برهن أن : $T(h)=\frac{-12-4h}{\sqrt{16-12h-4h^2}+4}$

ب) استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل القيمة $\frac{3}{2}$.

2) مسطرة $[AB]$ طولها $5cm$ لها طرفين يتحركان على نصفي المحورين $[Ox)$ و $[Oy)$ لمعلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي $1cm$) .



الطرف A يتحرك بسرعة ثابتة قدرها $2cm/s$.

ما هي السرعة اللحظية للطرف الآخر B لما يكون الطرف A على بعد $3cm$ من المبدأ O للمعلم ؟

79 نفرض أن الأرض عبارة عن كرة قطرها R . قيمة الجاذبية الأرضية تعطى على ارتفاع x من سطح الأرض بـ : $g = g_0 \times \frac{R^2}{(R+x)^2}$ ، حيث g_0 قيمة الجاذبية الأرضية على مستوى سطح البحر . ($g_0 \simeq 9,8 ms^{-2}$).

1) بين أن : $g = g_0\times \frac{1}{1+\frac{2x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2}$.

2) من أجل قيم قريبة من الصفر للعدد الحقيقي h نضع : $\frac{1}{1+h}\simeq 1-h$ ، استنتج أن : $g \simeq g_0\left(1-\frac{2x}{R}\right)$

3) أحسب g علما أن $x = 4800m$ علما أن $R \simeq 6370000m$

80 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (C_f) المنحنى ذي المعادلة $y=x^3$ ، و M نقطة منه فاصلتها a حيث a عدد حقيقي .

(T_a) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة M .

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x .

$$x^3-3a^2x+2a^3=(x-a)(x^2+ax-2a^2)$$

2) أدرس حسب قيم a الوضع النسبي لـ (C_f) و (T_a) .

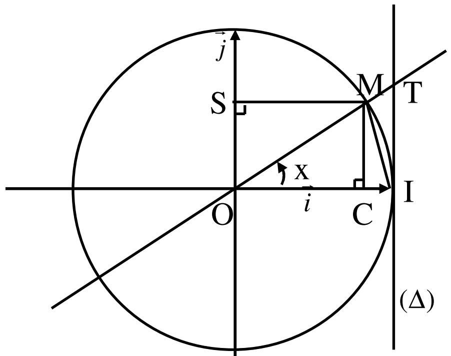
81 1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، نعتبر النقط A ، $M_1(x_0 ; y_0)$ ، $M_2(-x_0 ; y_0)$ حيث A فاصلتها معدومة.

أثبت أن مجموع معاملي التوجيه المستقيمين (AM_1) و (AM_2) معدوم .

2) f دالة زوجية تقبل الاشتقاق من أجل القيمة x_0.

قارن $f'(x_0)$ و $f'(-x_0)$.

82



في هذا الرسم ، M نقطة من الدائرة المثلثية المرفقة بمعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ، C و S المسقطان العموديان للنقطة M على محوري المعلم .

T نقطة تقاطع المستقيم (OM) مع المماس (Δ) للدائرة في النقطة $I(1\,;0)$.

1) أحسب بدلالة x الطول IT .

2) أحسب المساحات A_1 و A_2 للمثلثين OIM و OIT على الترتيب بدلالة x ، ثم أحسب مساحة A لقطاع القرص OIM .

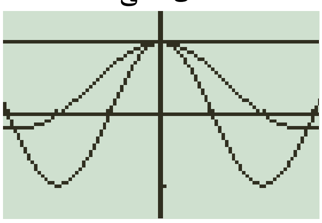
3) بملاحظة أن : $A_1 < A < A_2$

– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن : $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$.

– استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن : $x.\cos x \leq \sin x \leq x$.

استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. وبطريقة مماثلة تحقق من صحة النتيجة في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$

4) في الحاسبة البيانية بتعديل اللمسة MOD إلى RAD و في اللمسة ZOOM إلى Ztrig 7 نحصل على الشاشة التمثيلات البيانية للدوال :



$g : x \mapsto \cos x$

$h : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

$t : x \mapsto 1$

أعط تخمينا حول $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

5) أحسب الدالة المشتقة للدالة $f : x \mapsto \sin x$ ثم استنتج $f\,'(0)$ و $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

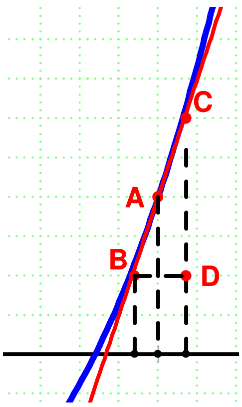
83 المطلوب طريقتين مختلفتين لحل المسألة.

نقذف إلى الأعلى عموديا من الأرض كرة ، حيث تمتد إلى مسافة $d(t)$ (الوحدة المتر) في اللحظة t (الوحدة الثانية) وتعطى العلاقة : $d(t) = -5t^2 + 60t$

1) عين القيمة الحدية العظمى للارتفاع التي يمكن أن تبلغه هذه الكرة ، وفي أي لحظة تكون الكرة في أعلى نقطة ؟

2) ما هي السرعة التي تكون فيها الكرة في أعلى نقطة ؟

84 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر (C_f) منحنى دالة f قابلة للاشتقاق عند فاصلة x_0 النقطة A ، (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A .



B و C نقطتان من (C_f) فاصلتاهما $x_0 - h$ و $x_0 + h$ على الترتيب حيث : $h > 0$ وقرب من الصفر .

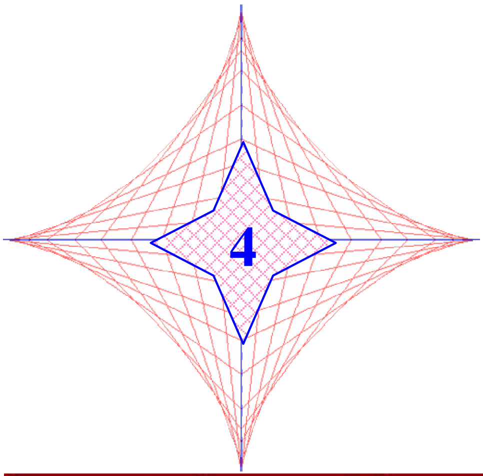
D نقطة حيث (BD) يعامد (CD) .

1) أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD (شبه مثلث قائم) ، بدلالة $f\,'(x_0)$ و h .

2) أحسب هذه القيمة من أجل $h = 0.03$ ومعامل توجيه المستقيم (T) هو 9 .

85 1) f دالة زوجية وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ أثبت أن دالتها المشتقة $f\,'$ هي دالة فردية.

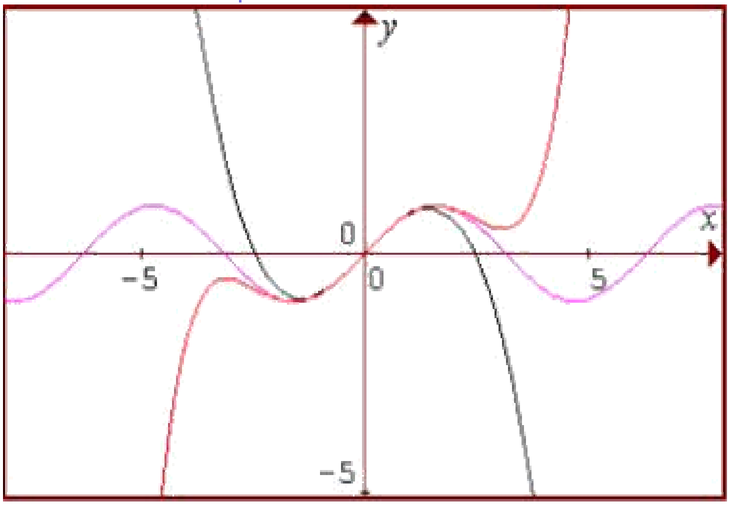
2) نعتبر الدالة $g : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ؛ أكتب معادلة لمماس منحنى الدالة g عند نقطة ذات الفاصلة 1 ثم استنتج معادلة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 .



تطبيقات الإشتقاقية

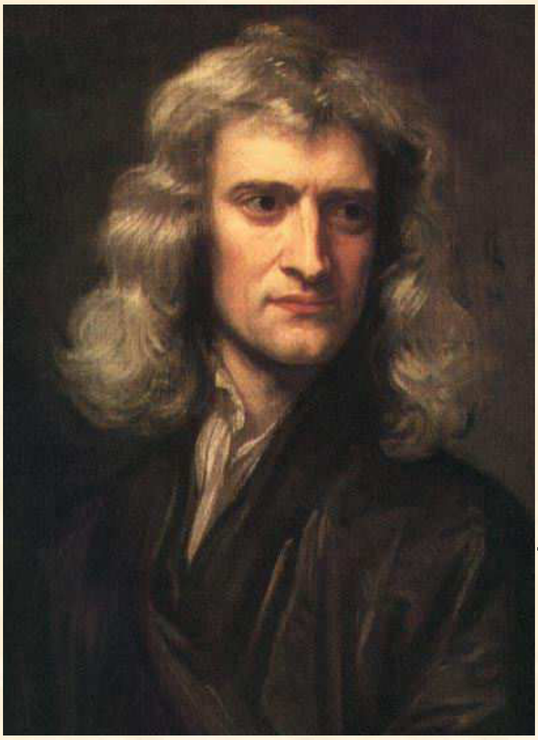
الكفاءات المستهدفة

- تعيين اتجاه تغير دالة.
- استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة و دوال صماء.



ولد **إسحاق نيوتن** (Sir Isaac Newton) سنة 1643 بوولسثروب في مقاطعة لينكنشاير (انجلترا).كان فيلسوفا رياضياتيا و فيزيائيا . قدّم نيوتن ورقة علمية وصف فيها قوة الجاذبية الكونية ومهد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسيكية عن طريق قوانين الحركة. يشارك نيوتن ليبنيز الحق في تطوير علم الحساب التفاضلي والمتفرع من الرياضيات.

نيوتن كان الأول في برهنة أن الحركة الأرضية وحركة الأجرام السماوية تُحكم من قبل القوانين الطبيعية ويرتبط إسم العالم نيوتن بالثورة العلمية. يرجع الفضل لنيوتن بتزويد القوانين الرياضياتية لإثبات نظريات كيبلر والمتعلقة بحركة الكواكب. توفي سنة 1727.



إسحاق نيوتن 1643 / 1727

أنشطة

نشاط أول

f ، g ، h و k دوال معرفة كما يلي :

$f : x \mapsto x+5$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$g : x \mapsto -2x+3$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$h : x \mapsto x^2$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$k : x \mapsto \frac{1}{x}$ معرفة على $]0,+\infty[$.

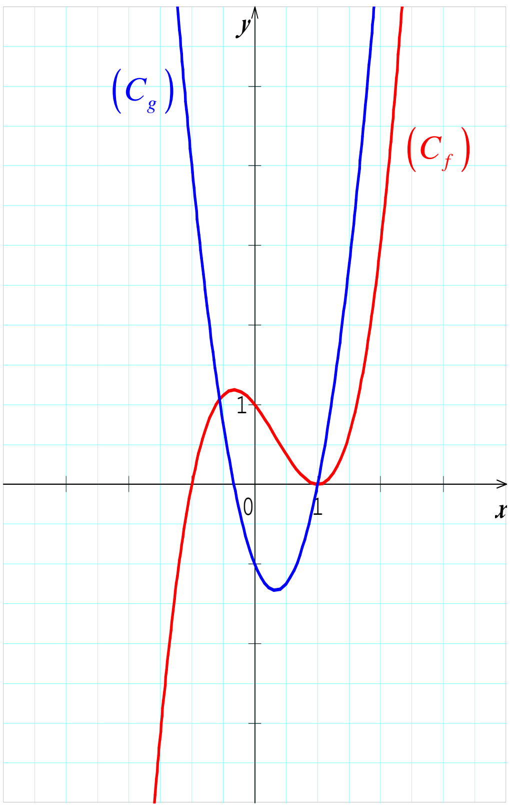
1) ذكر بتغيرات f ، g ، h و k .

2) عين الدوال f' ، g' ، h' و k' الدوال المشتقة للدوال f ، g ، h و k على الترتيب .

3) عين إشارات الدوال f' ، g' ، h' و k' على التوالي .

4) تأكد في كل حالة أنه إذا كانت الدالة متزايدة تماما على مجال فإن مشتقتها موجبة تماما على هذا المجال ، و أنه إذا كانت الدالة متناقصة تماما على مجال فإن مشتقتها سالبة تماما على هذا المجال.

نشاط ثان



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ و ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الرسم المقابل).

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ و ليكن (C_g) رسمها البياني في المعلم السابق $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الرسم المقابل).

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$$g(x) = 0$$

2) من الرسم المقابل استنتج تغيرات الدالة f .

3) من الرسم المقابل عين إشارة الدالة g .

4) عين على $\mathbb{R}$ الدالة f' مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$.

5) أدرس إشارة f' على $\mathbb{R}$.

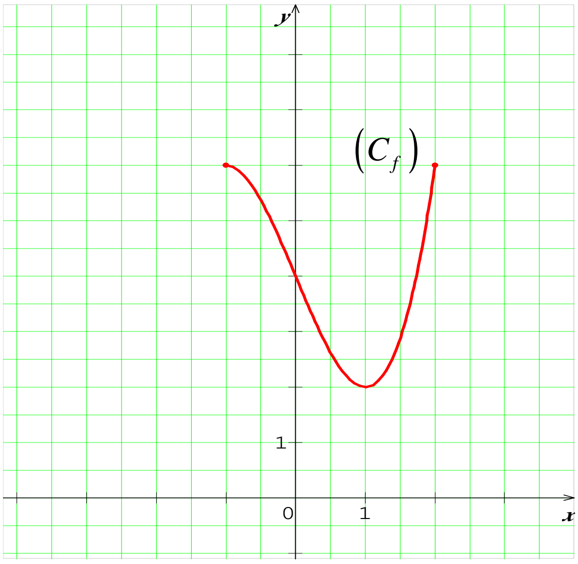
6) ما هو التخمين الذي يمكن أن تدلي به فيما يخص العلاقة الموجودة بين إشارة المشتقة و اتجاه تغير الدالة f .

نشاط ثالث

الشكل المقابل يمثل المنحنى (C_f) الرسم البياني لدالة f

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الدالة f معرفة على المجال $[-1,2]$.



1) عين فواصل النقط M من المنحنى (C_f) التي يكون من أجلها معامل توجيه المماس لـــ (C_f) في M موجبا تماما .

2) عين فواصل النقط M من المنحنى (C_f) التي يكون من أجلها معامل توجيه المماس لـــ (C_f) في M سالبا تماما .

3) عين المجال من $]-1,2[$ الذي تكون فيه الدالة المشتقة f' للدالة f موجبة تماما.

4) عين المجال من $]-1,2[$ الذي تكون فيه الدالة المشتقة f' للدالة f سالبة تماما.

5) ما هي نقط المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا لحامل محور الفواصل ؟ ما هي قيم العدد المشتق عند فواصل هذه النقط ؟

نشاط رابع

الهدف من هذا النشاط هو حصر دالة بطريقتين .

f دالة معرفة على المجال $[-1\,,\,5]$ كما يلي : $f(x)=2x^2-4x+6$

<u>الطريقة الأولى :</u>

باستعمال خواص المتباينات عين حصرا للعدد $f(x)$.

<u>الطريقة الثانية :</u>

ليكن x_1 و x_2 عددين مختلفين من المجال $[-1\,,\,5]$ نضع $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

1) أثبت أن $T=2(x_1+x_2-2)$.

2) عين إشارة T على المجال $[-1\,,\,1]$.

3) عين إشارة T على المجال $[1\,,\,5]$.

4) أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1\,,\,5]$.

5) استنتج حصرا للعدد $f(x)=2x^2-4x+6$ على المجال $[-1\,,\,5]$.

6) قارن بين نتائج الطريقتين .

تطبيقات الإشتقاقية.

إتجاه تغير دالة:

مبرهنة:(تقبل بدون برهان) لتكن f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت f' موجبة تماما(يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f.
- إذا كانت f' سالبة تماما(يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f.
- إذا كانت f' معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f.

ملاحظة: إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما و إما متناقصة تماما على مجال D_f نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f .

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f : x \mapsto -x^3 + 2$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' حيث : $f' : x \mapsto -3x^2$.

الدالة f' سالبة تماما على $\mathbb{R}^*$ و تنعدم في النقطة المعزولة 0 إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

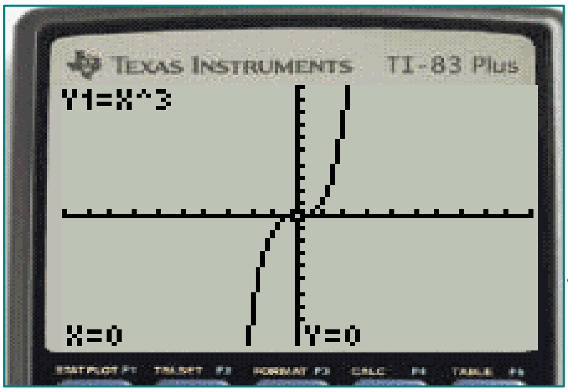
القيم الحدية المحلية لدالة:

مبرهنة:(تقبل بدون برهان) لتكن f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة .

- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I يشمل c تقبل فيه f قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية .

ملاحظات:
- يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I .
- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I فإن الرسم البياني للدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها c .

تعليق: في صورة شاشة الآلة TI-83 Plus المقابلة، الرسم يمثل الدالة $f : x \mapsto x^3$. مشتقتها $f' : x \mapsto 3x^2$. الدالة f' تنعدم عند 0 و لا تغير الإشارة . و $f(0)=0$.
0 ليست قيمة حدية محلية للدالة f .



طرائق

تمرين محلول 1

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) عين مجالات من $\mathbb{R}$ تقبل فيها f قيما حدية محلية يطلب تعيينها

طريقة: لدراسة إتجاه تغيرات دالة يمكن أن نعين إشارة دالتها المشتقة بعد التأكد من وجودهاو حسابها ثم نلخص كل النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات .

حــــل:

1)الدالة f دالة كثيرة حدود فهي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. لتكن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=x^2-x-2$ و هي ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=9$.

-1 و 2 هما جذران له ، يمكن إذن استنتاج إشارته وفق الجدول الآتي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ على المجال $]-\infty,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,-1]$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]-1,2[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1,2[$.
- $f'(x)>0$ على المجال $]2,+\infty[$ و $f'(2)=0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$.

و منه جدول التغيرات الآتي.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

$f(-1)=\frac{13}{6}$ و $f(2)=-\frac{7}{3}$

2) من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f' تنعدم عند -1 مغيرة إشارتها مثلا على المجال $[-3,0]$ إذن

$f(-1)=\frac{13}{6}$ قيمة حدية محلية للدالة f عند -1 على المجال $[-3,0]$.

بنفس الطريقة $f(2)=-\frac{7}{3}$ قيمة حدية محلية للدالة f عند 2 على المجال $[1,4]$ مثلا .

حصر دالة:

نتائج لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$
$f(a) \le f(x) \le f(b)$
- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$
$f(b) \le f(x) \le f(a)$

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f : x \mapsto x^2+2x-3$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' هي : $f' : x \mapsto 2x+2$.

الدالة f' سالبة تماما على $[-3,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3,-1]$.

الدالة f' موجبة تماما على $]-1,1]$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1,1]$.

جدول التغيرات:

x	-3		-1		1
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

من أجل كل x من المجال $[-3,-1]$ ، $f(-1) \le f(x) \le f(-3)$ أي $-4 \le f(x) \le 0$

من أجل كل x من المجال $[-1,1]$ ، $f(-1) \le f(x) \le f(1)$ أي $-4 \le f(x) \le 0$

عنصرحاد من الأعلى – عنصر حاد من الأسفل :

تعريف: لتكن دالة f معرفة على مجال D_f .

- يسمى عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأعلى $(Majorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x) \le k$.
- يسمى عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأسفل $(Minorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x) \ge k$.

بالنسبة للمثال السابق الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f : x \mapsto x^2+2x-3$.

0 عنصر حاد من الأعلى و -4 عنصر حاد من الأسفل.

ملاحظة: • القيمة الحدية الكبرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأعلى وهو أصغر العناصر الحادة من الأعلى.

• القيمة الحدية الصغرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأسفل وهو أكبر العناصر الحادة من الأسفل.

تمرين محلول 2

لتكن الدالة f المعرفة على $[-5,0]$ بـ: $f(x)=2x^3-9x^2+12x-100$.

- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[-5,0]$.
- عين عنصرا حادا من الأعلى و عنصرا حادا من الأسفل للدالة f على المجال $[-5,0]$.

حـــل: • الدالة f دالة كثير حدود فهي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. لتكن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=6x^2-18x+12$ و هي ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه المختصر $\Delta'=9$. 1 و 2 هما جذرا ثلاثي الحدود ، فهما لا ينتميان إلى مجال الدراسة $[-5,0]$. ونستنتج أن على المجال $[-5,0]$ الدالة المشتقة f' للدالة f موجبة تماما ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-5,0]$. و منه جدول التغيرات:

x	-5	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-635 ↗	-100

• من جدول التغيرات يتبين : من أجل كل قيمة x من المجال $[-5;0]$ فإن $f(x)\leq -100$.

إذن -100 هو عنصرا حادا من الأعلى و هو أصغر القيم الحادة من الأعلى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

و منه -100 هو القيمة الحدية الكبرى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

• من جدول التغيرات يتبين : من أجل كل قيمة x من المجال $[-5,0]$ فإن $f(x)\geq -635$.

إذن -635 هي قيمة حادة من الأسفل و هي أكبر القيم الحادة من الأسفل للدالة f على المجال $[-5,0]$.

و منه -635 هو القيمة الحدية الصغرى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

تمرين محلول 3

لتكن الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$.

- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,1]$.
- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.

طريقة: لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على مجال $[a,b]$. نبين أن الدالة f رتيبة على المجال $[a,b]$ و أن $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين .
$f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين تقر وجود x_0 و الرتابة تقر واحديته.

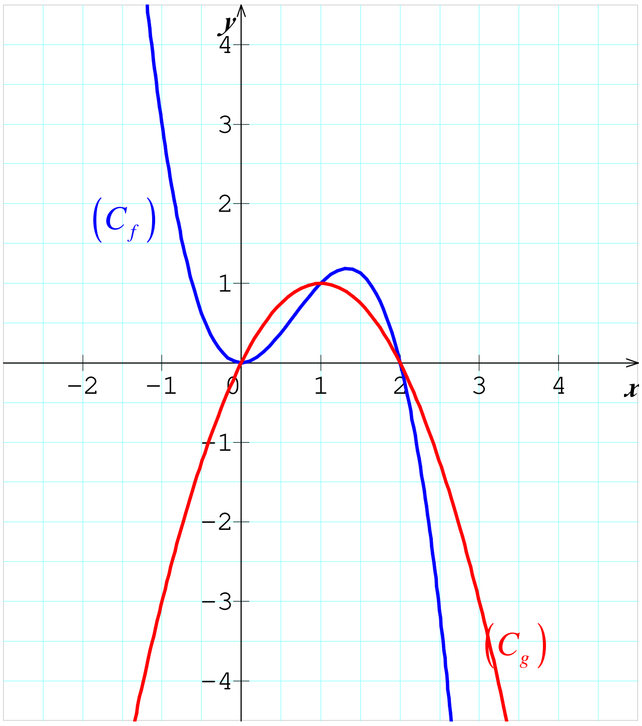
حـــل: • الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0,1]$ و دالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=3x^2-6x+4$.

الدالة f' موجبة تماما على $[0,1]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$. $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ إذن $f(0)$ و $f(1)$ من إشارتين مختلفتين ونستنتج أن المعادل $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.

أعمال موجهة

المقارنة بين دالتين:

مثال أول باستعمال راسم منحنيات :



باستعمال راسم منحنيات تحصلنا في الشكل المقابل على (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x)=-x^2+2x$ و $f(x)=-x^3+2x^2$

1) عين بيانيا إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g).

2) عين بيانيا الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

3) أدرس إشارة $[f(x)-g(x)]$ على $\mathbb{R}$ بدون استعمال الرسم البياني.

4) هل يمكن المقارنة بين $f(x)$ و $g(x)$ بدون اللجوء إلى (C_f) و (C_g)؟

مثال ثاني :

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث أن : $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$. ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين معادلة للمماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

2) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y=x-4$.

بين أن $f(x)-(x-4)=(x-1)^3$.

3) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

تطبيق:

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$x\mapsto f(x)=x^3-x^2+4x-3$ و $g\mapsto g(x)=x^3$ ليكن (C_f) الرسم البياني للدالة f و (C_g) الرسم البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

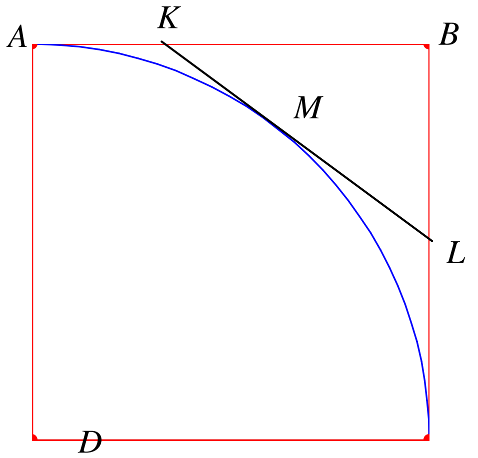
1) أثبت أن الدالتين f و g متزايدتان تماما على $\mathbb{R}$.

2) عين إشارة $[f(x)-g(x)]$.

3) إستنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

مسائل الإستمثال:

مسألة أولى:



لتكن. $ABCD$ مربع من المستوي حيث $AB=2$

الدائرة (Γ) التي مركزها D و نصف قطرها 2

لتكن M نقطة من القوس $\overset{\frown}{AC}$، مختلفة عن A

ومختلفة عن C. المماس (T) للدائرة (Γ) عند النقطة M

يقطع القطعة $[AB]$ في K و القطعة $[BC]$ في L.

نريد تعيين وضعية M حتى يأخذ الطول KL أصغر قيمة ممكنة . من أجل هذا نضع :

$LB=y$ و $KB=x$.

1) أثبت أن $KL^2=x^2+y^2$.

2) أثبت أن $KL=4-x-y$. و أن $KL^2=x^2+y^2-8x-8y+2xy+16$.

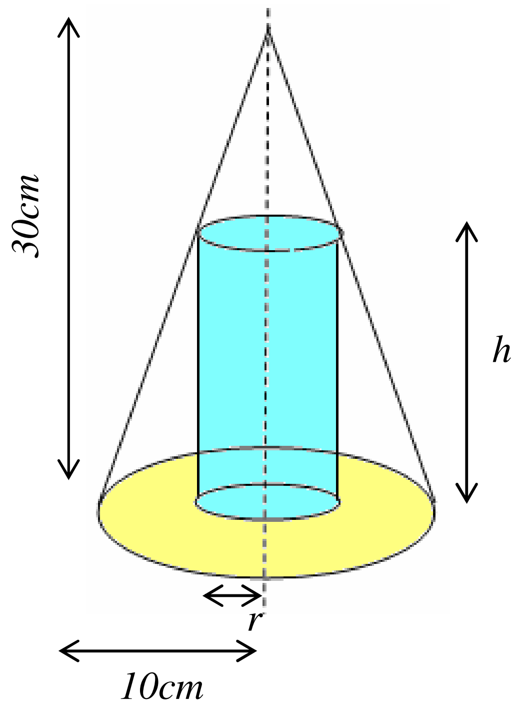
3) استنتج أن $y=\dfrac{4x-8}{x-4}$. استنتج أن $KL=\dfrac{-x^2+4x-8}{x-4}$

5) لتكن الدالة f المعرفة على $[0,2]$ حيث : $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-8}{x-4}$

أدرس تغيرات الدالة f و استنتج أن الطول KL يأخذ أصغر قيمة ممكنة من أجل $x=4-2\sqrt{2}$.

عين عندئذ وضعية M.

مسألة ثانية:



مخروط دوراني ارتفاعه 30cm و نصف قطر قاعدته 10 cm

نريد رسم بداخله أسطوانة دورانية يأخذ حجمها $V(r)$

أكبر قيمة ممكنة . كما هو موضح في الشكل المقابل.

نضع ارتفاع الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r (بــ: cm) .

1) أثبت أن : $h=3(10-r)$.

2) عبّر عن $V(r)$ حجم الأسطوانة بدلالة r .

3) أدرس تغيرات الدالة V .

4) استنتج قيم h و r حتى يأخذ الحجم $V(r)$ أكبر قيمة ممكنة.

مسائل محلولة

الهدف من هذه المسألة هو حل المتراجحة : $\frac{9}{2} \geq \frac{3}{2x} + 3\sqrt{x}$ باستعمال الإشتقاق.

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3}{2x}$.

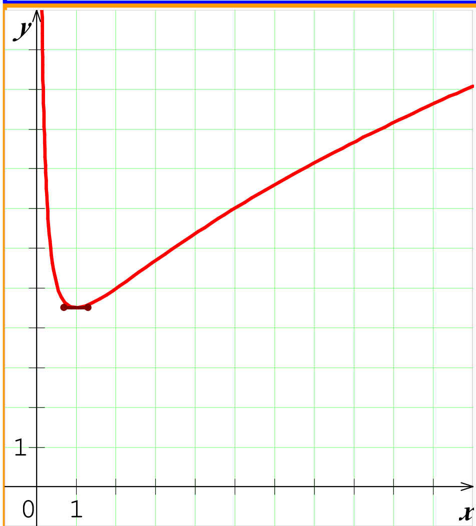
1) أوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) بين أن f قابلة للإشتقاق على D_f . ثم عين دالتها المشتقة f' .

3) بين أن $f'(x) = \frac{3\sqrt{x^3} - 3}{2x^2}$.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) إستنتج أن من أجل كل x من D_f $f(x) \geq \frac{9}{2}$.



1) $D_f =]0, +\infty[$.

2) الدالة f مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$ فهي إذن قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$.

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2}$.

3) نجعل مقام العبارة $\frac{3}{2\sqrt{x}}$ ناطق و نحصل على :

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2x} - \frac{3}{2x^2}$.

نوحد المقامين و المقام الموحد هو $2x^2$ و نحصل على $f'(x) = \frac{3x\sqrt{x} - 3}{2x^2}$

بما أن $x > 0$ فإن $x = \sqrt{x^2}$ ومنه $f'(x) = \frac{3\sqrt{x^3} - 3}{2x^2}$.

4) الدالة $x \mapsto \sqrt{x^3}$ دالة متزايدة على $]0, +\infty[$ لأنها دالة مركبة من الدالة $x \mapsto x^3$ المتزايدة على $]0, +\infty[$ تتبعها الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتزايدة على $]0, +\infty[$. ومنه $u : x \mapsto \sqrt{x^3} - 1$ متزايدة على $]0, +\infty[$ و $u(1) = 0$ و علما أن $2x^2 > 0$ على المجال $]0, +\infty[$ نستنتج أن : $f'(x) < 0$ على $]0, 1[$ و $f'(x) \geq 0$ على $[1, +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{9}{2}$	↗

5) من جدول التغيرات نستنتج أن $\frac{9}{2} \geq \frac{3}{2x} + 3\sqrt{x}$.

شاحنة تقطع مسافة $200km$ بسرعة v مقدرة بـ km/h ، الشاحنة تستهلك: l/h $\left(5+\frac{v^2}{320}\right)$ من الوقود .

ثمن الوقود هو $16\ DA$ للتّر الواحد و يتقاضا السائق أجرتا تقدر بـ $100\ DA$ في الساعة .

1) نسمي t زمن الرحلة .عبر عن t بدلالة v.

2) احسب الكلفة $P(v)$ بدلالة v.

3) ادرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة على $]0,120]$ حيث $f(x)=10x+\frac{36000}{x}$.

4) ما هي سرعة الشاحنة حتى تكون الرحلة أقل تكلفة؟

1) $t=\frac{200}{v}$.

2) $P(v)=\left(5+\frac{v^2}{320}\right)\times\frac{200}{v}\times 16+100\times\frac{200}{v}$.أي $P(v)=10v+\frac{36000}{v}$.

3) $f(x)=10x+\frac{36000}{x}$.

$D_f=]0,120]$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f لأنها مجموع دالتين مرجعيتين : الدالة التآلفية و الدالة مقلوب .

$f'(x)=\frac{10x^2-36000}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة البسط أي إشارة $10x^2-36000$

x	0		60		120
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	0		60		120
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	↘	1200	↗	

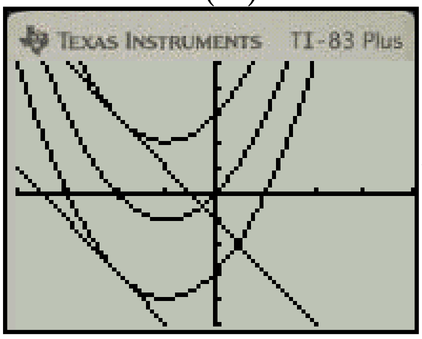
4) من تغيرات الدالة f نستنتج أن الرحلة تكون أقل تكلفة إذا كانت سرعة الشاحنة $60\,km/h$.

دوال لها نفس المشتقة

نعتبر الدوال العددية f، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=x^2+2x+3 \text{ ، } g(x)=x^2+2x-3 \text{ ، } f(x)=x^2+2x$$

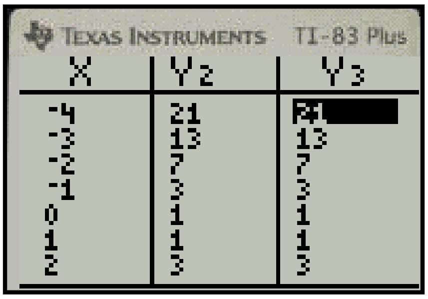
و نعتبر المستقيمين $(D):y=-2x-7$ و $(D'):y=-2x-1$.



1. باختيار نافذة مناسبة و بعد حجز مختلف العبارات مثل على شاشة الآلة الحاسبة البيانية منحنيات الدوال f، g ، h و المستقيمين (D) و (D').
2. عين بيانيا المنحنيات التي تمس المستقيمين (D) و (D') محددا إحداثيات نقط التماس.
3. تحقق جبريا من النتائج السابقة.
4. بدون إجراء حسابات عين مع التبرير معامل توجيه مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة (-2).

التحقق بواسطة الحاسبة البيانية من صحة حساب المشتقة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-2$



1. أحسب $f'(x)$
2. أحجز $f(x)$ في Y_1، $f'(x)$ في Y_2 و $nDeriv(Y_1,X,X)$ في Y_3
3. قارن بين جدولي قيم الدالتين f' و $nDeriv$.

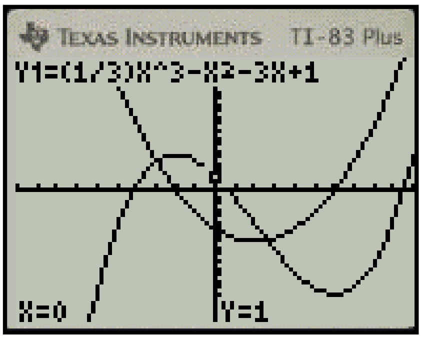
إذا اختلفت القيم الظاهرة أعد حساب المشتقة.

التمثيل البياني للدالة المشتقة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$

نحجز في البداية $f(x)$ في Y_1 ثم نحجز $nDeriv(Y_1,X,X)$ في Y_2

نذكر أنه للحصول على $nDeriv$ نضغط على اللمسة MATH ثم نختار 8.



تطبيق: مثل على شاشة الحاسبة البيانية في كل مرة الدالة f و مشتقتها.

- $f(x)=x^2+x-3$
- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
- $f(x)=2\sqrt{x}+1$.

تطبيقات على المشتقات

أصحيح أم خطأ

1 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=3x-4$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=3x^2+5$ متناقصة تماما على $]-\infty\,;\,-1]$.

3 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=3x^3+12$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

4 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=3x^3+12$ تقبل قيمة حدية على $\mathbb{R}$.

5 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=x^3-3x+5$ تقبل قيمتين حديتين على $\mathbb{R}$.

6 إذا كانت مشتقة الدالة f تنعدم من أجل ثلاث قيم ، فإن الدالة f تقبل ثلاث قيم حدية .

7 إذا كان لمنحنى الدالة f ، مماسا موازيا لمحور الفواصل فإن مشتقة هذه الدالة تنعدم عند قيمة للمتغير .

8 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=x^2-x$ مماس منحنيها الممثل في معلم عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ يقطع محور الفواصل .

9 إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2\,;\,3]$ فإن $f(3)-f(2)>0$.

10 إذا كانت مشتقة الدالة f موجبة تماما على المجال $[-1\,;\,2]$ فإن $f(2)-f(-1)<0$.

11 إذا كانت دالة f تحقق $f(a)-f(b)=0$ فإن f هي دالة ثابتة على المجال $[a\,;\,b]$.

12 إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a\,;\,b]$ حيث $f(a)=f(b)$ فإن الدالة f تقبل على الأقل قيمة حدية على هذا المجال .

13 من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=x^2-2x+1$ إذن: $f(1)$ هي القيمة الحدية للدالة f على $\mathbb{R}$.

14 $f(\alpha)$ هي القيمة الحدية للدالة f على المجال $[1\,;\,3]$ ، إذن مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة α يكون موازيا لمحور الفواصل .

أسئلة متعددة الاختيارات

اختر الجواب المناسب من بين الأجوبة المقترحة.

15 إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a\,;\,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a\,;\,b]$:

1) $f(x)\in[a\,;\,b]$.

2) $f(x)\in[f(a)\,;\,f(b)]$.

3) $f(x)\in[f(b)\,;\,f(a)]$.

16 الدالة f تقبل قيمة حدية على المجال $\mathbb{R}$ من أجل القيمة x_0 ، إذن منحنيها يقبل مماسا عند نقطة ذات الفاصلة x_0 :

- موازيا لمحور الفواصل .
- موازيا لمحور التراتيب .
- مائلا .

17 المعادلة $12x^3+33x-55=0$ تقبل على المجال $[0\,;\,2]$:

- حلا واحدا .
- حلين متمايزين .
- ثلاث حلول .

18 المعادلة $-x^3-233x+5=0$

1) لا تقبل حلول على المجال $[0\,;3]$

2) تقبل حلا واحدا على المجال $[-5\,;\,0]$

3) تقبل حلا واحدا على المجال $[0\,;1]$

19 الدالة $f:x\mapsto 3x^5+7x^3-1$ المعرفة على $\mathbb{R}$

- متزايدة تماما .
- متناقصة تماما .
- ليست رتيبة .

20 $f:x\mapsto -x^5-7x^3-3x+4$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[-7\,;\,4]$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل على المجال $[0\,;\,1]$:

1) لا تقبل حلول.

2) حلا واحدا .

3) على الأقل حلين .

21 f دالة زوجية وقابلة للاشتقاق على المجال $[-\alpha\,;\,\alpha]$.

1) الدالة f رتيبة على المجال $[-\alpha\,;\,\alpha]$.

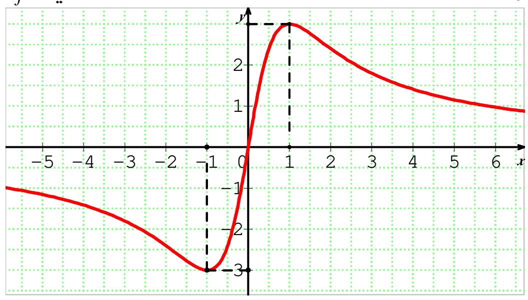
2) منحنى الدالة f لا يقبل أي مماس موازيا لمحور الفواصل .

3) الدالة f تقبل على الأقل قيمة حدية على $[-\alpha\,;\,\alpha]$.

تمارين تطبيقيـــة

المشتقة واتجاه تغير دالة

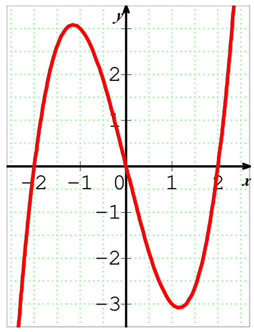
22 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ممثلة بالمنحني (C_f).



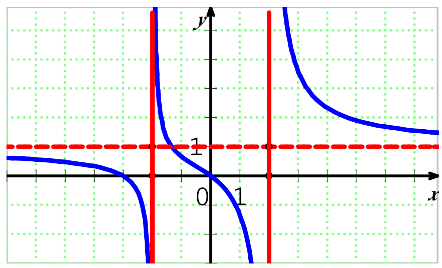
أدرس إشارة $f'(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

23 $(C_{f'})$ هو التمثيل البياني للدالة f' مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$.

أدرس إتجاه تغير الدالة f .



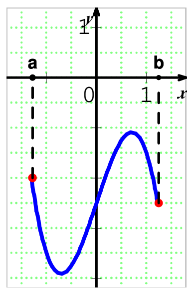
24 $(C_{f'})$ هو التمثيل البياني للدالة f' مشتقة الدالة f



أدرس إتجاه تغير الدالة f .

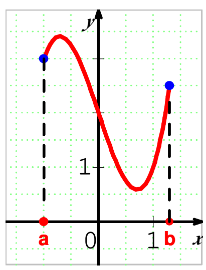
25 $(C_{f'})$ هو التمثيل البياني للدالة f' مشتقة الدالة f المعرفة على المجال $[a\ ;\ b]$.

قارن العددين $f(a)$ و $f(b)$.



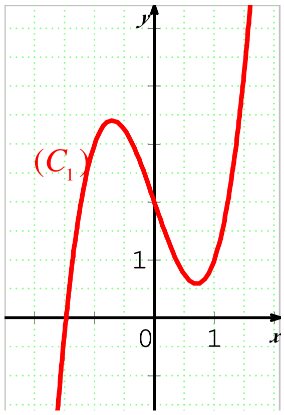
26 $(C_{f'})$ هو التمثيل البياني للدالة f' مشتقة الدالة f المعرفة على المجال $[a\ ;\ b]$.

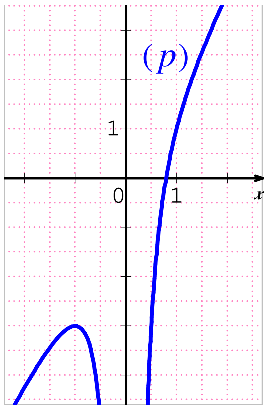
قارن العددين $f(a)$ و $f(b)$

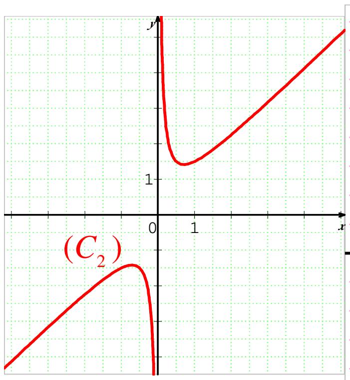


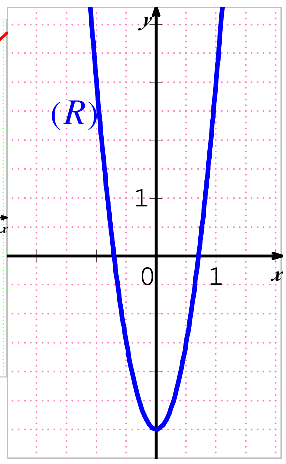
27 (C_1) ، (C_2) ، (C_3) تمثيلات بيانية لدوال f ، g ، h على الترتيب ودوالها المشتقة ممثلة بالمنحنيات الموجودة في العمود الأيمن.

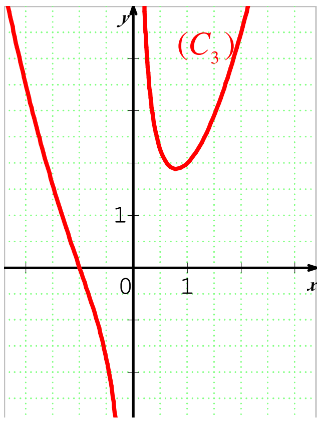
أرفق كل منحن من (C_1) ، (C_2) ، (C_3) بمنحني الدالة المشتقة المناسب .

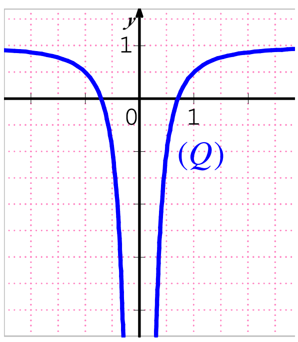












28 عين أكبر قيمة تبلغها الدالة f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ ؛ $D = [-3\ ;\ 1]$.

2) $f : x \mapsto -x^3 + 6x - \sqrt{2}$ ؛ $D = [-2\ ;\ 3\sqrt{2}]$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ ؛ $D = [-2\ ;\ 3]$.

4)

تمارين تطبيقية

29 أنجز جدول تغيرات الدالة f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ ؛ $D = [-3\,;2]$.

2) $f : x \mapsto -2x^2 - 4x + 6$ ؛ $D = [-4\,;\,2]$.

3) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$ ؛ $D = [-5\,;\,7]$.

4) $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 3$ ؛ $D = [-2\,;\,2]$.

5) $f : x \mapsto \dfrac{4x+3}{x+2}$ ؛ $D = [-1\,;\,2]$.

6) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+3}$ ؛ $D = [-4\,;\,6]$.

7) $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ ؛ $D = \left[-\dfrac{1}{3}\,;16\right]$.

8) $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ ؛ $D = [-7\,;\,2]$.

30 قارن العددين A و B المعرفين بـ :

$$A = \frac{(5{,}012013014015016)^2 + 3}{3{,}012013014015016}$$

$$B = \frac{(5{,}012013014015017)^2 + 3}{3{,}012013014015017}$$

31 قارن العددين A و B المعرفين بـ :

$$A = \frac{2{,}01401414}{(1{,}01401414)^2 + 2{,}01401414}$$

$$B = \frac{2{,}01401416}{(1{,}01401416)^2 + 2{,}01401416}$$

32 نعتبر الدالة $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة و $a \neq 0$ أدرس حسب قيم العدد a القيمة الحدية للدالة f .

33 نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^3 + ax + b$ حيث a ، b عددان حقيقيان .

عين قيم العدد الحقيقي a حتى يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين .

34 نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^3 + ax^2 + b$ حيث a ، b عددان حقيقيان .

عين قيم العدد الحقيقي a حتى يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين .

35 نعتبر الدالة $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة و $a \neq 0$. منحنيها الممثل (C) يشمل النقطة $A(2\,;\,1)$ ويقبل مماسا في نقطته ذات الإحداثيتين $(-1\,;-3)$ ، موازيا لحامل محور الفواصل.

أثبت أن $a > 0$ ثم عين الدالة f .

36 نعتبر الدالة $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة و $a \neq 0$ منحنيها الممثل (C) يشمل النقطة $A(1\,;-1)$ ويقبل مماسا في نقطته ذات الإحداثيتين $(-1\,;\,0)$ ، معادلته $y = -\dfrac{13}{2}x - \dfrac{13}{2}$. أحسب الأعداد a ، b ، c .

37 أنجز باختصار جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال D في كل حالة من الحالات المقترحة التالية.

1) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ ؛ $D = [-3\,;2]$.

2) $f : x \mapsto 2x^2 - 3x - 1$ ؛ $D = [0\,;1]$.

3) $f : x \mapsto -3x^2 + 3x - 2$ ؛ $D = [0\,;2]$.

4) $f : x \mapsto -x^2 - 6x + 3$ ؛ $D = [-4\,;0]$.

5) $f : x \mapsto -2x^2 - 4$ ؛ $D = [-1\,;1]$.

6) $f : x \mapsto x^2 - 3$ ؛ $D = [-2\,;1]$.

38 أنجز باختصار جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال D في كل حالة من الحالات المقترحة التالية.

1) $f : x \mapsto |x^2 - 2x|$ ؛ $D = [0\,;5]$.

2) $f : x \mapsto |-x^2 - x + 1|$ ؛ $D = [-3\,;3]$.

3) $f : x \mapsto |x^4 - 8x|$ ؛ $D = [0\,;2]$.

4) $f : x \mapsto |x^2 + 5|$ ؛ $D = [-3\,;2]$.

5) $f : x \mapsto |x^4 + 1|$ ؛ $D = [-3\,;2]$.

39 أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال D ثم أنجز جدول تغيرات الدالة $g : x \mapsto |f(x)|$ ، في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f : x \mapsto (x^2 - 4)(x+1)$ ؛ $D = [-3\,;5]$.

2) $f : x \mapsto (-x^2 + 1)(x+2)$ ؛ $D = [-4\,;2]$.

3) $f : x \mapsto (x^2 + 3)(x+1)$ ؛ $D = [-2\,;2]$.

4) $f : x \mapsto (3x^2 + 2)(-x+1)$ ؛ $D = [-2\,;2]$.

5) $f : x \mapsto (-x^2 - 3)(x+3)$ ؛ $D = [-4\,;0]$.

تمارين

40 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال I و استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I .

1) $f:x\mapsto 2x^3-3x^2-1$ ؛ $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$.

2) $f:x\mapsto -x^3+3x^2-3x-2$ ؛ $I=[-1;0]$.

3) $f:x\mapsto 2x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ ؛ $I=\left[-\frac{3}{2};-1\right]$.

4) $f:x\mapsto \frac{x^3}{6}+x^2+4x-1$ ؛ $I=\left[0;\frac{1}{2}\right]$

41 أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال I و استنتج عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=1$ في المجال I ، حيث: $f:x\mapsto x^3-5x^2+3x+2$ و $I=[-1;2]$.

42 f دالة معرفة على المجال D بالحالات المقترحة أدناه . أعط حصرا للعدد $f(x)$.

1) $f:x\mapsto x^2-3$ ؛ $D=[0;2]$.

2) $f:x\mapsto 2x^3-6x+2$ ؛ $D=[2;8]$.

3) $f:x\mapsto \frac{2}{x-3}$ ؛ $D=[0;2]$.

4) $f:x\mapsto \frac{-4}{(x-2)^2}$ ؛ $D=[-1;1]$.

43 f دالة معرفة على المجال D بالحالات المقترحة أدناه .

أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم استنتج حصرا للعدد $f(x)$.

1) $f:x\mapsto x^2+4x+5$ ؛ $D=[-4;0]$.

2) $f:x\mapsto -3x^2+6x+5$ ؛ $D=[0;2]$.

3) $f:x\mapsto x^3-x^2-2x-1$ ؛ $D=\left[-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$.

4) $f:x\mapsto 5-\frac{3}{2x-1}$ ؛ $D=\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

5) $f:x\mapsto \sqrt{4-5x}$ ؛ $D=[-9;0]$.

مسائل

44 1) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :

$f:x\mapsto x-\sin x$

2) (C_g) المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، حيث g معرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :

$g:x\mapsto \sin x$.

1) (Δ) مماس للمنحني (C_g) عند نقطته ذات الفاصلة 0 .

أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_g) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

45 1) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :

$f:x\mapsto \frac{4x^2-1}{x^2+1}$.

2) أحسب $f(x)-4$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

46 أنجز جدولي تغيرات الدالتين: $g:x\mapsto x^2$ و $h:x\mapsto -x^2+2x$ استنتج تغيرات الدالة f المعرفة بـِ : $f(x)=|x|+|x^2-x|$

47 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$x^3+2x^2-4-\lambda=0$ حيث λ وسيط حقيقي .

أثبت أنه من أجل كل عدد λ من المجال $[-4;-1]$ ، المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا ينتمي إلى المجال $[0;1]$

48 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

(C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) لماذا (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة ؟

2) • حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$.

• فسر بيانيا النتيجة السابقة .

3) عين نقط (C_f) التي يكون فيها معامل توجيه المماس يساوي 3 .

4) ليكن (D) مستقيم معادلته $y=cx+d$.

هل يوجد نقاط من (C_f) يكون فيها المماس موازيا لـ (D) (ناقش حسب قيم c) .

تمارين

49 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x)=ax+b-\frac{6}{x}$$

a و b عددان حقيقيان ؛ (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

عين a و b حيث (C_f) يشمل النقطة $A(2\,;0)$ ويقبل عند A مماسا معادلته $y=x-2$.

50 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(x)=x^2-3x+2$$

(C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(D) المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}$. F النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3}{2}\,;0\right)$.

1) بواسطة راسم أو حاسبة بيانية أرسم (C_f) ، (D) وعلم النقطة F .

2) M_0 نقطة من (C_f) فاصلتها x_0 تختلف عن $\frac{3}{2}$، H_0 المسقط العمودي لـ M_0 على (D) و A_0 منتصف $[FH_0]$.

- أحسب ، بدلالة x_0 ، إحداثيي H_0 و A_0 .
- أحسب ، بدلالة x_0، معامل توجيه المستقيم (A_0M_0)
- استنتج أن المستقيم (A_0M_0) يمس (C_f) في M_0 .

3) انطلاقا من النتائج السابقة ، بين أن المسقط العمودي للنقطة F على المماس لـ(C_f) في نقطة كيفية ، يكون ينتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=-\frac{1}{4}$.

51 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x^2$ ؛

g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث: $g(x)=\frac{1}{x}$ ؛

h دالة معرفة على $[0;+\infty[$ حيث: $h(x)=\sqrt{x}$.

عين التلميذ عمر معادلة المماس لكل رسم بياني للدوال f ، g ، h عند النقطة ذات الفاصلة 4 وحصل على:

$$(T_1):y=\frac{1}{4}x+1$$

$$(T_2):y=8x-16$$

$$(T_3):y=-\frac{1}{16}x+\frac{1}{2}$$

ولكنه لم يتذكر الترتيب . ساعد عمر على إرفاق كل مماس إلى دالته المناسبة .

52 المستوي منسوب إلى معلم .

(P) القطع المكافئ الذي معادلته $y=x^2$ و A نقطة إحداثياها $(1;-2)$.

1) أرسم (P) وعلم A .

خمن عدد المماسات لـ (P) التي تمر بالنقطة A .

2) التحقق من التخمين :

- a عدد حقيقي .

أكتب معادلة (T_a) المماس لـ (P) عند النقطة ذات الفاصلة a .

- من أجل أي قيم للعدد a يكون (T_a) يشمل النقطة A .
- أكتب معادلة المماسات لـ (P) والتي تشمل النقطة A .
- أرسم هذه المماسات في نفس المعلم .

53 1) لتكن الدالة كثير حدود للمتغير x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $P(x)=x^3-3x^2+3x-3$

أ) برهن أن الدالة P متزايدة على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج من أجل كل x من المجال $]2\,;2,2[$ لدينا : $P(x)<-0,2$

2) لتكن الدالة f المعرفة على $]2\,;5]$ بـ :

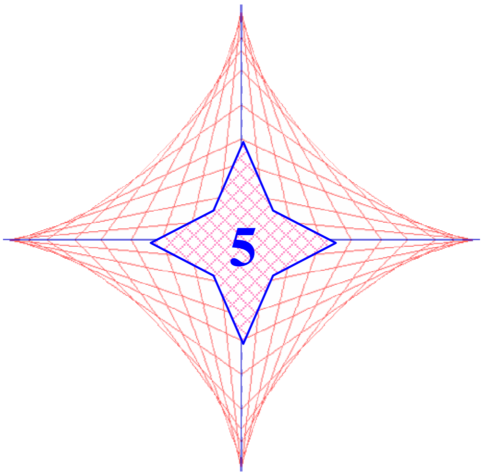
$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$$

أ) استنتج من السؤال السابق أنه من أجل كل x من $]2\,;2,2[$ لدينا $f(x)<-\frac{0,2}{(x-2)^2}$

ب) استنتج عدد $a>0$ حيث من أجل كل x من $]2\,;2+a[$ لدينا $f(x)<-5$.

ت) ليكن M عدد حقيقي موجب تماما ، هل يوجد $b>0$ حيث من أجل $x\in]2;2+b[$: $f(x)<-M$

−عين الدالة المشتقة للدالة f على $]2;5]$ و ادرس اتجاه التغير للدالة f .



النهايات
السلوك التقاربي لمنحن

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- حساب نهاية دالة ناطقة عند عدد a حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدالة.
- التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0.
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب.البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- استعمال النظريات الأولية(المجموع، الجداء، المقلوب و حاصل القسمة) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

نشاط أول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

1. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. أكمل، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم الموالي:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$								

3. ماذا تلاحظ ؟
4. بين أنه حتى يكون $f(x)\geq 10^8$ يكفي أن يكون x عنصرا من $\left[3-10^{-4};3\right[\cup\left]3;3+10^{-4}\right]$
5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يكون $f(x)\geq A$ لما $x\in\left[3-\dfrac{1}{\sqrt{A}};3\right[\cup\left]3;3+\dfrac{1}{\sqrt{A}}\right]$

نشاط ثان

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

1. بعد حساب $g'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة g.
2. أكمل، باستعمال آلة حاسبة، جدولي القيم المواليين:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999		x	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g(x)$						$g(x)$				

3. ماذا تلاحظ ؟
4. بين أنه:

إذا كان $x\in\left]1;1+10^{-10}\right]$ فإن $g(x)\geq 10^{10}$ و إذا كان $x\in\left[1-10^{-10};1\right[$ فإن $g(x)\leq -10^{10}$

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A :

إذا كان $x\in\left]1;1+\dfrac{1}{A}\right]$ فإن $g(x)\geq A$ و إذا كان $x\in\left[1-\dfrac{1}{A};1\right[$ فإن $g(x)\leq -A$

نشاط ثالث

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x)=x^2$ (k **هي الدالة مربع**)

1. شكل جدول تغيرات الدالة k.
2. أكمل جدول القيم الموالي:

x	10	10^2	10^3	10^4
$k(x)$				

3. ماذا تلاحظ ؟
4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:

إذا كان $x\geq B$ يكون $k(x)\geq A$ و إذا كان $x\leq -B$ يكون $k(x)\geq A$

نشاط رابع

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي:

$$h(x)=\frac{2x+1}{x}$$

1. بين أن $h(x)=a+\frac{b}{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.
2. بعد حساب $h'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة h.
3. أكمل جدولي القيم المواليين:

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7		x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$						$h(x)$				

4. ماذا تلاحظ ؟
5. بين أنه:

إذا كان $x\geq 10^6$ فإن $h(x)\in\left]2\,;2+10^{-6}\right]$ و إذا كان $x\leq -10^6$ فإن $h(x)\in\left[2;2-10^6\right[$

6. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:

إذا كان $x\geq B$ فإن $h(x)\in\left]2;2+e\right]$

7. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:

إذا كان $x\leq -B$ فإن $h(x)\in\left[2-e\,;2\right[$

نشاط خامس

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$

6. أكمل، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم الموالي:

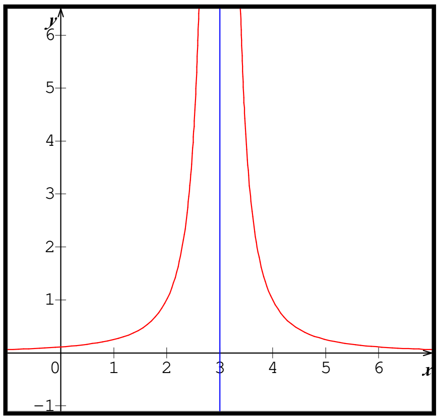
x	1.997	1.998	1.999		2.001	2.002	2.003
$f(x)$							

7. ماذا تلاحظ ؟
8. بعد تحليل العبارة x^2-x-2 بسط عبارة $f(x)$
9. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e يوجد عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:

إذا كان $0<|x-2|<\alpha$ يكون $0\leq|f(x)-3|<e$

نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

1. أمــــثـــلـة



الشكل1

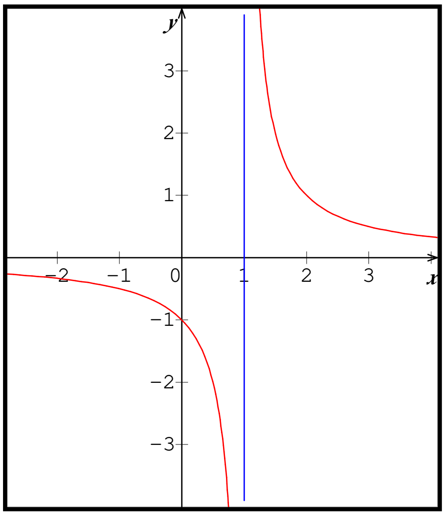
مثال1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـِ :

$f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ (أنظر النشاط الأول)

يبين لنا الجدول أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 3 بالقدر الكافي.

نقول في هذه الحالة أن نهاية f هي $+\infty$ عند 3 (أو لما يؤول x إلى 3)

و نكتب: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$



الشكل2

مثال2: لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـِ :

$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ (أنظر النشاط الثاني)

لتكن g_1 و g_2 الدالتان المعرفتان على $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ على الترتيب

حيث: $g_1(x)=g_2(x)=g(x)$

يبين لنا الجدول أن $g_1(x)$ يأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من 1 بالقدر الكافي ومنه: $\lim\limits_{x\to 1} g_1(x)=+\infty$

كما يبين لنا الجدول أن $|g_2(x)|$ ($g_2(x)<0$) تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد1 بالقدر الكافي ومنه: $\lim\limits_{x\to 1} g_1(x)=-\infty$. نقول أن نهاية g هي $+\infty$ عند 1 من اليمين و أن نهاية g هي $-\infty$ عند 1 من اليسار و نكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=+\infty$

مبرهنة: نقبل دون برهان النتائج التالية: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$

2. المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة f (**الشكل1**) يقترب بالقدر الذي نريد من المستقيم ذو المعادلة $x=3$ و أن المنحنى الممثل للدالة g (**الشكل2**) يقترب بالقدر الذي نريد من المستقيم ذو المعادلة $x=1$. نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f و أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة g .

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن a عدد حقيقي.

إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=a$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

تمرين محلول 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;-1[\cup]-1;0]$ بـِ: $f(x)=-1+\frac{1}{(x+1)^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

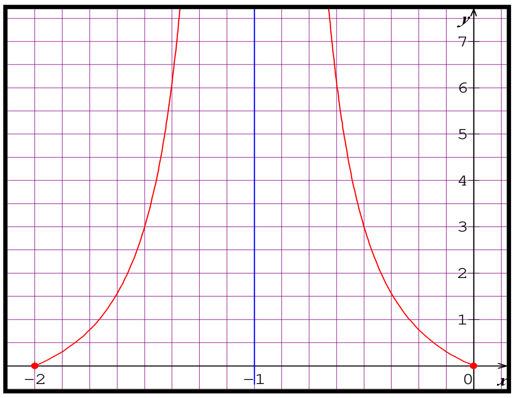
1. أدرس نهاية الدالة f عند (-1). ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

2. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني (C_f).

حـــل: 1) لدينا حسب المبرهنة السابقة $\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ و منه $\lim_{x\to-1}f(x)=+\infty$. نستنتج أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

2) من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;-1[\cup]-1;0]$ لدينا: $f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^3}$

x	-2		-1		0
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



تمرين محلول 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;0[\cup]0;1]$ بـِ: $f(x)=1+\frac{1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. أدرس نهاية الدالة f عند 0. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

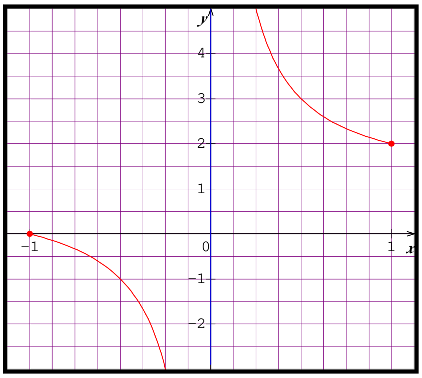
2. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني (C_f).

حـــل:

1. لدينا حسب المبرهنة السابقة $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ و منه $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$. نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

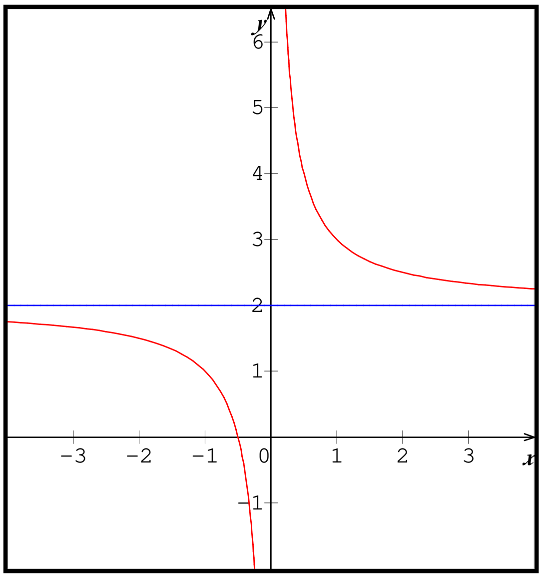
2. من أجل كل عدد حقيقي x من $[-1;0[\cup]0;1]$ لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2



نهاية منتهية عند مالانهاية

1. مـــثـــــال



نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي:

$h(x)=2+\frac{1}{x}$ (أنظر النشاط الرابع)

يبين لنا الجدول الأول أن $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة.

نقول في هذه الحالة أن نهاية h هي 2 عند $+\infty$

و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2$

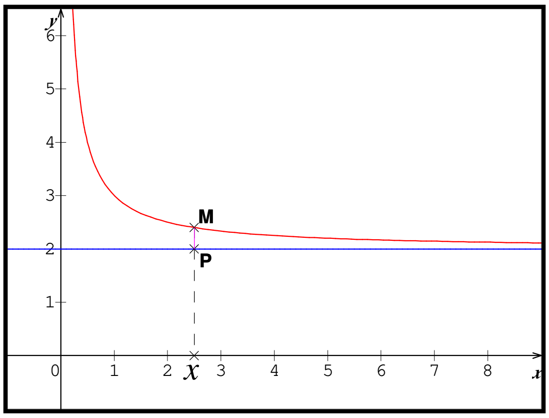
كما يبين لنا الجدول الثاني أن $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد شريطة أن يكون x سالبا وتأخذ $|x|$ قيما جد كبيرة.

نقول في هذه الحالة أن نهاية h هي 2 عند $-\infty$

و نكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=2$

مبرهنة: نقبل دون برهان النتائج التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+a}=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+a}=0$ حيث a عدد حقيقي.

2. المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل



ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y=2$ و لتكن M و P نقطتا (C_h) و (D) على الترتيب اللتان فاصلتاهما x. (الشكل المقابل)

لدينا بالنسبة لهذه الوضعية $MP=f(x)-2$ و منه $MP=\frac{1}{x}$

و بما أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن MP يؤول إلى 0 لما يؤول x إلى $+\infty$

نقول في هذه الحالة أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_h) عند $+\infty$.

من خلال ملاحظات مماثلة عند $-\infty$ نقول أيضا في هذه الحالة أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_h) عند $-\infty$.

تعريف: **ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن b عدد حقيقي.**

القول أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$)

تمرين محلول 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=-2+\frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

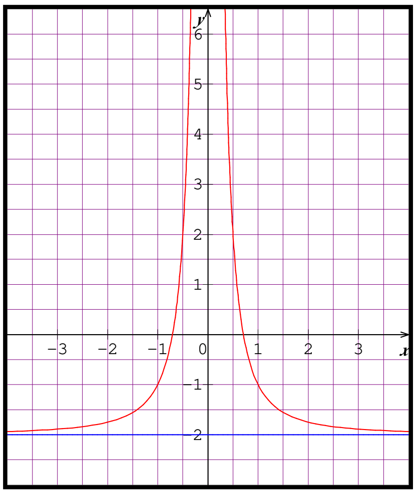
3. أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

4. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحنى (C_f).

حــل:

.1 لدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. نستنتج أن محور التراتيب ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-2$. نستنتج أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=-2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$



.2 من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{0\}$ لدينا: $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-2

تمرين محلول 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$

طريقة: للبرهان على أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) نبرهن أن $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-b)=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-b)=0$)

حــل:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 لدينا:

$$f(x)-2=\frac{2x-1}{x+1}-2=\frac{2x-1-2x-2}{x+1}=\frac{-3}{x+1}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-3}{x+1}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-2)=0$ و منه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$

و هكذا فإن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

و بنفس الكيفية بما أن $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-3}{x+1}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-2)=0$ و منه $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$

و هكذا فإن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

مفهوم النهاية

بعض التعاريف

تعريف1: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-x_0|<\alpha$ يكون $0\le|f(x)-l|<e$

و نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

ملاحظة: $0<|x-x_0|<\alpha$ تعني $x\in\,]x_0-\alpha;x_0[\,\cup\,]x_0;x_0+\alpha[$

$0\le|f(x)-l|<e$ تعني $f(x)\in\,]l-e;l+e[$

تعريف2: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $0\le|f(x)-l|<e$

و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

تعريف3: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $f(x)>\mathrm{A}$

و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تعريف4: القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x<-B$ يكون $f(x)>\mathrm{A}$

و نكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

تعريف5: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x-x_0<\alpha$ يكون $f(x)>A$

و نكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=+\infty$

تعريف6: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x_0-x<\alpha$ يكون $f(x)>A$

و نكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكنك الحصول على بقية التعاريف بإتباع نفس المبدأ السابق .

تمرين محلول 1

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x+1$

باستعمال التعريف أثبت أن: $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

حـــل:

لإثبات أن $\lim_{x\to 1} f(x)=3$ يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-1|<\alpha$ يكون $0\le |f(x)-3|<e$

البرهان: ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث: $0\le |f(x)-3|<e$

$0\le |f(x)-3|<e$ يكافئ $0\le |(2x+1)-3|<e$ أي $0\le |2x-2|<e$

و هذا يعني أن $0\le |2(x-2)|<e$ أي $0\le 2|x-2|<e$

نجد هكذا $0\le |x-2|<\frac{e}{2}$

و منه إذا كان $0\le |x-2|<\frac{e}{2}$ فإن $0\le |f(x)-3|<e$

للحصول على $0\le |f(x)-3|<e$ يكفي إذن أخذ $\alpha=\frac{e}{2}$ (أو $\alpha\le\frac{e}{2}$)

و هكذا إذن $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

تمرين محلول 2

لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ: $g(x)=\frac{1}{x}$

باستعمال التعريف أثبت أن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=+\infty$

حـــل:

لإثبات أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=+\infty$ يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x<\alpha$ يكون $g(x)>A$

البرهان: ليكن A عدد حقيقي موجب تماما بحيث: $g(x)>A$

$g(x)>A$ يكافئ $\frac{1}{x}>A>0$ أي $0<x<\frac{1}{A}$

و منه إذا كان $0<x<\frac{1}{A}$ يكون $g(x)>A$

للحصول على $g(x)>A$ يكفي إذن أخذ $\alpha=\frac{1}{A}$

و هكذا إذن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=+\infty$

عمليات على النهايات

1. ملاحظات

- يتم بصفة عامة حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
- إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد حقيقي a تكون هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها و نذكر على سبيل المثال الدالة: $x\to \sin x$ و التي لا تقبل نهاية لما يؤول x إلى $+\infty$.

2. المبرهنات الأولية على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

- نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "**عدم التعيين**"

مثال: إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x^2+x$

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{cases}$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}$ لا يمكننا الاستنتاج في هذه الحالة

لإزالة حالة عدم التعيين نكتب $f(x)=x(2x+1)$ و بما أن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

تمرين محلول 1

لتكن f الدالة كثير حدود المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x^2-5x+3$.
أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

حــــل:

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x+3)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
- لا يمكننا استنتاج نهاية f عند $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x+3)=-\infty$

نكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=2x^2\left(1-\dfrac{5}{2x}+\dfrac{3}{2x^2}\right)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{2x}+\dfrac{3}{2x^2}\right)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين محلول 2

لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بـِ: $g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ لدينا: $g(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$
2. أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.

حــــل:

1. بتوحيد المقامات نحصل على: $g(x)=\dfrac{x(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.
2. • بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$
   • بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
   • بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)=-\infty$
   • بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)=+\infty$

طريقة أخرى: كان بالإمكان كتابة $g(x)$ من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ و $x\neq0$ على الشكل:

$g(x)=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=x\dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$

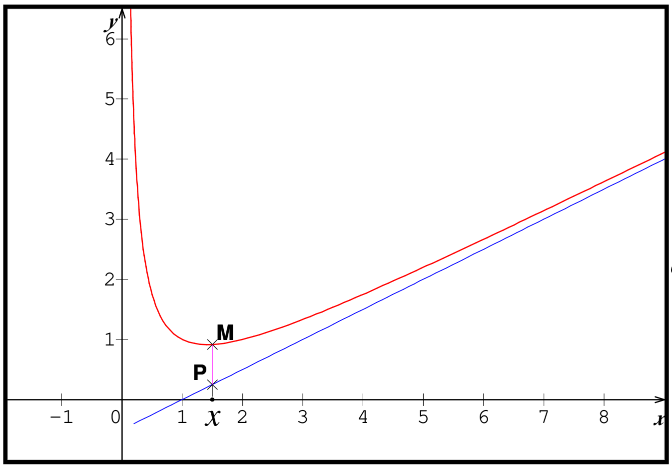
و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و بنفس الكيفية نثبت أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

المستقيم المقارب المائل

1. مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$$



باستعمال راسم منحنيات تحصلنا على (C_f) التمثيل البياني للدالة f كما قمنا بتمثيل المستقيم $(\Delta): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و لتكن P نقطة (Δ) لتي فاصلتها x. (أنظر الشكل المقابل)

لدينا بالنسبة لهذه الوضعية $MP=f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ و منه $MP=\frac{1}{x}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

فإن MP يؤول إلى 0 لما يؤول x إلى $+\infty$. نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقترب من المستقيم (Δ) لما يؤول x إلى $+\infty$.

نقول في هذه الحالة أن المستقيم $(\Delta): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

تعريف: **ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$**
القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ **(على الترتيب** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ **)**

ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

فإنه من الواضح أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ لأن $f(x)-(ax+b)=g(x)$

و بالتالي فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$.

(نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=-2x+3-\frac{3}{(x-2)^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $f(x)-(-2x+3)=-\frac{3}{(x-2)^2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{(x-2)^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{3}{(x-2)^2}=0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

تمرين محلول 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ بـِ: $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x-3}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم. و ليكن في نفس المعلم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$

بين أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$

طريقة: لإثبات أن المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

يكفي أن نثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

حــــل: من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ لدينا:

$f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x-3}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-3}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-3}=0$

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$

تمرين محلول 2

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـِ: $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم

1. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل x يختلف عن 1 : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$
2. استنتج أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته. أدرس وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ)

طريقة: لدراسة وضعية المنحني (C_g) الممثل لدالة g بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $g(x)-(ax+b)$

حــــل:

1. لدينا من أجل كل x يختلف عن 1 : $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$

و منه حتى يكون، من كل x يختلف عن 1، $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=g(x)$ يكفي أن يكون: $\begin{cases}a=2\\-a+b=-3\\-b+c=3\end{cases}$

نجد $a=2$، $b=-1$ و $c=2$ و منه فإن من أجل كل x يختلف عن 1 : $g(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-1}$

2. بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ و فإن المستقيم $(\Delta): y=2x-1$ مستقيم مقارب لـِ (C_g) **عند** $-\infty$ **و عند** $+\infty$.

لدينا من أجل كل x يختلف عن 1: $g(x)-(2x-1)=\dfrac{2}{x-1}$

- من أجل $x\in]-\infty;1[$، $g(x)-(2x-1)<0$ و منه يقع المنحني (C_g) تحت المستقيم (Δ)
- من أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)-(2x-1)>0$ و منه يقع المنحني (C_g) فوق المستقيم (Δ)

البحث عن المستقيم المقارب المائل

نعتبر في معلم (O,I,J) للمستوي المنحنى (C_f) الممثل لدالة f .

و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$

نفرض أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

.1 نفرض أن (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ومنه حسب التعريف $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

نضع: $g(x)=f(x)-(ax+b)$ و منه $f(x)=g(x)+ax+b$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)+ax+b}{x}=\frac{1}{x}\times g(x)+a+\frac{b}{x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

لدينا من جهة ثانية $f(x)-ax=g(x)+b$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

الخلاصة1: إذا كان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ مستقيما مقاربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

.2 نفرض أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

من الواضح أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ و منه فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

الخلاصة2: إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ملاحظة: ننجز برهانا مماثلا لما يؤول x إلى $-\infty$

نتيجة: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$

يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$$

(**على الترتيب** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$)

تمرين محلول

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
2. عين بمعادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

حـــل:

1. • لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty} x\times\dfrac{1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}$

بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

بإتباع نفس الطريقة نثبت أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(x^3+3x^2-3\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(x^3+3x^2-3\right)=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$

بإتباع نفس الطريقة نثبت أن: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$

2. •من نتائج حساب النهايات نستنتج أن المستقيمين الموازيين لمحور التراتيب و اللذين معادلتاهما:

$x=-1$ و $x=1$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f).

• لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و منه إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل

لدينا من جهة: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=1$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=3$

لدينا إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=3$

و بالتالي المستقيم $(\Delta): y=x+3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. (نفس النتيجة عند $-\infty$)

دراسة دالة

تمهيد

بعد ما تطرقنا إلى حساب المشتقات و تطبيقاتها في استنتاج اتجاه تغير دالة و من تم القيم الحدية و بعد التطرق إلى حساب النهايات و دراسة السلوك التقاربي لمنحني دالة أَضحى من الممكن جدا دراسة دالة و تمثيلها بيانيا. نقترح فيما يلي مخططا لدراسة دالة علما أنه يمكن إجراء تغيير جزئي عل الترتيب المقترح كما يمكن إلغاء بعض المراحل و ذلك حسب طبيعة الدالة المدروسة.

مخطط دراسة دالة

1. مجموعة التعريف
- تحديد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
- دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة) قصد تقليص مجموعة الدراسة و تحديد مراكز أو محاور تناظر المنحني الممثل للدالة.

2. حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة

3. دراسة اتجاه تغير الدالة
- حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
- دراسة إشارة المشتقة و استنتاج اتجاه تغير الدالة.
- تحديد القيم الحدية في حالة وجودها.

4. تشكيل جدول تغيرات الدالة

5. تحديد المستقيمات المقاربة

6. التمثيل البياني للدالة
- رسم المستقيمات المقاربة.
- تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب إحداثياتها و نذكر بصفة خاصة النقط الحدية و نقط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات.
- رسم المماسات عند القيم الحدية و أخرى مطلوبة في النص.
- استغلال عناصر تناظر المنحني إن وجدت.

تمرين محلول

لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين مجموعة تعريف f. أدرس شفعيتها و دوريتها. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ (C_f). استنتج أنه يكفي دراسة الدالة f على المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. أرسم المنحني (C_f).

حـــل:

1. • لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$ لأن: $\sin x=0$ يكافئ $x=k\pi$ حيث k عدد صحيح

• إضافة إلى كون D_f متناظر بالنسبة إلى 0 نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\sin(-x)=-\sin x$

و منه لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $-x\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$. نستنتج أن الدالة f فردية.

• نعلم أن الدالة: $x\mapsto \sin x$ دالة دورية 2π دور لها و منه الدالة f دورية و 2π دور لها.

• نعتبر معلما جديدا $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\Omega\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ و منه دساتير تغيير المعلم هي: $x=X+\frac{\pi}{2}$ و $y=Y$

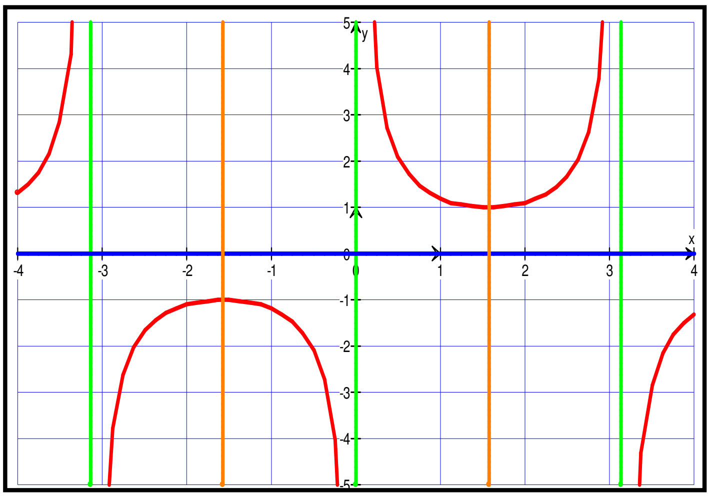
معادلة (C_f) بالنسبة إلى $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ هي: $Y=\frac{1}{\cos X}$ لأن $\sin\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=\cos X$

من الواضح أن الدالة: $X\mapsto\frac{1}{\cos X}$ دالة زوجية و منه المستقيم ذو المعادلة: $x=\frac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ (C_f).

بما أن 2π دور لـ f نكتفي بدراستها على مجموعة طولها 2π و لتكن $]-\pi;0[\cup]0;+\pi[$ و بما أنها فردية نقلص الدراسة مثلا على المجال $]0;\pi[$. و علما أن المستقيم: $x=\frac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ (C_f) نكتفي بدراستها على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{1}{\sin x}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\sin x=0^+$ و منه محور التراتيب مستقيم مقارب لـ (C_f)

و $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ و منه: من أجل كل x من $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$، $f'(x)\le 0$. إذن f متناقصة تماما على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.



x	0 ‖	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖ $-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1

دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

1. دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بــ: $f(x)=x^3-3x+1$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

☒ بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

☒ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=3(x^2-1)$. استنتج، حسب قيم x، اتجاه تغير f.

☒ شكل جدول تغيرات الدالة f.

☒ أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة دات الفاصلة 0. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $[-1;+1]$.

نلاحظ أن المنحني (C_f) يخترق مماسه عند النقطة ذات الفاصلة 0. تسمى هذه النقطة، نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

☒ بعد حساب $f(-2)$ و $f(2)$ ارسم (Δ) و (C_f) محددا المماسين عند النقطتين $(-1;3)$ و $(1;-1)$.

☒ نسمي Ω النقطة التي إحداثياها $(0;1)$. بين أن معادلة (C_f) نسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ هي: $Y=X^3-3X$
ثم تحقق أن الدالة $g:X\mapsto X^3-3X$ دالة فردية. مادا تستنتج؟

☒ نلاحظ أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط نرمز إلى فواصلها بــ: α، β و γ.
لدينا $f(0)=1$ و $f(1)=-1$ و منه $f(0)\times f(1)<0$. نستنتج أن أحد الحلول و ليكن α يحقق: $0<\alpha<1$.
باتباع نفس المنهجية بين أن $0,3<\alpha<0,4$.
مادا تمثل كل من $0,3$ و $0,4$ بالنسبة إلى α؟

☒ نفرض أن β موجب تماما. عين قيمة مقربة إلى 0.1 بالنقصان للعدد β.

2. تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بــ: $f(x)=x^3+3x^2-4$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

☒ بعد دراسة تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها.

☒ تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x+2)^2(x-1)$. عين فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل ثم ارسمه.

☒ بين أن المنحني (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

ملاحظة: المنحني الممثل للدالة: $x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ حيث $a\neq 0$ يقبل دائما مركز تناظر.

دراسة دالة تناظرية

1. تعريف:

نسمي دالة تناظرية كل دالة f من الشكل: $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث a، b، c و d أعداد حقيقية مع $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

- ☒ ما هي طبيعة الدالة f في حالة $c=0$ و $d \neq 0$؟
- ☒ فسر لمادا يفرض الشرط $ad-bc \neq 0$.
- ☒ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

2. دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- ☒ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
- ☒ عين عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من D_f: $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$
- ☒ عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف D_f. استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
- ☒ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- ☒ عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات. عين نقط المنحني (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم دو المعادلة: $y=-x$. أرسم هده المماسات، المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).
- ☒ تحقق أن المستقيمين المقاربين يتقاطعان في النقطة $\Omega(1;2)$. بين أن Ω مركز تناظر للمنحني (C_f).

3. تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- ☒ بعد دراسة تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها.
- ☒ عين بمعادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f).
- ☒ عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات. أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).
- ☒ بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني (C_f).

ملاحظة: يسمى المنحني الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$ قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $x=-\dfrac{d}{c}$ و $y=\dfrac{a}{c}$

نعتبر في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ النقط $A(-1;2)$، $B(-1;0)$، $C(0;2)$ و $M(x;0)$ حيث $x<-1$.

المستقيم (AM) يقطع محور التراتيب في النقطة N.

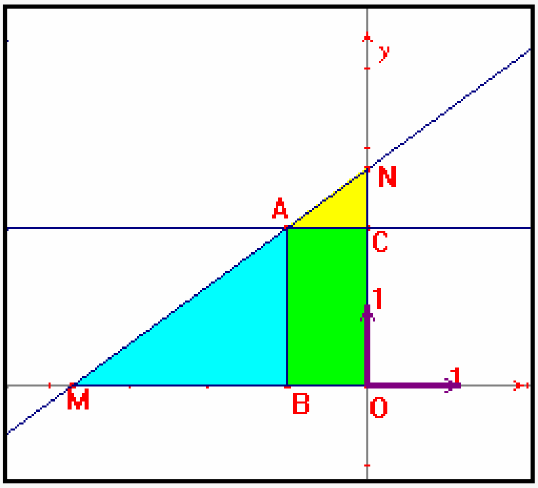
1. أحسب بدلالة x كل من ترتيب النقطة N و مساحات المثلثات OMN، CAN و ABM.
2. لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـ: $f(x)=-\dfrac{x^2}{x+1}$ و ليكن (C_f) منحنيها في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

- بتقسيم المثلث OMN بشكل مناسب عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $]-\infty;-1[$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

- أدرس نهايتي f عند -1 و عند $-\infty$. أدرس تغيرات f على $]-\infty;-1[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
- تحقق أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تحديدهما. أرسم كلا من (D_1)، (D_2) و (C_f).

3. ما هي قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن؟ أحسب عندئذ هذه المساحة.



1. بفرض $N(0;\alpha)$ و علما أن N تنتمي على المستقيم (AM)

و باستعمال مثلا شرط الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$

نجد: $\alpha=\dfrac{2x}{x+1}$

إذا رمزنا إلى مساحات المثلثات OMN، CAN و ABM بـِ:

a_1، a_2 و a_3 على الترتيب وبتطبيق قاعدة حساب مساحة مثلث نجد:

$a_1=-\dfrac{x^2}{x+1}$، $a_2=-\dfrac{1}{x+1}$ و $a_3=-x-1$

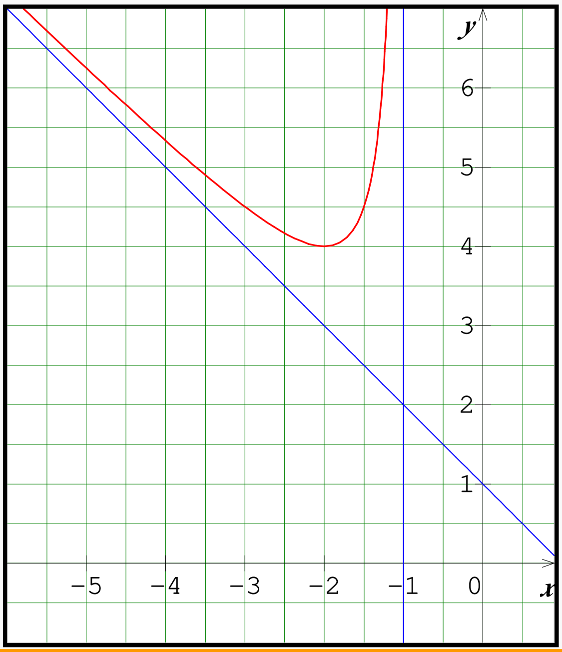
2. نلاحظ أن $a_1=f(x)$ و علما أن:

$a_1=a_2+a_0+a_3$ حيث a_0 هي مساحة المستطيل $OBAC$

نجد: $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x+1}$

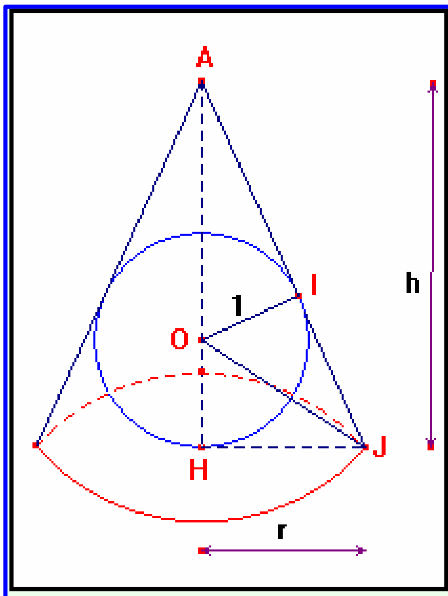
من أجل كل x من $]-\infty;-1[$: $f'(x)=-\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖



لدينا: $(D_1):x=-1$ و $(D_2):y=-x+1$

3. قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن هي -2 و لدينا في هذه الحالة: $a_1=4$.



.1 f دالة معرفة على $D=]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{2}{x-2}$

و ليكن (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد و متجانس.

ا) أدرس نهايات f عند حدود D ثم بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

ب)أدرس اتجاه تغير f.شكل جدول تغيراتها ثم أرسم (Δ)، (Δ') و (C_f).

.2 مثلنا في الشكل المقابل مخروطا (Γ) ارتفاعه h، نصف قطر قاعدته r و محيطا بسطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 1. النقط A، O، I، H و J تنتمي إلى نفس المستوي حيث $(OI)\perp(AJ)$ و $(AH)\perp(HJ)$.

نضع $g(h)=\frac{1}{2}V(h)$ حيث $V(h)$ هو حجم المخروط (Γ). تحقق أن $h>2$

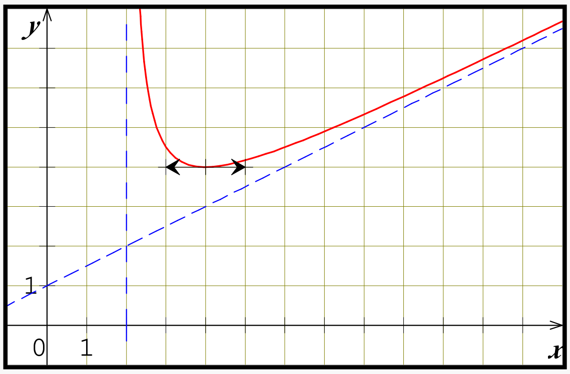
أحسب $V(h)$ بدلالة h ثم باستعمال نتائج السؤال1 عين h بحيث يكون $V(h)$ أصغر ما يمكن.

.1 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{1}{x-2}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=+\infty$. المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=2$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+1\right)=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-2}=0$ و منه (Δ') ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f).

من أجل كل x من D، $f'(x)=\frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$. بما أن $x>0$ و $2(x-2)^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(x-4)$.



x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

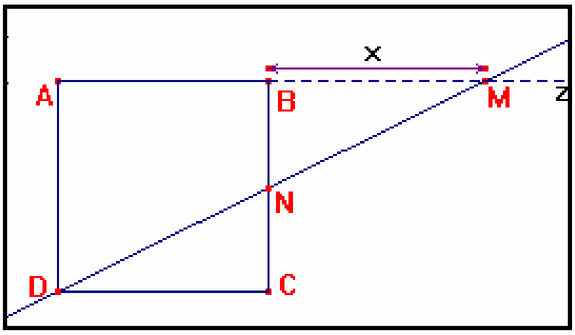
.2 بما أن المخروط يحيط بسطح الكرة فإن ارتفاعه يكون بالضرورة أكبر تماما من قطرها و منه $h>2$.

نعين في البداية r^2. لدينا $\tan\widehat{OAI}=\frac{OI}{AI}$ و $\tan\widehat{HAJ}=\frac{HJ}{AH}$ و بما أن $\widehat{OAI}=\widehat{HAJ}$ فإن $\frac{OI}{AI}=\frac{HJ}{AH}$

و منه $r^2=\frac{h^2}{AI^2}$. و بعد تطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث AIO نجد $AI^2=h(h-2)$ و منه $r^2=\frac{h}{h-2}$

$g(h)=\frac{1}{2}V(h)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}\times\frac{h^2}{2(h-2)}=\frac{\pi}{3}f(h)$. يكون $V(h)$ أصغر ما يمكن من أجل $h=4$.

وجود مستقيم مقارب مائل

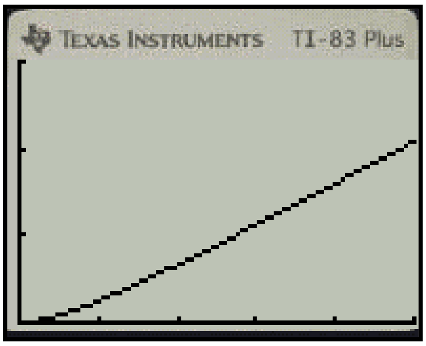


$ABCD$ مربع حيث $AB=1$. تتغير نقطة M على نصف المستقيم $(Bz]$. النقط A، B و M في استقامية.
يتقاطع المستقيمان (DM) و (BC) في النقطة N.
نضع $BM=x$

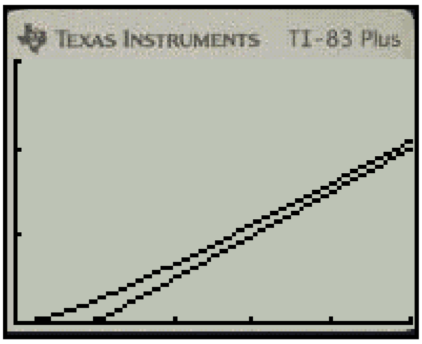
1. حساب مساحة المثلث BMN
   - ❖ عبر عن BN بدلالة x.
   - ❖ نرمز إلى مساحة المثلث BMN بالرمز $f(x)$. بين أن: $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)}$

2. استعمال الحاسبة و المجدول
   ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.
   - ❖ مثل (C) على شاشة الحاسبة البيانية.
   - ❖ أنجز باستعمال مجدول ورقة حساب خاصة بقيم للدالة f كما هو موضح في الجدول أسفله.

	A	B
1	x	f(x)
2	10	4,55
3	100	49,50
4	1000	499,50
5	10000	
6	100000	
7	1000000	
8	10000000	
9	100000000	
10	1000000000	



3. تخمين حول وجود مستقيم مقارب مائل
   - ❖ باستعمال نتائج السؤال 2 خمن وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C) يطلب تحديد معادلة له.
   - ❖ اثبت أن المستقيم (Δ) هو فعلا مستقيم مقارب للمنحني (C).
   - ❖ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).
   - ❖ مثل (C) و (Δ) على شاشة الحاسبة البيانية.



أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **5** أجب بصحيح أم خاطئ

1 من أجل كل عدد حقيقي x

إذا كان $x>0$ و $f(x)>\frac{2}{x}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

2 من أجل كل عدد حقيقي x

إذا كان $x>0$ و $1-\frac{3}{x}\le f(x)\le 1+\frac{3}{x}$ فإن

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

3 من أجل كل عدد حقيقي x

إذا كان $x>0$ و $1+\frac{5}{x}\le f(x)\le 2+\frac{5}{x}$ فإن

$1\le \lim_{x\to+\infty} f(x)\le 2$

4 إذا كان $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ فإن التمثيل البياني للدالة f لا يقطع المستقيم ذي المعادلة $y=-2$

5 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث:

$f(x)=x+2-\frac{4}{x-1}$ و $g(x)=x+2+\frac{4x}{x-1}$

المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) و لـ (C_g)

أسئلة متعددة الاختيارات

إختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة بالنسبة للتمارين من **6** إلى **9**

6 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+4}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=...$

1) $-\frac{1}{4}$ 2) 2 3) 0

7 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ حيث :

$f(x)=\frac{4-3x}{x+2}$

(C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب معادلته:

1) $y=4$ 2) $y=-3$ 3) $y=-2$

8 f و g دالتان يحققان الشرطين

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $f(x)\ge g(x)$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=...$

1) 0 2) $-\infty$ 3) $+\infty$

9 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ و تمثيلها البياني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $y=-\frac{3}{2}$ معناه ...

1) $f(x)=-\frac{3}{2}x$

2) $\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$

بالنسبة للتمارين من **10** إلى **12**

باستعمال جدول تغيرات الدالة f عين مجموعة تعريفها و النهايات عند حدود مجموعة التعريف

10

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

11

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

12

x	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ -1	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

13 f ، g ، h ، k دوال معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. نعلم أن :

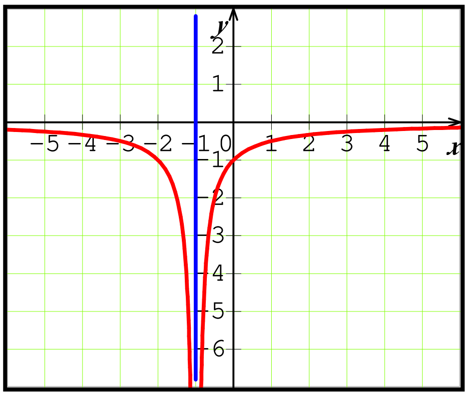
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

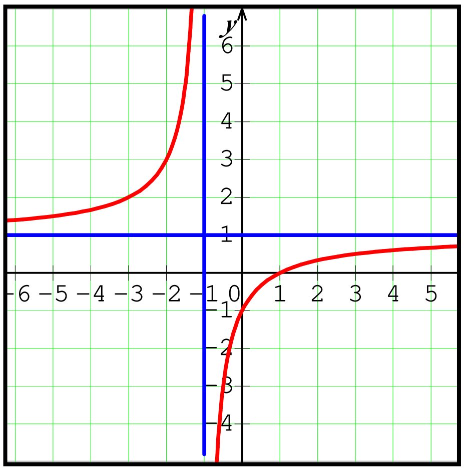
$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-1} g(x)=-\infty$

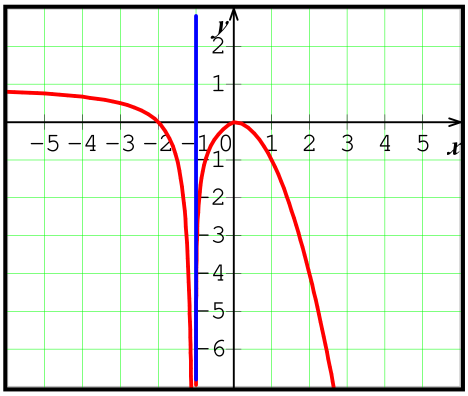
$\lim_{x\to-\infty} k(x)=1$ ، $\lim_{x\to+\infty} k(x)=1$ ، $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} k(x)=0$

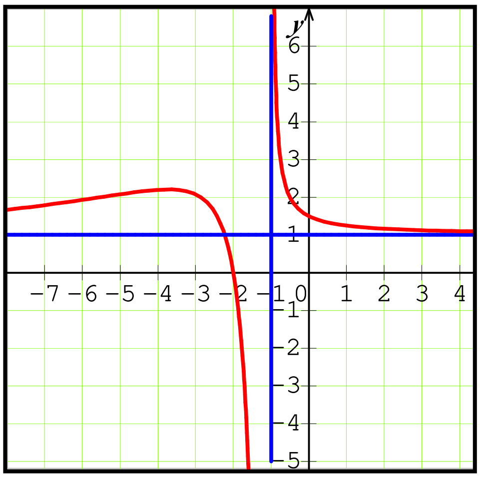
$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$ ، $\lim_{x\to-1} h(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

أنسب لكل دالة منحنيها البياني









14 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=-\frac{3}{5}x+1$

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

15 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x^2$

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

16 f الدالة " مقلوب " معرفة على $\mathbb{R}^*$

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} f(x)$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

17 f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث: $f(x)=\sqrt{x}$

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

18 احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى a في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$; $a=-1$

2) $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$; $a=\frac{1}{2}$

3) $f(x)=\frac{2x-3}{x}$; $a=0$

4) $f(x)=\frac{4x+3}{2x^2}$; $a=0$

5) $f(x)=\frac{3x}{x^2-4}$; $a=-2$

6) $f(x)=\frac{x+1}{2x^2+x-3}$; $a=1$

19 احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$ ثم إلى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^2-3x+1$ 2) $f(x)=-x^3+1$

3) $f(x)=\sqrt{2}x^3+4x-2$ 4) $f(x)=10^{-3}x^2+4$

5) $f(x)=-x^4+2x^3-x$ 6) $f(x)=x^7-15x^5$

20 احسب نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$ ثم إلى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{5x^3-1}{2x-3}$

3) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{2x^3+5x^2-1}$ 4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{-x^2-x^2-3}$

21 f و g دالتان. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=2x-1$ و $g(x)=-x$

2) $f(x)=x^2+3$ و $g(x)=-x^2$

3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=-3x$

4) $f(x)=2x^2+x-1$ و $g(x)=-x^3+2x+4$

22 احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\times g)(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^2$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ و $g(x)=x$

3) $f(x)=2x^3+1$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^3}$

23 احسب في كل حالة من الحالات التالية

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

1) $f(x)=x$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$

2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

النهايات و المستقيمات المقاربة

24 باستعمال النظريات العامة حول النهايات احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أكّد إن كان منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$ 2) $f(x)=x+\sqrt{x}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 6) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-3$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$ 8) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-2}{\frac{1}{x}+1}$

9) $f(x)=\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$ 10) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-4}{\frac{2}{x^2}+1}$

25 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أكّد إن كان منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل

1) $f(x)=x^2+2x-3$ 2) $f(x)=x^3-x+\dfrac{1}{x}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ 4) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1$ 6) $f(x)=\dfrac{2x}{1-\frac{1}{x^2}}$

7) $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+4}$ 8) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x+\frac{1}{x}}$

9) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 10) $f(x)=(x-1)^3$

26 احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و أكّد إن كان منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2$ 4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ 6) $f(x)=\dfrac{1}{3-\frac{1}{x}}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 8) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2x}+1$

27 احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أكّد إن كان منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1}$

2) $f(x)=\dfrac{4x^5-3x^2}{2x^5}$

3) $f(x)=\dfrac{-2x^4+x^3-x+1}{x^4+1}$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{-x^3+2x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^4-1}$

الدوال كثيرات الحدود المقاربة

28 ادرس تغيرات الدالة f ثم مثلها بيانياً في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I,J)$

1) $f(x)=3x^2-6x+3$

2) $f(x)=x^2-5x+6$

3) $f(x)=-x^2+2x+3$

4) $f(x)=2(x-1)(3-x)$

29 ادرس تغيرات الدالة f ثم أثبت أن النقطة I مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f و ارسم (C_f)

1) $f(x)=x^3-x+1$ و $I(0;1)$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x+1$ و $I(0;-1)$

3) $f(x)=x^3-3x^2+3$ و $I(1;1)$

دراسة الدوال الناطقة

30 ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2}$

3) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-2}$ 4) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}$

5) $f(x)=\dfrac{2x+10}{x-5}$ 6) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

31 ادرس تغيرات الدالة f و بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لمنحنى الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-1}{x}$; $(\Delta): y=x+5$

2) $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}$; $(\Delta): y=x-1$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; $(\Delta): y=x+1$

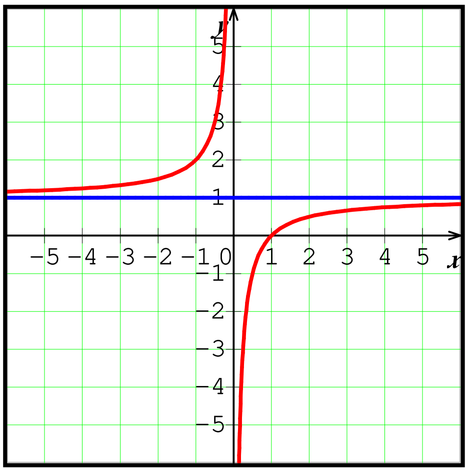
4) $f(x)=x+1+\dfrac{x}{x-2}$; $(\Delta): y=x+2$

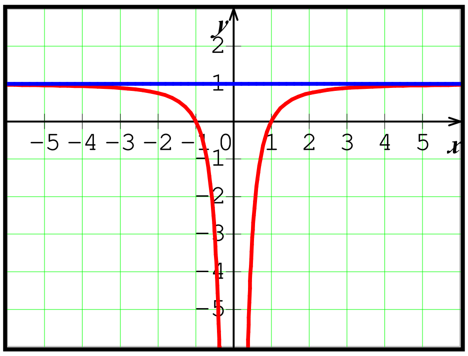
32 أنسب لكل دالة منحنيها البياني من بين المنحنيات التالية

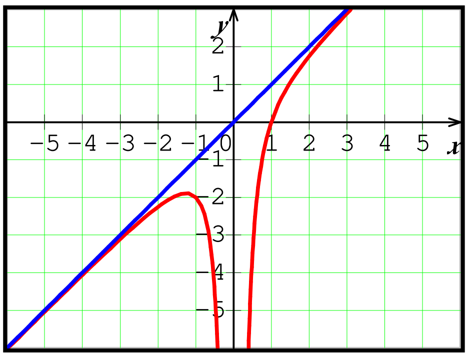
$f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ ، $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

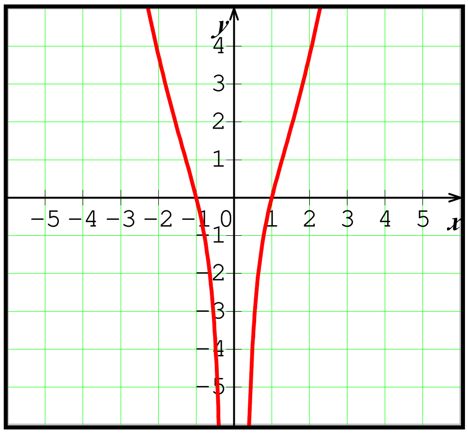
$h(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ ، $k(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$

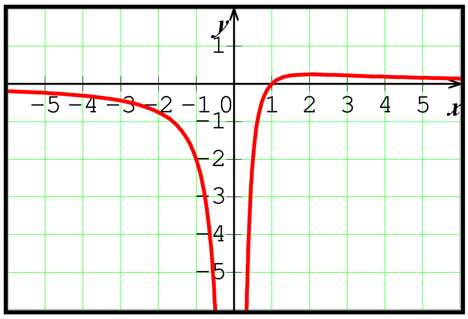
$l(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ ، $m(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$

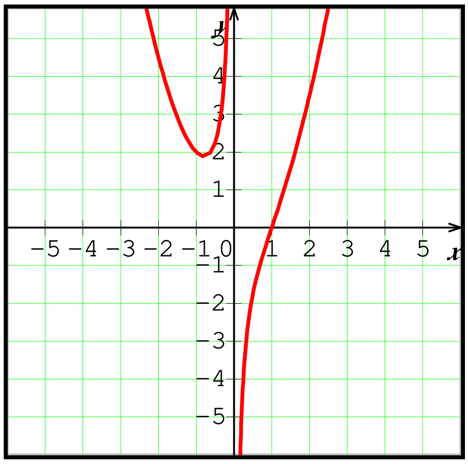












33 احسب نهاية f عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{3x^2-x}\;;\;x_0=0$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x+2}\;;\;x_0=2$

3) $f(x)=\dfrac{(x-1)(2x-3)}{x^2-1}\;;\;x_0=1$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\;;\;x_0=1$

5) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\;;\;x_0=4$

6) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}\;;\;x_0=1$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{(x^2-9)^2}\;;\;x_0=3$

8) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}\;;\;x_0=1$

9) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}\;;\;x_0=2$

10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x^2-x}\;;\;x_0=0$

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x^2-x}\;;\;x_0=1$

34 احسب نهاية f عندما يؤول x إلى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$

2) $f(x)=-2x+3+\dfrac{x}{x^2-1}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2+3}+x$

4) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

5) $f(x)=\sqrt{4x^2-3x-1}-2x$

6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$

8) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1-2x^2}{x+2}$

35 ادرس تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية و تحقق من نتائجك بواسطة الحاسبة البيانية(رسم (C_f))

1) $f(x)=x^3+x-1$

2) $f(x)=2x^4-x^2-3$

3) $f(x)=x^4-8x^3+16x^2-9$

4) $f(x)=-x^3-\dfrac{3}{2}x^2-1$

36 مثل بيانيا الدوال المعرفة في التمرين السابق

37 ادرس تغيرات الدوال التالية و مثلها بيانيا

1) $f(x)=\dfrac{6x-1}{3-2x}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-x+1}$ (5

، 5) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2}$ ، 6) $f(x)=x-1-\dfrac{3}{x}$

7) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x}$

38 لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث :

$$f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا:

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$0\le f(x)\le\frac{3}{\sqrt{x}}$$

3) استنتج نهاية f عندما يؤول x إلى $+\infty$

39 لتكن f دالة معرفة على $D=]0;+\infty[$ حيث:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1) أملئ الجدول التالي:

x	10^4	10^6	10^{10}	10^{12}	10^{20}	10^{40}
$f(x)$						

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا:

$$x^2\le x^2+x+1\le(x+1)^2$$

و $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

3) استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا:

$$1-\frac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

40 f دالة معرفة على $D=]0;+\infty[$ حيث

$$f(x)=\frac{3+\sin x}{x}$$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا:

$\frac{2}{x}\le f(x)\le\frac{4}{x}$ (تذكير $-1\le\sin x\le1$)

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

41 f دالة معرفة على $D=]0;+\infty[$ حيث

$$f(x)=\frac{x^2+\sin x}{x}$$

1)) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D يكون:

$$\frac{x^2-1}{x}\le f(x)\le\frac{x^2+1}{x}$$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

42 بحصر الدالة f بدالتين بسيطتين احسب نهايات f عندما يؤول x إلى $-\infty$ و عندما يؤول x إلى $+\infty$ (في حلة وجودها)

1) $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$

2) $f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+3}$

3) $f(x)=\cos x - x$

4) $f(x)=\frac{5+\cos x}{x}$

بالعبارة : $f(x)=3+\frac{2}{x-1}$

المستقيمات المقاربة

43 f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

1) أثبت ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) الممثل للدالة f

2) ادرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (D)

44 f دالة معرفة على $D=\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{2x-1}{2-x}$$

1) أثبت أنه يوجد عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد x من D يكون: $f(x)=a+\frac{b}{2-x}$

2) استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2$ مقارب لـ(C) منحنى الدالة f .

3) ادرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ)

45 f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

بالعبارة : $f(x)=2x-1+\frac{1}{x+1}$

1) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى (C) الممثل للدالة f .

2) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

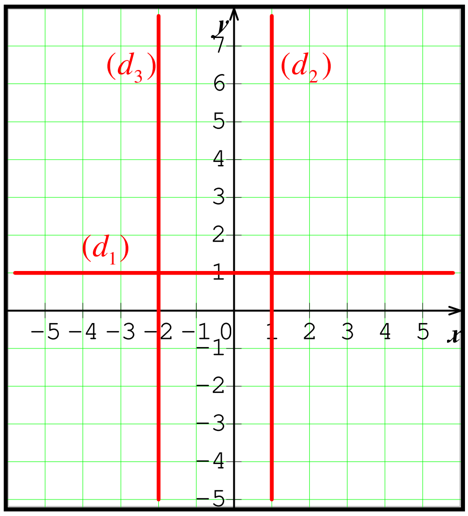
46 f دالة معرفة على $D=\mathbb{R}-\{3\}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x-3}$$

1) أوجد الأعداد الحقيقة a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D يكون: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$

2) استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x+6$ مقارب مائل للمنحنى (C) الممثل للدالة f .

47 المنحنى (C) لدالة يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة (d_1) و (d_2) و (d_3) فقط حيث:



a عدد حقيقي غير معدوم

1) من بين الدوال التالية ما هي التي توفر الشروط السابقة؟

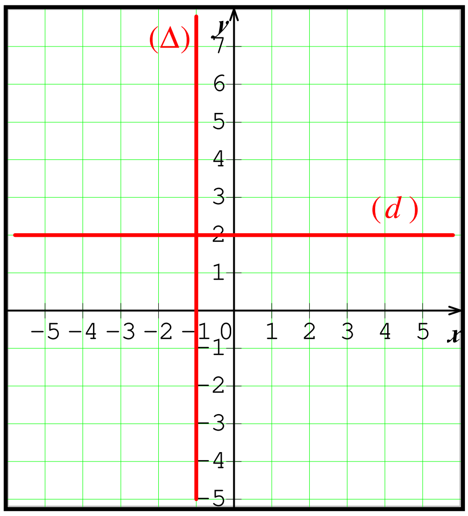
$$f(x)=\frac{2x^2+ax}{x^2+x-2}$$

$$g(x)=\frac{4x+a}{(x+2)(x-1)}$$

$$h(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{1}{x-1}+1$$

2) عين a إذا كان (C) يقطع (d_1) من أجل $x=1$

48 المنحنى (C) الممثل لدالة يقبل مستقيمين مقاربين فقط (d) و (Δ) (انظر الشكل)



1) إليك الدوال f ، g ، h و k. ما هي التي يكون (C) تمثيلها البياني؟

$$f(x)=\frac{x+2}{2(x+1)} \quad ، \quad g(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$h(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-1} \quad ، \quad k(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

2) ادرس تقاطع (C) مع (d) و مع محوري الاحداثيات

تقاطع المنحنيات

49 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2}{x+2} \quad \text{و} \quad g(x)=x-2-\frac{4}{(x+2)^2}$$

1) (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أثبت أن (C_f) و (C_g) لهما نفس المستقيمين المقاربين (المائل و العمودي).

2) عين نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

50 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x^3-3x^2-5x+4$.

(C) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) أثبت أن النقطة $S(1;-3)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

3) ارسم (C) .

4) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي :

$$g(x)=-1+\frac{5}{x+1}$$

ليكن (H) المنحنى البياني للدالة g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- ادرس تغيرات الدالة g .
- ارسم (H) .

5) تحقق (C) و (H) يشملان النقطة $A(0;4)$ ، ثم ادرس تقاطع (C) و (H) .

6) أثبت أن نقطتين من نقط تقاطع (C) و (H) متناظرتين بالنسبة للنقطة S .

7) برهن أن (C) و (H) لهما مماس مشترك في النقطة A .

51 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x^3+3x$

و g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث: $g(x)=5x-\frac{1}{x}$

نسمي (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (C_f)

2) ادرس تغيرات الدالة g .

3) ليكن (d) المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_g).

عين معادلة للمستقيم (d) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_g) و (d) .

▪ ارسم (C_g) في نفس المعلم

4) أثبت أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثييهما .

– برهن أن (C_f) و (C_g) يقبلان مماسان مشتركان في النقطتين A و B و أن هذين المماسين متوازيين.

حل المعادلات و المتراجحات

52 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{-x^2+x-1}{x}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) – أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=1-x$.

– ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (Δ) و (C) .

3) m عدد حقيقي. ناقش بيانيا و حسب قيم العدد m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

4) لما يكون المستقيم الذي معادلته $y=m$ يقطع (C) في نقطتين متمايزتين M و N ، أحسب بدلالة m احداثيي النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

5) A و B النقطتين من (C) اللتين يكون فيهما المماس موازيا لمحور الفواصل.

أثبت أن النقط A ، B و I في استقامية.

53 f دالة معرفة على $D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن f دالة زوجية.

2) ادرس تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$

3) استنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له.

4) (P) المنحنى الذي معادلته $y=x^2+2$. M نقطة من (C) فاصلتها x و N نقطة من (P) فاصلتها x .

▪ احسب المسافة MN بدلالة x .

▪ ما هي نهاية MN عندما يؤول x إلى $+\infty$ ؟ إلى $-\infty$؟

5) ادرس وضعية (C) و (P).

6) ارسم (C) و (P) في نفس المعلم .

54 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر القطع الزائد (H) الذي معادلته $y=\frac{1}{x}$ و لتكن النقطة $A\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$. M نقطة كيفية من (H) فاصلتها x.

نضع: $f(x)=AM^2$.

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة x .

2) ادرس تغيرات الدالة f

(لاحظ أن الدالة f' تنعدم عند $x=\frac{1}{2}$)

3) ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f .

4) لتكن g دالة معرفة بالعبارة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$

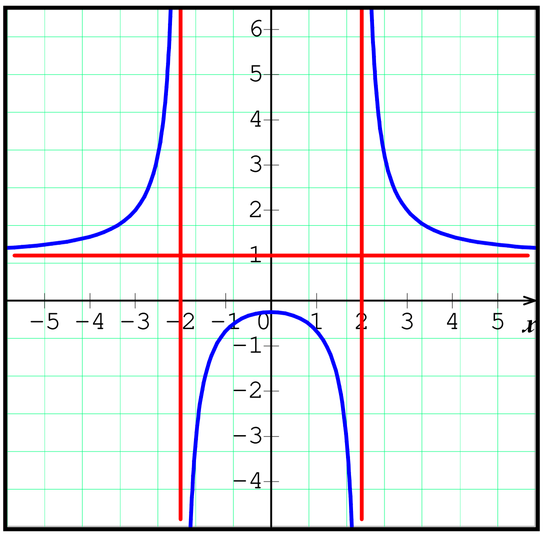
– ادرس تغيرات الدالة g .

5) استنتج انه يوجد نقطتين M_1 و M_2 من القطع الزائد (H) فاصلتاهما x_1 و x_2 على الترتيب بحيث تكون المسافة AM قيمة صغرى.

6) أثبت أن المماس لـ (H) في النقطة M_1 يعامد المستقيم (AM_1) .

– أثبت أن المماس لـ (H) في النقطة M_2 يعامد المستقيم (AM_2) .

55 الشكل المقابل يمثل المنحنى البياني (C) الممثل لدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $f(0)=-\frac{1}{4}$



باستعمال المنحنى (C)

1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

2) عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3) مثل جدول تغيرات الدالة f .

56 لتكن الدالة f المعرفة بـــ

$$f(x)=\frac{x+\cos x}{x^2+x+1}$$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f :

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}\leq f(x)\leq\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

3) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

57 لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		-3		1 ‖		4		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	3

1) أعط معادلة لكل مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f

2) في معلم متعامد و متجانس ،ارسم تمثيل بياني ممكن (C) للدالة f و كذا المستقيمات و المقاربة لــ (C).

58 لتكن الدالة f المعرفة بـــ:

$f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-1)^2}$ و (C) تمثيلها البياني

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.

2) أ- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب- استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).

3) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$f(x)=x+a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

4) بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً يطلب تعيين معادلة له.

5) ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=x+1$

عين نقط تقاطع المنحنى (C) و المستقيم d.

59 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-2x+1}{x-1}$$

1) بوضع $x=1+h$ ، عين الدالة φ حيث $\varphi(h)=f(x)$

2)استنتج $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

60 لتكن الدالة f المعرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x+2}$$

1) احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى -2 .

2)عين الأعداد a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي من D_f : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

3) جد معادلة لمستقيم مقارب مائل Δ للمنحنى (C) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

4) تحقق أن Δ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

5) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

61 لتكن الدالة f المعرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3+3}{x^2-1}$$

1) عين الأعداد a ، b ، c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{x+1}$

2) استنتج معللا جميع المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل للدال f .

– عين وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

62 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$. (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

– أعط تفسيراً هندسيا لهذه النتيجة.

2) أ) عين الأعداد a ، b ، c حيث من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=a+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

ب) ليكن (D) الذي معادلته $y=2$

– عين الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D) .

63 لتكن الدالة u المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $0\leq u(x)\leq x$

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+\frac{u(x)}{x^2}$$

1) بين أنه إذا كان $x\geq1$: $|f(x)-1|\leq\dfrac{1}{x}$

2) ماذا تستنتج بالنسبة لنهاية f عندما يؤول x إلى $+\infty$

64 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{13}{12}$$

1) أحسب نهايتي الدالة f بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

2) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على $\mathbb{R}$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أثبت أن النقطة $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ مركز تناظر للرسم البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

5) استنتج حلول المعادلة : $f(x)=0$

6) مثل بيانيا الدالة f .

7) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

65 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-\sin x$.

1) أثبت أن f دالة فردية

2) ليكن عدد حقيقي من المجال $[0\,;\,2\pi]$ ، أحسب $f(x+2\pi)$ ، $f(x+4\pi)$ ، $f(x+k2\pi)$ (k عدد صحيح) .

3) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0\,;\,2\pi]$

أكّد أن f دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$x-1\le f(x)\le x+1$.

5) ليكن A عدد حقيقي موجب تماما . أثبت أنه من أجل كل عدد x حيث $x\ge 1+A$ يكون $f(x)\ge A$.

استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

6) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

7) مثل بيانيا الدالة f في المجال $[-6\pi\,;\,6\pi]$.

66 f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$.

نعطي جدول تغيرات الدالة f :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{2}$	↗	$+\infty$

نفرض أنه من أجل كل $x>1$ ، $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=ax+\dfrac{b}{x-c}$ ، a ، b و c أعداد حقيقية نريد تعيينها . نسمي (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب . استنتج قيمة c .

2) انطلاقا من عبارة $f(x)$ ، بين أن لدينا العلاقة $6a+b=5$.

3) انطلاقا من عبارة $f'(x)$ بين أن لدينا $4a-b=0$

4) استنتج عبارة $f(x)$ وبرهن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $x-2y=0$ مقارب للمنحنى (C_f) .

5) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) .

6) أرسم (C_f) ومستقيميه المقاربين .

67 f دالة معرفة بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^3+9}{x^2-1}$.

(C_f) رسمها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) برهن أنه من أجل كل x من D_f لدينا :

$$f(x)=x+\frac{5}{x-1}-\frac{4}{x+1}$$

3) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب .

4) أحسب نهايتي f بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

• بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيينه

5) أثبت أن f قابلة للاشتقاق على D_f ، وبين أن : $f'(x)=\frac{P(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$ حيث $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الرابعة .

• بين أن 3 جذر لـ $P(x)$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء.

• استنتج إشارة $f'(x)$ على D_f

• شكل جدول تغيرات الدالة f .

68 I) f دالة معرفة بالعلاقة $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$.

(C_f) رسمها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

بسط عبارة $f(x)$ في المجال $]-\infty;0]$ وفي المجال $[0;+\infty[$.

2) أثبت أن الدالة f فردية .

3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4) بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in[0;+\infty[$.

أدرس قابلية اشتقاق f عند 0 .

شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

5) أرسم (C_f) .

6) ليكن y عدد حقيقي من المجال $]-1;1[$. أحسب السابقة الوحيدة للعدد y بواسطة الدالة f .

(نميز بين الحالتين $y\le 0$ و $y\ge 0$)

7) استنتج أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا x حيث : $x=\frac{y}{1-|y|}$.

II) g دالة معرفة بالعلاقة $g(x)=\frac{x}{1-|x|}$.

(C_g) رسمها البياني .

1) عين مجموعة تعريف الدالة g .

2) عين على كل من المجالين $]-1;0]$ و $[0;1[$ عبارة مبسطة لـ $g(x)$.

3) أحسب $\lim_{x\xrightarrow{<}1} g(x)$.

4) أحسب $g'(x)$ على المجال $[0;1[$.

أدرس قابلية اشتقاق g من أجل 0 .

شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-1;1[$.

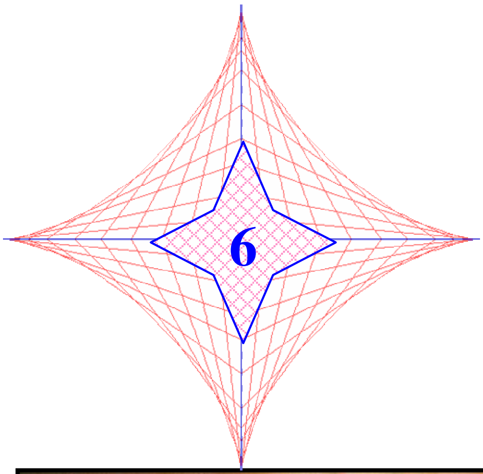
5) أرسم (C_g) .

أحسب $(f\circ g)(x)$ من أجل x من المجال $]-1;1[$

6) لتكن النقطة $M(x;y)$ و N نظيرتها بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$. أثبت أن إحداثيي N هي $(y;x)$ 0

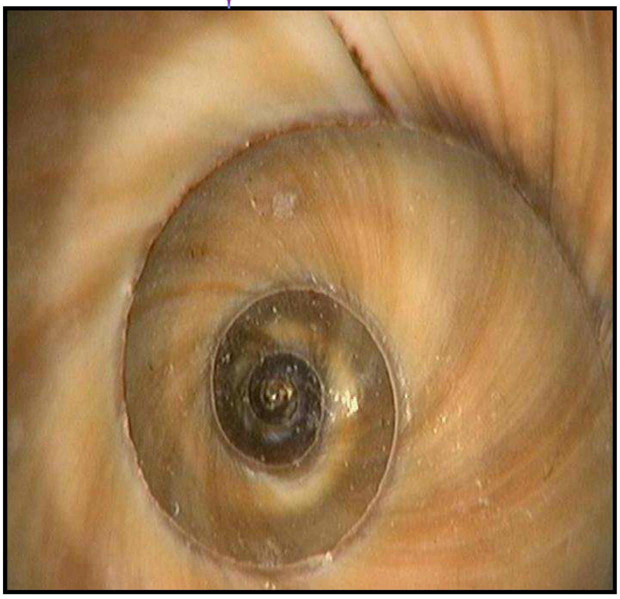
• استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;1[$ إذا كانت M نقطة من (C_g) فاصلتها x فإن N نظيرة M بالنسبة للمستقيم (D) تنتمي إلى (C_f) .

• ماذا تستنتج ؟



المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة



- وصف ظاهرة بواسطة متتالية.
- التعرف على اتجاه تغير متتالية.
- التعرف على متتالية حسابية (هندسية).
- حساب الحد العام لمتتالية حسابية (هندسية).
- حساب مجموع p حدا متعاقبا.
- حساب نهاية متتالية عددية.

Fibonacci 1170 / 1240

كان ليوناردو دو بيز (*Leonard de Pise*) الملقب بـ *Fibonacci* من أكبر علماء الرياضيات و قد ولد عام 1170م بمدينة بيز (*Pise*) بايطاليا. سافر كثيرا عبر حوض البحر الأبيض المتوسط بهدف تعلم طرق الحساب المستعملة في الشرق و العلاقات الرياضياتية المستخدمة في بناء أهرامات الجيزة بمصر. و إثر عودته إلى ايطاليا أصدر عدة كتب. و يرجع له الفضل في تعريف الغرب بالأرقام العربية بما فيها العدد 0 كما أنه استعمل كلمة sinus.

من خلال اهتمامه بتكاثر أرانب قام بدراسة المتتالية التي تعرف باسمه و التي حدودها هي: 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، 34، 55، 89، 144، ...
نلاحظ أنه انطلاقا من الحد الثالث يتم الحصول على حد بجمع الحدين السابقين كما نلاحظ أن النسبة بين حدين متتابعين تؤول إلى العدد الذهبي بقيم أصغر و بقيم أكبر فمثلا:
$55/34 = 1,6167...$ و $89/55 = 1,6181...$ و $144/89 = 1,6179...$ ، ...

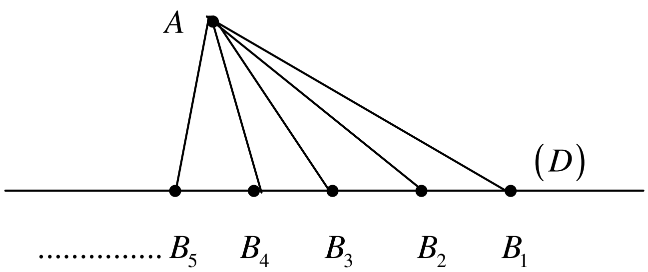
نشاط أول

نعتبر قائمة مضاعفات العدد 5 : 0 ، 5 ، 10 ،15 ، 20 ،... و نرمز لها على الترتيب بـــ u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، ...

1) أحسب u_5 ، u_6 ، u_7 ، u_8 و بتخمين أحسب u_{18} ، u_{120} و أكتب u_n بدلالة n .

نشاط ثان

ليكن (D) مستقيما من المستوي و A نقطة لا تنتمي إلى (D).لتكن B_1 ، B_2 ، B_3 ،........، B_n n نقطة من المستقيم (D). من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نسمي u_n عدد المثلثات المحصل عليها بربط النقطة A إلى n نقطة B_1 ، B_2 ، B_3 ،........، B_n .



فعليه: من أجل $n=1$ $u_1=0$

من أجل $n=2$ $u_2=1$

من أجل $n=3$ $u_3=3$

من أجل $n=4$ $u_4=6$

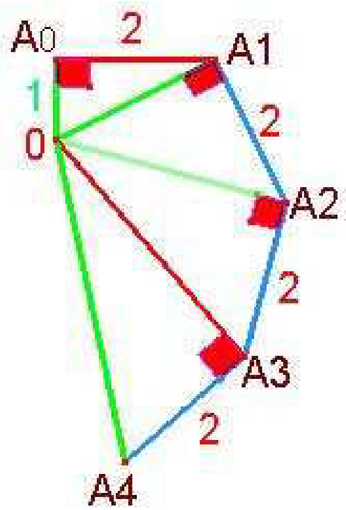
1) أحسب u_5 ، u_6 ، u_7 ، u_8 .

2) نلاحظ أن للحصول على u_5 مثلا نضيف إلى u_4 عدد المثلثات التي أحد أضلاعها $[AB_5]$. بصفة عامة للحصول على u_{n+1} نضيف إلى u_n عدد المثلثات التي أحد أضلاعها $[AB_{n+1}]$.

عين علاقة بين u_{n+1} و u_n .

3) أحسب u_{13}

نشاط ثالث



O ، A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ،...، A_n نقط من المستوي .

نضع $OA_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$A_{n+1}A_n=2$. حيث أن :

المثلثات OA_0A_1 ، OA_1A_2 ، OA_2A_3 ، OA_3A_4 ،

OA_4A_5 ،...، $OA_{n-1}A_n$ قائمة على التوالي في النقط

A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 ، .... ، A_{n-1} . على الترتيب

1) نضع من أ جل كل عدد طبيعي n: $u_n=OA_n^2$. أكتب u_{n+1} بدلالة u_n .

أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) بتخمين أكتب u_{n+1} بدلالة u_n .

نشاط رابع

لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2+1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Δ) مستقيم معادلته $y=x+1$.

1)ارسم (C_g) و (Δ) ثم عين إحداثيات نقطتي تقاطعهما .

2) لتكن النقطة $O'(0,1)$. أكتب معادلة لكل من (C_g) و (Δ) في المعلم $(O';\vec{i},\vec{j})$ حيث $y'=f(x')$ معادلة (C_g) في المعلم $(O';\vec{i},\vec{j})$.

3) لتكن A النقطة من (C_g) التي فاصلتها u_0 حيث $u_0=\dfrac{3}{4}$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.
المستقيم الذي يشمل النقطة A و يوازي محور الفواصل يقطع (Δ) في النقطة B.

- أثبت أن فاصلة B هي u_1 .
- عين بنفس الطريقة النقط C ، D ، E التي فواصلها على الترتيب u_2 ، u_3 ، u_4 .

4) u هي الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي u_n .
علما أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0,1]$ لدينا $0<x^2<x<1$ أثبت أن الدالة u متناقصة تماما .
قارن بين اتجاهي تغير كل من الدالتين f و u .

نشاط خامس

A. تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـــ $10000\ DA$ في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـــ 10% نسمي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـــ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n\geq 1)$.

1) أحسب ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 ، u_7 .

2) عين علاقة بين u_{n+1} و u_n .

B . تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـــ $10000\ DA$ الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـــ $1200\ DA$ بعد كل سنة نسمي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .
نرمز بـــ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n\geq 1)$.

1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 ، v_7.

2) عين علاقة بين v_{n+1} و v_n .

3) يريد موظف أن يتعاقد مع إحدى الشركتين لمدة 7 سنوات . أي العقدين أكثر فائدة ؟

المتتاليات العددية.

1.متتالية عددية.

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـــ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:
- المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-5n^2+2$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}-\{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n\geq 1}$.
- المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ و نكتب $(w_n)_{n\geq 6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 و أما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b\in\mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2.طرق توليد متتالية عددية.(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

توليد متتالية عددية بالحد العام:

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$ حيث $f:x\mapsto -x^2+3$.

توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

- لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$ الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u .

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n$.

لدينا $u_0=1$ و منه $u_1=3u_0=3$ ، $u_2=3u_1=9$ ، $u_3=3u_2=27$ و هكذا ...

تمرين محلول 1

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n^2+1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-3x^2+1$.

الهدف من التمرين التحكم في حساب حدود متتالية معرفة بهذا الشكل واستخدام الدليل الإستخدام الجيد

حـــل:

1) $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_3=-3(3)^2+1=-26$

$u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$ ، $u_{134}=-3(134)^2+1=-53867$.

2) $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

$u_{3n+2}=-3(3n+2)^2+1=-27n^2-36n-11$.

تمرين محلول 2

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} .ثم ضع تخمينا

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x)=\dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0,+\infty[$ وبما أن $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

حـــل:

1) $u_1=\dfrac{3}{2+u_0}=\dfrac{3}{4}$ ، $u_2=\dfrac{3}{2+u_1}=\dfrac{3}{2+\frac{3}{4}}=\dfrac{12}{11}$ ، $u_3=\dfrac{3}{2+u_2}=\dfrac{3}{2+\frac{12}{11}}=\dfrac{33}{34}$.

2) الحاسبات تبين أن $u_{10}\approx 1$ ، $u_{11}\approx 1$ و $u_{12}\approx 1$.

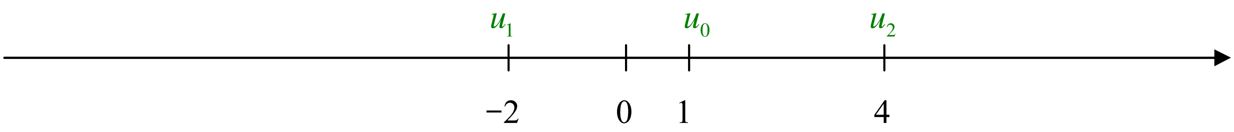
نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقا من $n=10$.

التمثيل البياني لمتتالية عددية.

1.متتالية معرفة بالحد العام.

- **يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور**

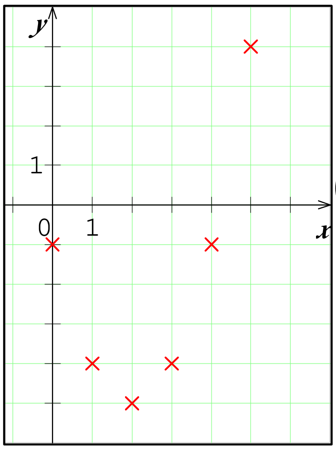
مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = (-2)^n$.



- **يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).**

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - 4n - 1$.

(u_n) معرفة كذلك $u_n = f(n)$ حيث: $f : x \mapsto x^2 - 4x - 1$ نعرف f على المجال $[0, +\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n, f(n))$ من أجل $n = 0$ ، $n = 1$ ، $n = 2$ ، $n = 3$ ، $n = 4$ و $n = 5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. مجموعة النقط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .



2.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.
مجموعة النقط $M(u_n, f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة) .

إتجاه تغير متتالية عددية.

1.متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

2.متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

3.متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} = u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

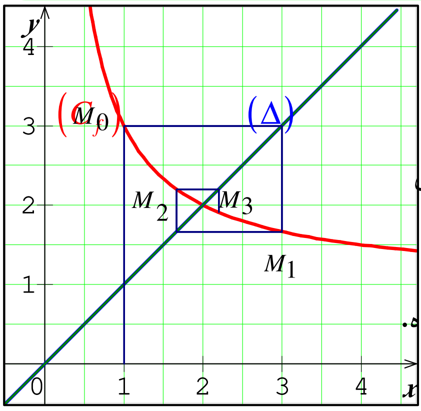
4. متتالية رتيبة: المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) .

تمرين محلول 3

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

طريقة: لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y=x$. لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n,u_{n+1})$.



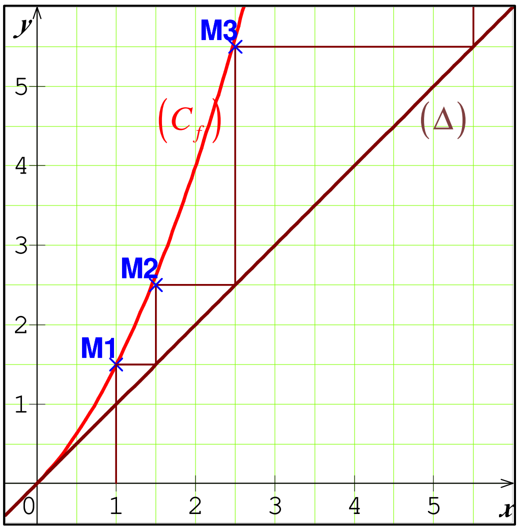
حـــل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\frac{2+x}{x}$

نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\frac{5}{3}\right)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

تمرين محلول 4

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+u_n$.

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .



حـــل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ المعرفة على $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

تمرين محلول 5

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=\frac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\frac{2n-1}{n+3}$

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

1) ندرس إشارة $u_{n+1}-u_n$ أو

2) نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و **1** .

3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

حـــل: • اتجاه تغير المتتالية (u_n). $u_{n+1}-u_n=\frac{-2n-1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن الدالة f حيث $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

المتتاليات الحسابية.

1 . تعريف متتالية حسابية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.

يسمى r أساس المتتالية (u_n).

ملاحظة: إذا كان $r=0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول u_0 .

أمثلة: • المتتالية (u_n) حيث أن $u_n=3n+5$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5$ أساسها $r=3$.

• مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية متتالية حسابية حدها الأول 1 أساسها 2 .

2.الحد العام لمتتالية حسابية :

مبرهنة 1:(تقبل بدون برهان) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r.

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr$ من أجل كل عدد طبيعي n :

ملاحظات: • إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n=u_1+(n-1)r$.

• بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي الحد $u_n=u_p+(n-p)r$.

• تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.

3.مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

مبرهنة 2: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. ليكن المجموع : $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n : $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

S يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول و الحد الأخير .

برهان: ليكن p عدد طبيعي أصغر من n، لدينا $u_p=u_0+pr$ و $u_{n-p}=u_0+(n-p)r$.

و منه $u_p+u_{n-p}=u_0+u_0+nr=u_0+u_n$.

نكتب S بطريقتين ثم نجمع المساواتين طرف بطرف .

$$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$$

$$S=u_n+u_{n-1}+........+u_1+u_0$$

و منه $2S=u_0+u_n+u_1+u_{n-1}+......+u_{n-1}+u_1+u_n+u_0$

أي $2S=u_0+u_n+u_0+u_n+......+u_0+u_n+u_0+u_n$ بتطبيق $u_p+u_{n-p}=u_0+u_n$

و منه $2S=(n+1)(u_0+u_n)$ إذن $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$.

تمرين محلول 5

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -7n+12$.

• أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

طريقة: للبرهان على أن متتالية (u_n) متتالية حسابية يمكن البرهان على أن الفرق بين حدين متتابعين كيفيين عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

حـــل: المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذا حدها الأول u_0 ، $u_0 = 12$. لنحسب $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = -7(n+1) + 12 - (-7n+12) = -7$. إذن $u_{n+1} - u_n = -7$ من أجل كل عدد طبيعي n .

و منه المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -7$ و حدها الأول $u_0 = 12$.

تمرين محلول 6

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

حـــل: بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذا حدها الأول هو v_0 ، $v_0 = u_1 - u_0$.

$u_1 = u_0 - 3(0) + 1 = -1$ و منه $v_0 = u_1 - u_0 = -1 - (-2) = 1$. لنحسب $v_{n+1} - v_n$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = -3n+1$.إذن : $v_n = -3n+1$

$v_{n+1} - v_n = -3(n+1) + 1 - (-3n+1) = -3$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -3$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$ و حدها الأول $v_0 = 1$.

.

تمرين محلول 7

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $r = -2$ ، و حدها الأول $u_0 = 204$.

• أحسب $S = u_{10} + u_{11} + ... + u_{216} + u_{217}$.

طريقة إيجاد عدد حدود لمتتالية : a و b عددان طبيعيان حيث $a < b$ عدد الحدود u_a ، u_{a+1} ، u_{a+2} ، . . . ، u_b لمتتالية (u_n) هو: $\boxed{b-a+1}$

حـــل: عدد الحدود هو $217 - 10 + 1 = 208$.

$u_{10} = u_0 + 10r = 204 - 20 = 184$.

$u_{217} = u_0 + 217(-2) = -230$.

$$S = \frac{208}{2}(u_{10} + u_{217})$$
$$= 104(184 - 230)$$
$$= -4784$$

المتتاليات الهندسية.

1 . تعريف متتالية هندسية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$.

يسمى q أساس المتتالية (u_n).

ملاحظة:
- إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0.
- إذا كان $q=0$ فإن حدود المتتالية معدومة إبتداءًا من الحد الثاني.

مثال: • المتتالية (u_n) حيث أن $u_n=2^n$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ أساسها $q=2$.

2.الحد العام لمتتالية هندسية :

مبرهنة 1:(تقبل بدون برهان) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q.

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n=u_0\times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظات:
- إذا كان الحد الأول u_1 عبارة الحد العام $u_n=u_1\times q^{n-1}$.
- بصفة عامة إذا كان u_p (p عدد طبيعي أصغرمن n) الحد الأول فإن عبارة الحد العام $u_n=u_p\times q^{n-p}$.
- تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.

3.مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

مبرهنة 2: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q. ليكن المجموع : $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

- إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n .
- إذا كان $q\neq 1$ فإن $S=u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

S يساوي الحد الأول مضروب في النسبة $\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ حيث. $n+1$ هو عدد الحدود .

البرهان:
- في الحالة $q=1$ ، S هو مجموع $n+1$ مرة الحد u_0 و منه $S=(n+1)u_0$.
- في الحالة $q\neq 1$.

ليكن المجموع $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

$S=u_0+u_0\times q+........+u_0\times q^{n-1}+u_0\times q^n$

و منه $S=u_0(1+q+........+q^{n-1}+q^n)$. نضرب الطرفين في q نحصل على :

$(1-q)S=u_0(1-q+q-q^2+q^2-........+q^{n-1}-q^n+q^n-q^{n+1})$ أي : $(1-q)S=u_0(1-q^{n+1})$

و بالتالي $S=u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$.

تمرين محلول 8

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{1}{2^n}$.

• أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

طريقة: للبرهان على أن متتالية (u_n) هندسية نحاول كتابة u_{n+1} على الشكل $u_{n+1} = u_n \times q$ حيث q عدد حقيقي مستقل عن n أو أن كل الحدود u_n غير معدومة و النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

حـــل: المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذن حدها الأول هو u_0 ، $u_0 = 1$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} = u_n \times \frac{1}{2}$$

و منه المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 1$.

تمرين محلول 9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = 4u_n + 6$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 2$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

حـــل: بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذن حدها الأول هو $v_0 = u_0 + 2 = 5$.

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 = 4u_n + 8 \\ &= 4(u_n + 2) = 4v_n \end{aligned}$$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 4v_n$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ و حدها الأول $v_0 = 5$.

تمرين محلول 10

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، و $u_5 = \frac{1}{32}$.

• أحسب u_{2007} .

• أحسب $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{28} + u_{29}$.

حـــل: • نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

إذا $u_{2007} = u_5 \times q^{2007-5} = \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2002} = \frac{1}{2^{2007}}$.

• نعلم أنه إذا كان $q \neq 1$ لدينا $S = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و و منه $S = 2\left(1 - \frac{1}{2^{30}}\right)$

نهاية متتالية عددية.

1.متتالية عددية متقاربة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . ونكتب: $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظات: • إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

• إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

2.نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة.

مبرهنة1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

3.نهاية غير منتهية لمتتالية عددية.

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

• المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مثال1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = n^2$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $n^2 \in]\alpha,+\infty[$ إبتداءا من $n \ge n_0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

مثال2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = -n^2 - 1$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2-1) \in]-\infty,\alpha[$ إبتداءا من $n \ge n_0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مبرهنة2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي .

• إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة: النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

تمرين محلول12

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\frac{1}{n}$.

• باستعمال التعريف ، أثبت أن نهاية (u_n) هي **0** .

حــــل:

لنبرهن على هذا .ليكن مجال $]\alpha,\beta[$ يشمل 0 .ليكن عدد طبيعي p حيث :

$p>\frac{1}{\beta}$ و $p>-\frac{1}{\alpha}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ($n\geq p$)

لدينا $\alpha<-\frac{1}{p}<\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n}<\frac{1}{p}<\beta$ إذا $\alpha<\frac{1}{n}<\beta$ ومنه إبتداءا من الرتبة p $\alpha<u_n<\beta$. و بالتالي.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

تمرين محلول13

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\frac{3n+1}{n+2}$.

• عين نهاية المتتالية (u_n).

حــــل: المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\frac{3x+1}{x+2}$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$. إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

تمرين محلول14

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\frac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

• عين نهاية المتتالية (u_n).

حــــل:

نحول العبارة $u_n=\frac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

$$u_n=\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=n\times\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n}=2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر.

مبرهنة1: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \le u_n \le w_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

برهان: ليكن D مجالا يشمل l ، D يشمل كل حدود المتتالية (v_n) انطلاقا من n_1 و D يشمل كل حدود المتتالية (w_n) انطلاقا من n_2 . ليكن n_3 أكبر العددين n_1 و n_2 ، D يشمل كل حدود (v_n) و (w_n) انطلاقا من n_3 و بما أن $v_n \le u_n \le w_n$ فإن D يشمل كل حدود المتتالية (u_n) انطلاقا من n_3 . و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

مبرهنة2: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \ge v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

برهان: ليكن $]\alpha,+\infty[$ مجالا . $]\alpha,+\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (v_n) و بما أن $u_{n_0} \ge v_{n_0}$ فإن المجال $]\alpha,+\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (u_n) معينة p ، من أجل $n \ge n_0$ ، $u_n \ge v_n$ ليكن q الأكبر من بين p و n_0 . إذا كان $n \ge q$ فإن $v_n \in]\alpha,+\infty[$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

مبرهنة3: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \le v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

برهان: نفس البرهان مع المبرهنة 2 بوضع $u_n = -U_n$ و $v_n = -V_n$.

نهاية متتالية هندسية.

مبرهنة: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q .

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q \le -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

أمثلة: 1) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية متقاربة نحو 0 لأن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $q = \frac{1}{2}$ و $-1 < q < 1$ و منه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2) المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n = 3^n$ متتالية متباعدة لأن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها $q' = 3$ و $q' > 1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3) المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $w_n = (-3)^n$ متتالية متباعدة لأن (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها $q" = -3$ و $q' < -1$ و منه النهاية غير موجودة .

تمرين محلول15

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{4n}{2n+3}\leq u_n \leq \frac{2n+1}{n}$.

• عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

حـــل: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n}{2n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\left(2+\frac{3}{n}\right)}=2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

تمرين محلول16

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n+\sin(n)$.

• عين نهاية المتتالية (u_n).

حـــل:نعلم من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\leq\sin(n)\leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sin(n)\geq -1$.

إذا $u_n\geq n-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n-1=+\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

تمرين محلول17

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و العلاقة : $u_{n+1}=1+\frac{2}{5}u_n$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=u_n-\frac{5}{3}$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عين نهاية المتتالية (u_n).

حـــل: 1) لنحسب v_{n+1} .

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-\frac{5}{3}\\&=1+\frac{2}{5}u_n-\frac{5}{3}\\&=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\left(u_n-\frac{5}{3}\right)\\&=\frac{2}{5}v_n\end{aligned}$$

إذا أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=u_0-\frac{5}{3}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$.

2) أساس المتتالية هو $q=\frac{2}{5}$.

$-1<\frac{2}{5}<1$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{5}{3}$ لأن $u_n=v_n+\frac{5}{3}$

أعمال موجهة

الوسط الحسابي.

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r (r عدد حقيقي).

1) بين أن $u_{n+1}+u_{n-1}=2u_n$.

2) إذا كانت a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أثبت أن $a+c=2b$.

نتيجة: في متتالية حسابية مجموع حدين طرفين يساوي ضعف الحد الوسط .

تطبيق: أوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن:

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ a\times b\times c=80 \end{cases}$$

الوسط الهندسي.

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 1}$ حدها الأول u_1 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم).

1) بين أن $u_{n+1}\times u_{n-1}=u_n^2$.

2) إذا كانت a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أثبت أن $a\times c=b^2$.

نتيجة: في متتالية هندسية جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط .

تطبيق: أوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن:

$$\begin{cases} a+b+c=26 \\ a\times b\times c=216 \end{cases}$$

نهاية مجموع حدود متتالية هندسية.

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي).

نضع $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

1) إذا كان $q=0$ أحسب S_n بدلالة u_0 ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2) إذا كان $q=1$ أحسب S_n بدلالة n و u_0 ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3) نفرض $q\neq 0$ و $q\neq 1$.

- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$.
- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.
- إذا كان $-1<q<1$ بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{u_0}{1-q}$.
- إذا كان $q\leq -1$ بين أن S_n ليس له نهاية .

تطبيق: α عدد حقيقي غير معدوم . (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=3$ وأساسها $q=\dfrac{2}{\alpha}$.

ناقش تبعا لقيم العدد α نهاية S_n حيث $S_n=u_0+u_1+.......+u_{n-1}+u_n$.

أعمال موجهة

متتالية غير رتيبة:

دراسة مثال: (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n=(-2)^n$.

1) أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1}-u_n$.
2) ناقش حسب قيم n إشارة $u_{n+1}-u_n$.
3) هل (u_n) رتيبة.

تطبيق: لتكن المتتالية الهندسية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=3$ و أساسها $q=-\frac{3}{2}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) غير رتيبة .

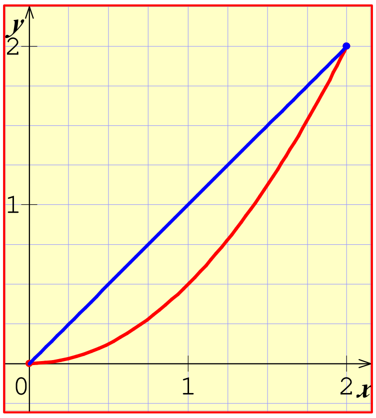
دراسة متتالية تراجعية:

تمرين: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث أن: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=a$ $(a\in\mathbb{R})$، و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2$.

الجزء الأول : نفرض $a=\frac{7}{4}$.



1) أدرس إشارة $\frac{1}{2}x^2-x$.
2) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,2[$ ، $0\le\frac{1}{2}x^2\le x\le 2$.
3) أدرس تغيرات الدالة f .
4) باستعمال الرسم المقابل عين التمثيل البياني للمتتالية (u_n).
5) هل هذا التمثيل البياني يوحي باتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟
6) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة .

قارن بين تغيرات الدالة f و اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

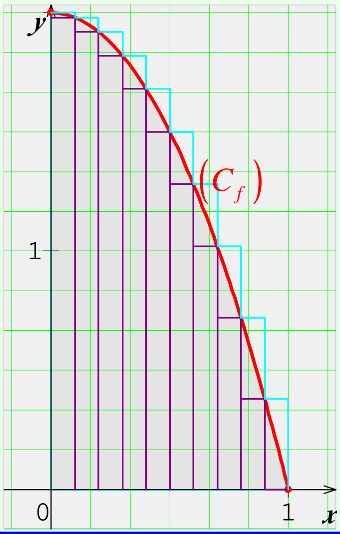
الجزء الثاني : نفرض $a=4$.

1) بين أنه إذا كان $x>2$ فإن $f(x)>2$ استنتج أن $u_n>2$.
2) بين أن (u_n) متزايدة .

الجزء الثالث : نفرض $a=2$.

3) أحسب $f(2)$.
4) بين أن (u_n) متتالية ثابتة .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=2-2x^2$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نريد حساب المساحة A مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=1$. نقسم المجال $[0,1]$ إلى n جزءاً متساوية حيث أن كل جزء يساوي $\frac{1}{n}$. كما هو مبين في الرسم المقابل.



ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين. نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E. و عليه لدينا $u_n \leq A \leq v_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

1) عين u_n و v_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) إستنتج قيمة A يعطى المجموع $\sum\limits_{p=1}^{n} p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) مساحة المستطيل الأول المحتوى في E هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل المحتوى في E و المجاور له هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل الموالي هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)$ وهكذا حتى آخر مستطيل $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ وبالتالي

$$u_n=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$ أي

$u_n=\frac{2n}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right)$ و منه $u_n=2-\frac{2}{n^3}\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $u_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

مساحة المستطيل الأول من الفيئة الثانية هي $\frac{2}{n}$، مساحة المستطيل الثاني هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل الثالث هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$ و هكذا إلى آخر مستطيل مساحته $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

وبالتالي $$v_n=\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$ أي

$v_n=\frac{2(n+1)}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+\ldots+(n-1)^2\right)$ ومنه $v_n=2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $v_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}=\frac{4}{3}$

3) بما أن $u_n \leq A \leq v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $A=\frac{4}{3}$.

مسائل محلولة

الهدف من المسألة هو أيجاد نهاية متتاليتين باستعمال متتالية هندسية و متتالية ثابتة .

مسألة:لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين u_n و v_n بدلالة n .

5) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

حل: 1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12}w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = 11$. ومنه $w_n = 11\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

3) نحسب : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\dfrac{2}{3}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n - v_n = 11\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

5) $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

تعيين حدود متتالية بواسطة المجدول

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي:

$$u_n = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0 = 3$

و بالعلاقة: $v_{n+1} = \dfrac{2}{v_n} + 1$

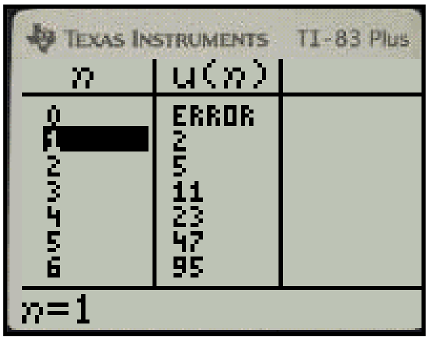
1. أنجز ورقة الحساب المقابلة.
2. عين u_{55} و v_{55}
3. ضع تخمينا حول تقارب المتتاليتين.

	A	B	C
1	حدود متتاليتين عدديتين		
2	n	un	vn
3	0	0	3
4	1	-0,5	1,666667
5	2	-0,75	2,2
6	3	-0,875	1,909091
7	4	-0,9375	2,047619
8	5	-0,96875	1,976744
9	6	-0,98438	2,011765
10	7	-0,99219	1,994152
11	8	-0,99609	2,002933
12	9	-0,99805	1,998536
13	10	-0,99902	2,000733

تعيين حدود متتالية و تمثيلها بواسطة الحاسبة البيانية

1. تعيين الحدود بواسطة الآلة الحاسبة Ti83plus

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = 2u_n + 1$



نضغط على اللمسة **MODE** ثم نختار Seq. نحجز عبارة المتتالية في **Y =** مع تحديد الوسائط بالضغط على اللمسة **WINDOW** لإظهار حدود المتتالية على الشاشة نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **GRAPH**

من أجل حجز u نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **7**

و من أجل حجز n نضغط على اللمسة **x,T,θ,n**.

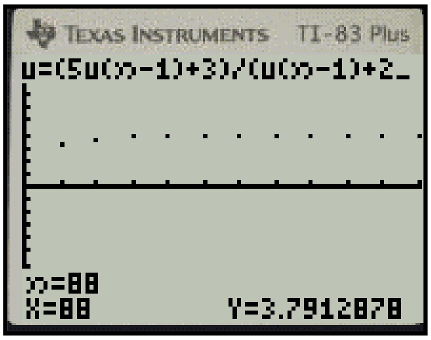
ملاحظة: نرمز إلى u_n بـــ $u(n)$ و نعبر عن $u(n)$ بدلالة $u(n-1)$.

- عين الحدود u_{13} ، u_{29} و u_{46}.
- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية.

2. تمثيل متتالية بواسطة الآلة الحاسبة Ti83plus

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة التراجعية:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 2}$$



لتمثيل المتتالية على شاشة الحاسبة بعد حجز عبارتها في Y_1 و تحديد الوسائط نضغط على اللمسة **GRAPH** أو اللمسة **TRACE**.

- عين قيم مقربة للحدود u_{13} ، u_{29} و u_{46}.
- ضع تخمينا حول تقارب المتتالية و نهايتها.

تخمين طبيعة متتالية بواسطة المجدول

(u_n) هي المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = 5$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = 5u_n - 7n$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n.

(v_n) هي المتتالية المعرفة بـ: $v_n = u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16}$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n.

1. باستعمال مجدول إكسل نريد برمجة حساب الحدود العشرة الأولى للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

أ - في السطر الأول أحجز قيم n من 0 إلى 9.

سجل n في الخلية A_1 و 0 في الخلية B_1 ثم 1 في C_1، حدّد الخليتين B_1 و C_1 ثم اسحب نحو اليمين.

ب - برمج حساب u_n في السطر الثاني.

سجل u_n في الخلية A_2 ثم أحجز قيمة u_0 أي العدد 5 في الخلية B_2؛ أحجز القاعدة =5*B2-7*B1 في الخلية C_2 ثم حدّدها واسحب نحو اليمين.

جـ - برمج حساب v_n في السطر الثالث.

سجل v_n في الخلية A_3 وأحجز القاعدة =B2-7/4*B1-7/16 في الخلية B_3 ثم حدّدها واسحب نحو اليمين.

	A	B	C	
1	n	0	1	
2	u_n	5	=5*B2-7*B1	
3	v_n	=B2-7/4*B1-7/16		

2. لاحظ السطر الثالث، أعط تخمينا حول طبيعة المتتالية (v_n) (يمكن إضافة سطرا أخرا لحساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$)

3. برهن التخمين الموضوع في السؤال السابق.

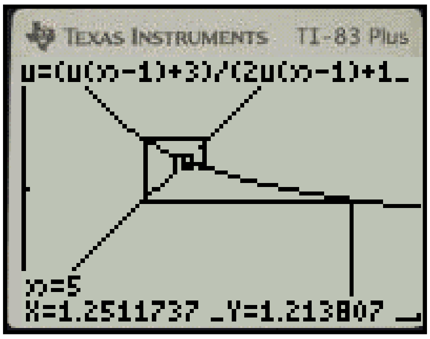
4. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n.

5. احسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

6. تحقق من النتيجتين S_9 و T_9 باستعمال جدول إكسل السابق.

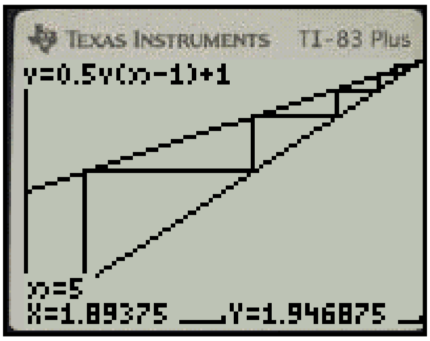
مشاهدة تقارب متتالية بواسطة الحاسبة Ti83plus

لمشاهدة تقارب المتتالية أو تباعدها على شاشة الحاسبة:



1. نحجز عبارة المتتالية في **Y =** ثم نحدد الوسائط.
2. نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **ZOOM** ونختار *web* و نصادق.
3. نضغط على اللمسة **TRACE** ثم عدة مرات على اللمسة لرسم النسيج.

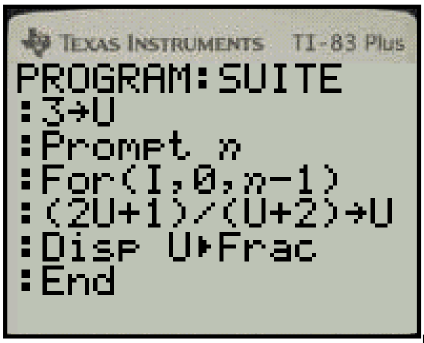
مثال:



- في الحالة الأولى نشاهد تقارب المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2.5$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{2u_n+1}$
- في الحالة الثانية نشاهد تباعد المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الأول $v_0=0.5$ و العلاقة التراجعية $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n+1$

تطبيق: باستعمال الحاسبة البيانية ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{u_n+4}{2u_n+1}$.

برنامج لتعيين حدود متتالية تراجعية بواسطة الحاسبة Ti83plus

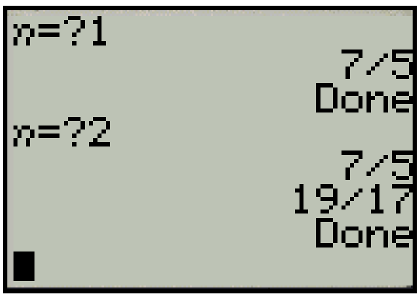


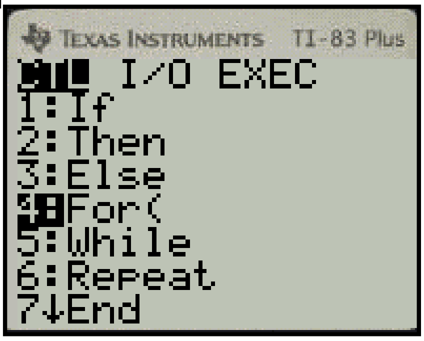
(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة التراجعية:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

في البداية نختار اللمسة **PRGM** ثم نختار *New* ثم نعطي اسما للبرنامج. نسميه مثلا: *suite* ثم ندخل البرنامج المقابل.

- للحصول على *For* نضغط على اللمسة **PRGM** و نختار *CTL* ثم 4





للحصول مثلا على u_1 و u_2 نطبق البرنامج بواسطة اللمسة *EXEC* ثم نأخذ $n=1$ ثم $n=2$ نحصل على $u_1=\dfrac{7}{5}$ و $u_2=\dfrac{19}{17}$

مقارنة تزايد متتالية هندسية و متتالية حسابية

يعرض بنك على زبنائه عقدين للتوفير. يقترح العقد الأول (1) الاستفادة من فوائد بسيطة نسبتها 7% سنويا بينما يقترح للعقد الثاني (2) الاستفادة من فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا.

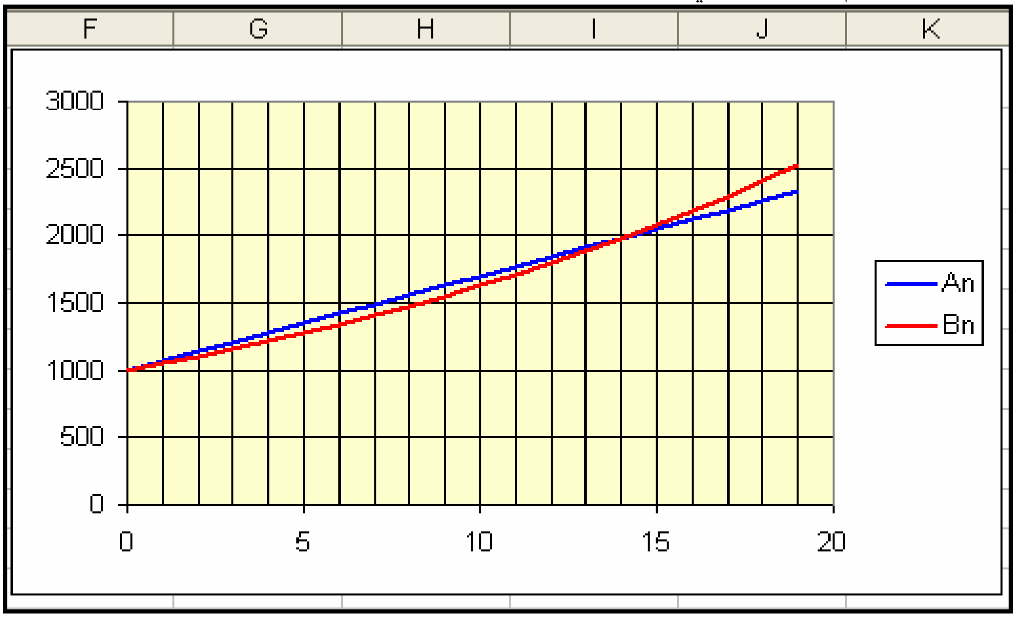
الفوائد البسيطة هي التي تحسب كل سنة انطلاقا من المبلغ الأول المودع بينما تحسب الفوائد المركبة كل سنة انطلاقا من رصيد الموفر للسنة التي تسبقها.

في 01 جانفي 2006 وضعت كل من أسماء و بشرى مبلغ $1000\,DA$ في البنك بحيث اختارت أسماء العقد (1) بينما اختارت بشرى العقد (2). نرمز بـِ a_n إلى رصيد أسماء و بـِ b_n إلى رصيد بشرى في السنة $2006+n$.

1. ما هي قيمة كل من a_0 و b_0 ؟ أحسب a_1، a_2 و a_3 ثم b_1، b_2 و b_3.
2. بين أن (a_n) متتالية حسابية و أن (b_n) متتالية هندسية محددا الحد الأول و أساس كل منهما.
3. أحسب كلا من a_n و b_n بدلالة n.
4. باستعمال الدساتير المناسبة أتمم ملئ ورقة الحساب الموالية إلى غاية $n=19$.

	A	B	C	D
1		الفوائد	7%	5%
2	السنة	n	رصيد أسماء	رصيد بشرى
3	2006	0	1000	1000
4	2007	1		
5	2008	2		
6	2009	3		
7	2010	4		
8	2011	5		
9				

5. مثل بيانيا في نفس المعلم الحدود 20 الأولى للمتتاليتين (a_n) و (b_n).
6. ناقش، حسب قيم العدد الطبيعي n ، العقد الأكثر فائدة.



تمارين

أصحيح أم خطأ

أجب بصحيح أم خطأ عن التمارين من 1 إلى 13 .

1 الحد الخامس للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n = \frac{1-n^2}{1+n^2}$ ، هو : $-\frac{12}{13}$.

2 المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n = n \times 2^n$ ، هي متتالية متزايدة .

3 المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n = n^2 - 2$ هي متتالية رتيبة .

4 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_{n+1} = 4u_n$. تكون المتتالية (u_n) متزايدة إذا كان حدها الأول u_0 موجب تماما .

5 المتتالية (u_n) المعرفة بـِ : $u_{n+1} = u_n - 3$ هي متتالية متناقصة .

6 (u_n) متتالية حسابية وهندسية ، إذن (u_n) متتالية ثابتة .

7 المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ ، تقبل نهايتين : -1 و 1 .

8 ABC مثلث قائم في A . إذا كان الأطوال AB ، AC و BC حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r فإن r هو ثلث طول أحد الأضلاع .

9 (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 \neq 0$ و أساسها $q \neq 0$. إذا تحقق $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $q = 3$.

10 المتتالية (u_n) حيث $u_{n+1} = au_n + b$ ، a و b عددان حقيقيان ، هي متتالية حسابية .

11 المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـِ : $u_{n+1} = (1-n)u_n$ هي متتالية هندسية .

12 يعطى الحدان $v_1 = \sqrt{2}$ ، $v_2 = 1$ من متتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$. المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13
- $3+7+11+15+...+203 = 5160$
- $1+2+4+8+...+128 = 263$

اختيار من متعدد

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة في التمارين من 14 إلى 19 .

14 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0\ ;+\infty[$ بـِ : $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$ لدينا :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{4}$. 2) المتتالية (u_n) متقاربة.
3) المتتالية (u_n) حسابية . 4) المتتالية (u_n) متناقصة .

15 المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة : $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{4}{5}\right)^n$. لدينا :

1) المتتالية (u_n) هندسية . 2) المتتالية (u_n) حسابية .
3) المتتالية (u_n) متناقصة . 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

16 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n وتحقق : $4 - \frac{2}{n} \leq u_n \leq 4 + \frac{2}{n}$. لدينا :

1) (u_n) متتالية ثابتة . 2) $u_n = \frac{2}{n}$.
3) (u_n) متتالية موجبة . 4) (u_n) متتالية متقاربة .

17 إذا كان السعر P لبضاعة يزيد بنسبة $5\ \%$ في كل عام فإن سعرها يفوق $2P$ بعد :

1) 10 سنوات . 2) السنة 15 .
3) 4 سنوات و 5 أشهر . 4) السنة 14 .

18 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $u_n = \frac{3^{n+2}}{4^{n-2}}$. لدينا :

1) (u_n) متتالية هندسية. 2) (u_n) متتالية متزايدة تماما.
3) (u_n) متتالية متقاربة. 4) الحد الأول u_0 هو $\frac{9}{16}$.

19 (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q غير معدومين . لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

1) $u_n = u_0 q^n$. 2) $u_n = u_0 + q^n$.
3) $u_n = u_0 q^{n+1}$. 4) $u_n = u_0 + (q-1)^n$.

تمارين تطبيقيـــة

العمـوميات

20 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، جد الدالة f بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = f(n)$ ، ثم أحسب الحدود الأربعة الأولى .

1° $u_n = 3n-4$. 2° $u_n = \dfrac{n-2}{n+2}$.

3° $u_n = n^2 - \sqrt{n}$. 4° $u_n = \cos\left(3\pi n - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

21 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه، جد الدالة f بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ، ثم أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 .

1° $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \end{cases}$ 2° $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

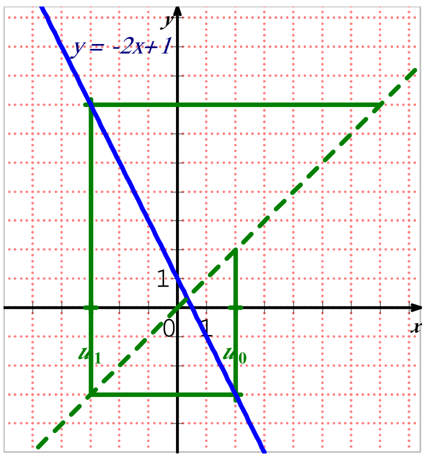
3° $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ 4° $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n \end{cases}$

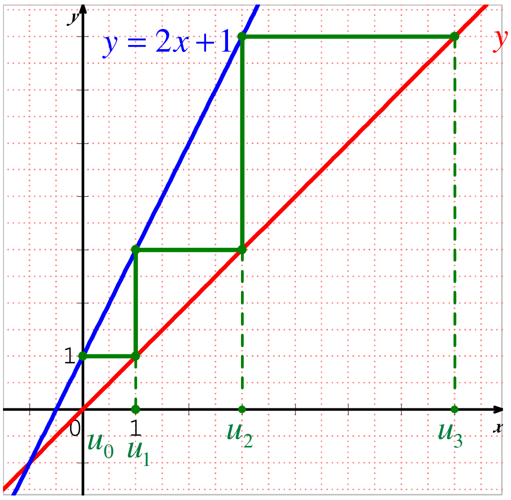
22 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أحسب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ، ثم مثل هذه الحدود بيانيا .

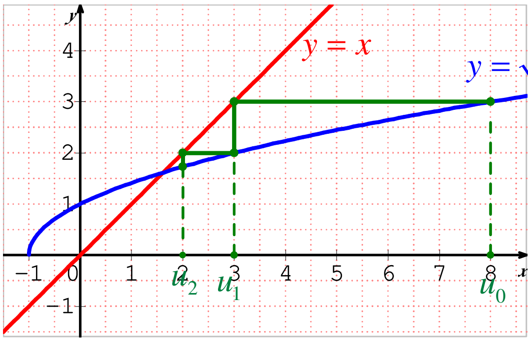
1° $u_n = n+1$. 2° $u_n = n^2 - n$.

3° $u_n = \sqrt{n}$ 4° $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

23 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه، إليك في معلم متعامد ومتجانس ، التمثيل البياني للحدود الأولى لمتتالية (u_n) معرفة بِـــ u_0 : وعلاقة تراجعية يطلب تعيينهما .







24 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها u_n .

عبر بدلالة n عن الحدود : u_{n+1} ؛ $u_n + 1$ ؛ u_{2n} ؛ u_{n^2} ؛ u_{2n+1} ؛ u_{2n-1} ؛ في كل حالة من الحالات التالية :

1° $u_n = 4n-1$. 2° $u_n = n^2 + n - 3$.

3° $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. 4° $u_n = \sqrt{n} + 1$.

25 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة : $u_n = 2^{3n}$

تعرف على الحدود : u_{n+1} ؛ u_{2n} ؛ u_{2n-1} ؛ u_{n^2}

من بين العبارات التالية :

1° 8^{n^2} 2° 8^{n+1}

3° $\dfrac{64^n}{8}$ 4° 64^n .

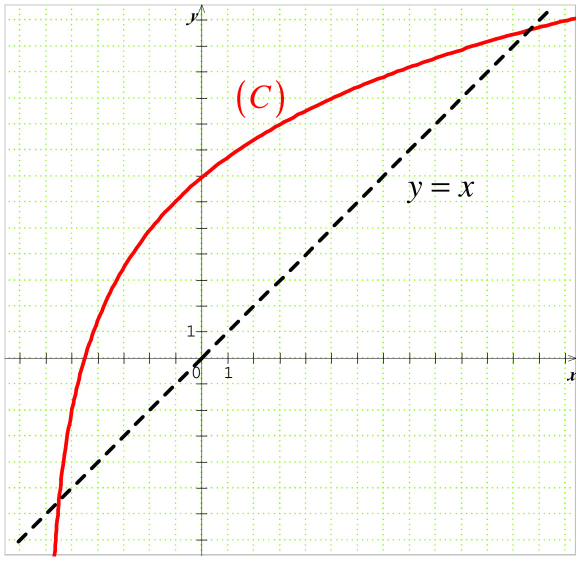
26 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $u_n = n^3 - 5n^2 + 6n + 3$.

1) أحسب الحدود u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 . هل (u_n) ثابتة ؟

2) حلل $u_n - 3$ إلى جداء عوامل .

3) عين حدود المتتالية (u_n) التي تساوي 3 .

27 (C) هو منحني دالة f في مستو منسوب إلى معلم ، و (D) المستقيم الذي معادلته $y = x$.

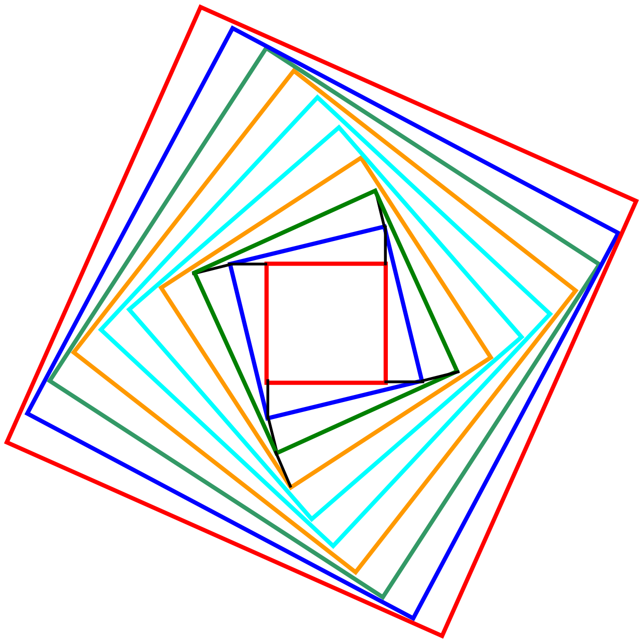


(u_n) متتالية معرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

عين بيانيا u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 إذا كان :

1) $a = -5$ 2) $a = -1$ 3) $a = 6$

28 مربع ضلعه $u_0 = 3$ بتمديد الأضلاع بقطعة قياسها 1 نحصل على مربع ضلعه u_1 ، ثم نمدد u_1 بقطع قياسها 1 نحصل على مربع ضلعه u_2 ، . . . . أنظر الشكل .



1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n .

29 (u_n) متتالية معرفة بحدها العام : $u_n = \frac{n}{5} + \frac{5}{n}$ $(n \geq 1)$.

1) عين دالة f معرفة على $]0\,;+\infty[$ حيث $u_n = f(n)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

3) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4) هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟

5) هل المتتالية (u_n) تقبل قيمة حدية ؟

30 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ ،

$u_1 = 1 + \frac{1}{2}$ ، $u_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ ، $u_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

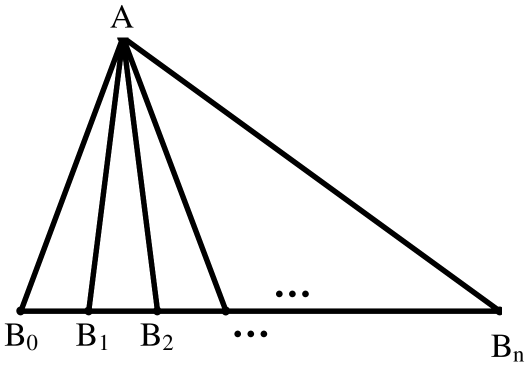
1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أوجد تخمينا لعبارة u_{n+1} بدلالة u_n .

3) أحسب u_4 ، u_5 ، u_6 .

4) مثل الحدود الأولى للمتتالية (u_n) على محور .

31



u_n هو عدد المثلثات المحصل عليها بربط النقطة A إلى النقط B_0 ، B_1 ، B_2 ، . . . . ، B_n (أنظر نشاط 2) .

1) تحقق أن $u_1 = 1$ و $u_2 = 3$.

2) أثبت أن $u_{n+1} = u_n + n + 1$ من أجل $n \geq 1$.

3) استنتج u_3 ، u_4 ، u_5 .

4) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$v_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- أحسب v_1 .
- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n و n . استنتج أن $v_n = u_n$.

تمارين

تمارين تطبيقـية

32 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـِ :

$$u_n=\frac{n^4-2n^3+11n^2+14n+24}{24}$$

1) أحسب قيمة لكل من الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) جد تخمينا لعبارة مبسطة للحد u_n .

3) أحسب u_5 ، u_6 ، u_7 . هل تخمينك صحيح ؟

33 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$u_n=(1,01)^n-1000n$.

1) بواسطة مجدولة أحسب الحدود من u_0 إلى u_{2007}

2) أثبت أن $u_{n+1}-u_n=0,01\times(1,01^n-100000)$

جد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل $n\ge n_0$:

$u_{n+1}-u_n\ge 0$

اتجاه تغير متتالية

بالنسبة للتمارين من 34 إلى 42 أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

34 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=-2n+3$.

35 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=\frac{2-4n}{n+2}$.

36 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=(n-5)^2$.

37 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=\frac{3^{2n}}{2^{3n}}$.

38 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـِ : $u_n=\frac{n^2+1}{2n}$.

39 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ :

$u_0=2$ و $u_{n+1}=u_n+2n$.

40 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n}$.

41 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$.

42 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $u_n=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

43 (v_n) معرفة من أجل $n\ge 6$ بالعلاقة :

$v_n=n^2-12n-5$.

1) أحسب حدها الأول . أحسب الفرق $v_{n+1}-v_n$.

2) أثبت أن (v_n) متزايدة .

44 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة $u_n=2n^3-30n^2+162$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ :

$f(x)=2x^3-30x^2+162$.

2) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ابتداء من الدليل 10 .

45 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n=\frac{3^n}{n+2}$.

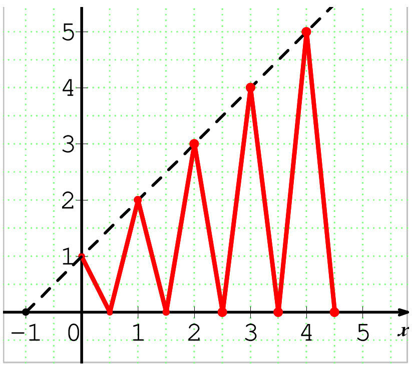
1) أحسب قيم الحدود الخمسة الأولى .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n>0$.

3) أدرس إشارة $\frac{u_{n+1}}{u_n}-1$.

4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

46 لتكن الدالة f المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بتمثيلها البياني التالي :



1) هل الدالة f رتيبة ؟

2) نسمي (u_n) المتتالية المعرفة بـِ : $u_n=f(n)$.

عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .

47 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة : $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

1) أحسب قيمة لكل من الحدود : u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 ؛ u_4

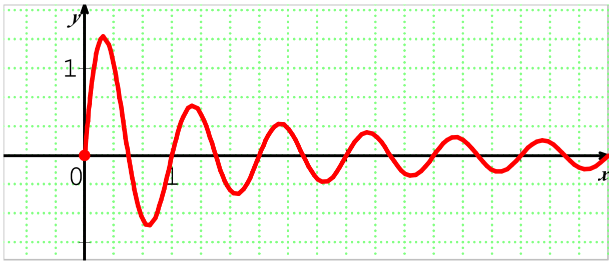
2) عبر عن u_{n+1} بدلالة n .

3) برهن أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+2}$.استنتج اتجاه تغير (u_n)

48 لتكن الدالة f المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{\sin(2\pi x)}{x+\dfrac{1}{2}}$.

ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_n=f(n)$.

الشكل التالي هو منحنى الدالة f .



1) هل الدالة f رتيبة على المجال $[0\,;+\infty[$ ؟

2) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

في التمرينين 49 و 50 ينصح باستعمال الحاسبة البيانية أو البرمجيات .

49 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $u_n=1-\dfrac{5}{n+3}$.

1) أحسب قيمة لكل من الحدود : u_0 ؛ u_1 ؛ u_5 ؛ u_{10} ؛ u_{15} .

2) أكتب بدلالة n الحدود : u_{2n} ؛ u_{4n+1} ؛ $u_{10^3 n}$.

50 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

1) نضع $u_n=f(n)$.

أحسب الحدود: u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 ؛ u_4 ؛ u_{10} ؛ u_{20} ؛ u_{50} ؛ u_{200} .

2) نعرف المتتالية (v_n) بـ : $v_{n+1}=f(v_n)$.

أحسب الحدود : v_1 ؛ v_2 ؛ v_3 ؛ v_{10} ؛ v_{20} .

51 جد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية مع التحليل .

1° $u_n=\dfrac{1}{n}-3n^2$. 2° $u_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}-3$.

3° $u_n=\left(1-\sqrt{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$. 4° $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

5° $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. 6° $u_n=\dfrac{\sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)}{3n^2}$.

7° $u_n=(0,7)^n$. 8° $u_n=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

9° $u_n=\dfrac{1}{3^n}$. 10° $u_n=\dfrac{n+1}{3n+1}$.

52 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $u_n=f(n)$ ، مع $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

1) أدرس نهاية الدالة f لما يؤول x إلى $(+\infty)$.

2) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

المتتاليات الحسابية

بالنسبة للتمارين من 53 إلى 60 ، أكِّد إذا كانت المتتالية (u_n) حسابية أم لا .

53 $u_n=3n-1$. **54** $u_n=\dfrac{1}{2}-3n$.

55 $u_n=2n^2+3n$. **56** $u_n=n^2$.

57 $u_{n+2}=\dfrac{3-4n}{5}$. **58** $u_n=n-\dfrac{1}{n}$.

59 $\begin{cases}u_0=-3\\u_{n+1}=2+u_n\end{cases}$. **60** $\begin{cases}u_0=-2\\u_{n+1}=-4u_n\end{cases}$.

بالنسبة للتمارين من 61 إلى 65 ، (u_n) تعتبر متتالية حسابية أساسها q .

61 $u_0=-2$ و $u_1=5$ ؛ أحسب q و u_{100} .

62 $u_0=-1$ و $u_{15}=59$ ؛ أحسب q و u_{2007} .

63 $u_0=3$ و $u_{200}=503$ ؛ أحسب q و u_{100} .

64 $u_7=-1$ و $u_{24}=33$ ؛ أحسب q و u_0 .

65 $u_{17}=-33$ و $q=-2$ ؛ أحسب u_0 .

66 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r .

عبر عن u_n بدلالة n ، في كل حالة من الحالات التالية :

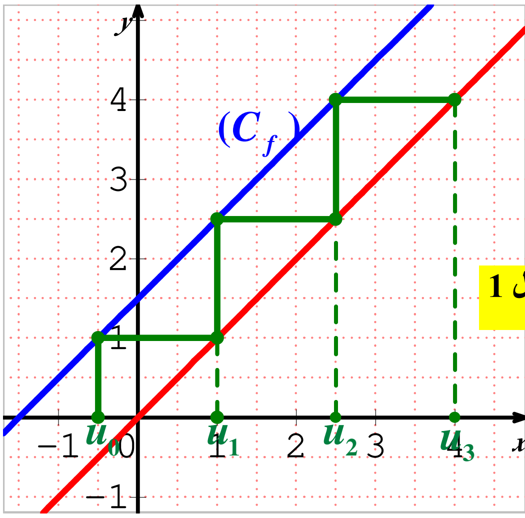
1° $u_0=-1$ و $r=4$. 2° $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $r=-5$.

3° $u_0=\sqrt{3}$ و $r=\dfrac{5}{4}$.

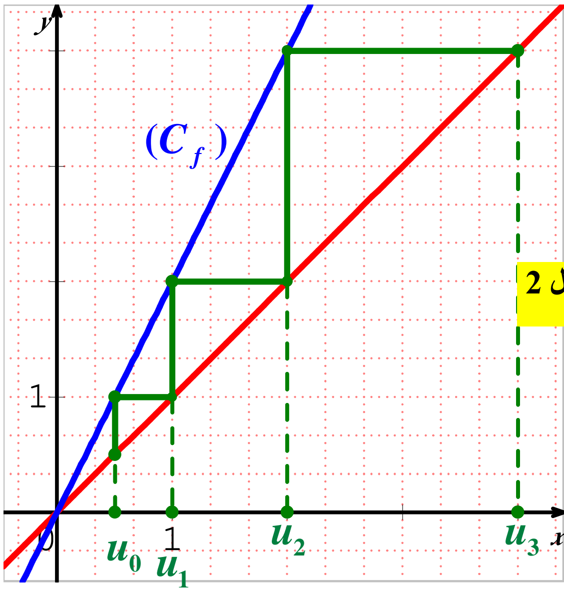
4° $u_0=\dfrac{45}{2}$ و $r=10^{-2}$.

تمارين تطبيقيــة

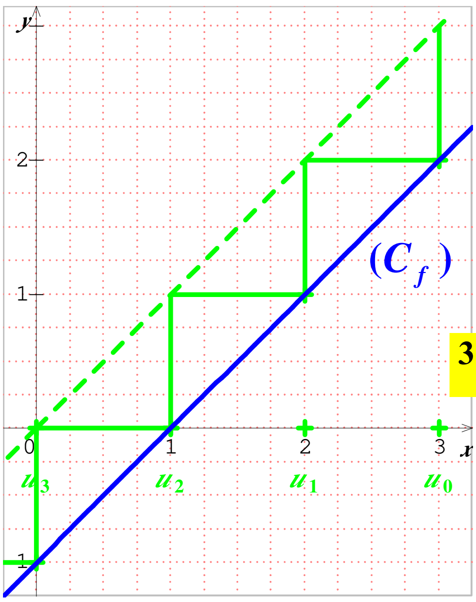
67 في الأشكال التالية مثلنا الحدود الأولى لمتتالية.



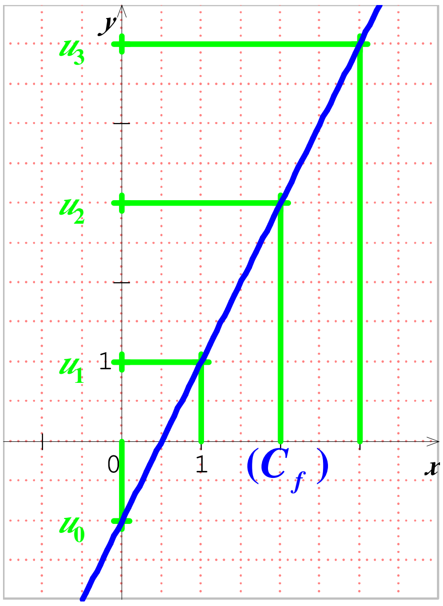
الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3



الشكل 4

1) هل هذه المتتاليات حسابية ؟

2) في الحالة التي تكون فيها المتتالية حسابية عين حدها الأول u_0 وأساسها r .

68 (u_n) متتالية حسابية أساسها q .

عين في كل حالة من الحالات الآتية قيمة العدد الطبيعي n

°1 $u_{15}=32$ ، $q=-3$ و $u_n=-82$.

°2 $u_{10}=-64$ ، $u_5=-14$ و $u_n=-114$.

°3 $u_6+u_{24}=138$ ، $u_{31}-u_{19}=54$ و $u_n=60$.

69 (u_n) متتالية حسابية حيث :

$u_{10}=16$ و $u_{15}=41$.

أحسب المجموع : $S=u_{10}+u_{11}+u_{12}+...+u_{29}$

70 لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ :

$u_0=-1$ و $u_{n+1}=\dfrac{4}{4-u_n}$.

ونعتبر المتتالية (v_n) حيث : $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية عين حدها الأول وأساسها .

2) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

71 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـِ :

$u_0=-1$ و $u_{n+1}=1-\dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

ولتكن المتتالية (v_n) حيث : $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n}$.

1) مثل بيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) .

2) أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية عين حدها الأول وأساسها .

3) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

4) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

72 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ :

$$\begin{cases} u_0=1 \ ; \ u_1=4 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n \end{cases}$$.

1) أحسب قيمة لكل من الحدود u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ،

2) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية مطلوب أساسها q .

3) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

4) جد رتبة الحد الذي قيمته 361 .

5) أحسب المجموع : $S=u_0+u_1+\ldots+u_{2n-1}$

73 باستعمال متتالية حسابية ، أحسب المجموع S في كل حالة من الحالات التالية :

1) $S=5+6+7+8+\ldots+67$.

2) $S=1+3+5+\ldots+101$.

3) $S=17+12+7+2-3-8\ldots-53$.

المتتاليات الهندسية

74 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$. أكّد ، في كل حالة من الحالات التالية ، إذا كانت (u_n) هندسية ، في حالة الإجابة بنعم عين أساسها r .

1) $u_n=-5\times 3^n$. 2) $u_n=\dfrac{1}{2^n-1}$.

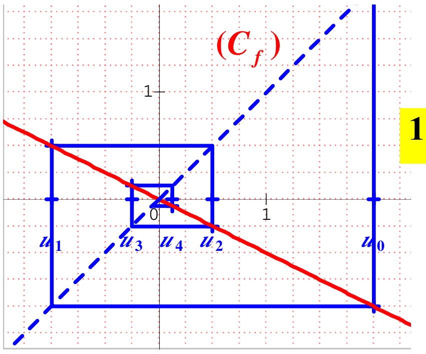
3) $u_n=\dfrac{4^n}{3^{n+1}}$. 4) $u_n=3^{2n-1}$.

5) $u_n=\dfrac{4^n}{6}$. 6) $u_n=-\dfrac{1}{2}n+5^n$.

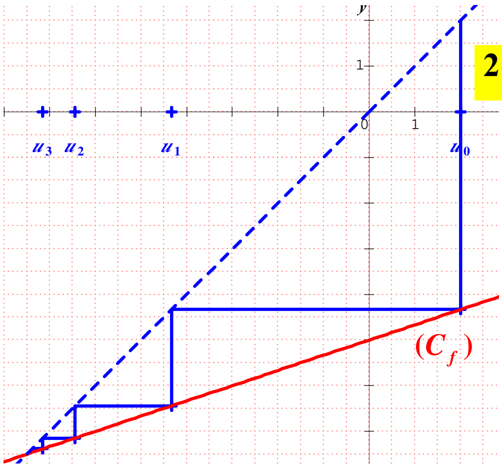
7) $u_n=\sqrt{2n}$. 8) $u_n=\sqrt{2^n}$.

9) $\begin{cases} u_0=1 \\ 3u_{n+1}-2u_n=3 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} u_0=-1 \\ 3u_{n+1}=u_n{}^2 \end{cases}$.

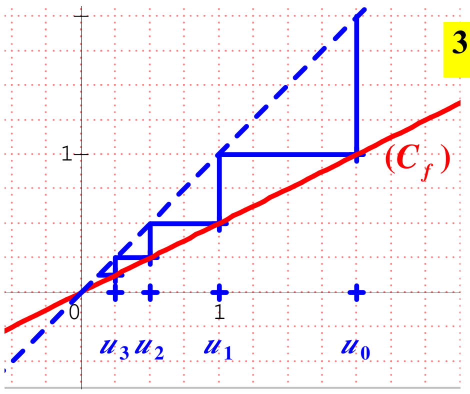
75 في الأشكال التالية إليك الحدود الأولى من متتالية.
من بين هذه الأشكال تعرف على المتتاليات الهندسية .



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

بالنسبة للتمارين من 76 إلى 80 ، (u_n) تعتبر متتالية هندسية أساسها q .

76 $u_0=3$ و $q=2$. أكتب u_n بدلالة n .

77 $u_0=\dfrac{5}{2}$ و $q=-3$. أكتب u_n بدلالة n .

78 $u_4=8$ و $q=2$. أحسب u_3 و u_5 .

79 $u_5=10$ و $q=-\dfrac{1}{2}$. أحسب u_0 و u_2 .

80 $u_5=88$ و $u_8=11$. أحسب q و u_{100} .

تمارين تطبيقيـــة

81 (u_n) متتالية هندسية . هل (u_n) رتيبة ؟

إذا أجبت بنعم أكد إتجاه تغيرها في كل حالة من الحالات التالية :

1) $u_n = -5\times 3^n$. 2) $u_n = \dfrac{4^{n-2}}{7^{n+2}}$.

3) $u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{3^{2n}}$. 4) $u_n = \dfrac{1}{2}(-3)^n$.

5) $u_n = -\sqrt{3^n}$. 6) $u_n = \dfrac{(-4)^n}{5}$.

82 (u_n) متتالية هندسية أساسها q .

أكتب u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية :

1) $u_0 = -\dfrac{1}{4}$ و $q = 7$.

2) $u_1 = 3$ و $q = 3$.

3) $u_0 = \sqrt{2}$ و $q = -\dfrac{1}{2}$.

83 الأعداد الحقيقية a ، b ، c هي حدود متتابعة من متتالية هندسية وتحقق :

$a+b+c=21$ و $2a+b=27+c$.

أحسب قيمة لكل من الأعداد a ، b ، c .

84 لتكن الأعداد الحقيقية a ، b ، c التي تحقق الشروط التالية :

- a ، b ، c في هذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابة .
- b ، c ، a في هذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية .
- $a+b+c=18$.

1) أحسب قيمة الأعداد a ، b ، c .

2) عين قيمة أساس المتتالية الهندسية .

85 لتكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها سالبة .

1) ما يمكن القول عن أساسها .

2) إذا علمنا أن: $u_1\times u_3 = \dfrac{1}{4}$ و $u_1+u_2+u_3 = -\dfrac{19}{12}$

أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

3) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

4) أحسب المجموع S حيث :

$$S = u_1+u_2+u_3+...+u_n$$

86 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$1+\frac{x+1}{x-1}+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=0 .$$

ملاحظة يمكن وضع $\dfrac{x+1}{x-1}=y$.

87 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$u_0=-1$ و $u_{n+1}=2-\dfrac{4}{u_n+3}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) لا حسابية و لا هندسية.

3) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

4) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

5) ما هي نهاية المتتالية (u_n) .

88 لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث :

$u_1=\dfrac{3}{4}$ و $u_{n+1}=\dfrac{3(n+1)}{4n}u_n$.

ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث : $v_n=\dfrac{u_n}{n}$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، ثم عين حدها الأول وأساسها .

2) أكتب v_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4) أثبت أنه ابتداءً من رتبة n_0 ، (u_n) تكون رتيبة .

89 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-2$.

نعتبر في المستوي المستقيمين (D) و (D') المعرفين بمعادلتيهما : $y=x$ و $y=\dfrac{1}{2}x-2$ على الترتيب .

1) عين α فاصلة نقطة تقاطع (D) و (D') .

2) من أجل قيمة α المحصل عليها في السؤال 1) نضع:

$$v_n = u_n - \alpha$$

• أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

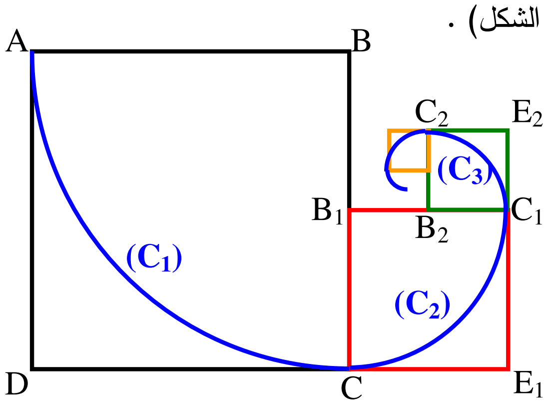
• عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموعين :

$$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

90 $ABCD$ مربع طول ضلعه 2 . (C_1) ربع الدائرة التي مركزها B وتشمل النقطتين A و C .
B_1 منتصف $[BC]$ ، C_1 و E_1 نقطتان حيث $CB_1C_1E_1$ مربع و (C_2) ربع الدائرة التي مركزها B_1 وتحدها النقطتين C و C_1 .
B_2 منتصف $[B_1C_1]$ ونرسم (C_3) بنفس الطريقة . . .
(أنظر الشكل) .



1) نضع u_n طول ربع الدائرة (C_n) حيث $n \geq 1$.

• أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

• عبر عن الحد u_n بدلالة n .

2) أحسب طول الخط الحلزوني المكون بـــ n مربع .

91 نكتب الأعداد الطبيعية في جدول حسب الترتيب التالي :

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

يعرف كل عدد بالسطر والعمود الذي يكون موجود فيه .
مثال العدد 11 موجود في السطر الثالث والعمود الثاني .
في أي سطر يوجد العدد 2007 ؟ وفي أي عمود ؟

92 نرقم صفحات كتاب من 1 إلى n ، الصفحة 1 تكون على اليمين . بجمع أرقام كل الصفحات نجد 2007 ولكن صفحتين بقيت ملتصقتين ولم يحسب رقماهما .

1) ما هو عدد صفحات هذا الكتاب ؟

2) وما هو رقم كل من الصفحتين الملتصقتين ؟

(أولمبياد 2003).

مســائــل

93 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 1$ ومن أجل $n \geq 1$ ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$.

• عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .

• عبر عن v_n بدلالة n .

• استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) عين أصغر قيمة للعدد n بحيث : $|u_n + 1| < 10^{-4}$.

5) أحسب بدلالة n المجموع:
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

6) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

94 في بداية ظهور وباء الإفوانزة (une épidémie de grippe) لاحظ عمال المصالح الطبية أن عدد المصابين الجدد في يوم متناسب مع عدد المرضى في اليوم السابق .
إذا كان عدد المرضى في اليوم الأول100 و في اليوم الثاني 120 ، فما هو :

1) عدد المرضى الجدد في اليوم الرابع ؟

2) عدد كل المرضى بعد 7 أيام ؟

3) عدد كل المرضى بعد 15 اليوم ؟

تمارين تطبيقـيـة

95 نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$ ، النقط $A_0\left(1\ ;1\right)$ ، $A_1\left(2\ ;2\right)$ . . . $A_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ ، حيث : $x_n = n+1$ و $y_n = \dfrac{n^2+3n+4}{4}$.

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n الخط المنكسر : $A_0A_1A_2\ldots A_n$ حيث معاملات توجيه المستقيمات $\left(A_0A_1\right)$ ، $\left(A_1A_2\right)$ ، . . . . ، $\left(A_nA_{n+1}\right)$ تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$.

1) مثل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $y_n - y_{n-1} = \dfrac{n+1}{2}$.

3) برهن أن النقط A_n تنتمي إلى قطع مكافئ (P) .

4) أنشئ (P) في نفس الشكل مع النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 .

96 تضم ثانوية 1500 تلميذا .

يزداد عدد التلاميذ سنويا بـــ 20 تلميذا.

1) ما هو عدد التلاميذ في السنة الخامسة؟

2) ما هو عدد التلاميذ في السنة العاشرة؟

3) في أي سنة يفوق عدد التلاميذ في هذه الثانوية ، 2000 تلميذ ؟

97 نسبة تزايد سكان العالم حاليا تقدر بـِ $1{,}75\ \%$ في كل عام .

إذا كان عدد السكان العالم في عام 1990 هو 5,3 مليار نسمة ، فما هو عدد سكانه في :

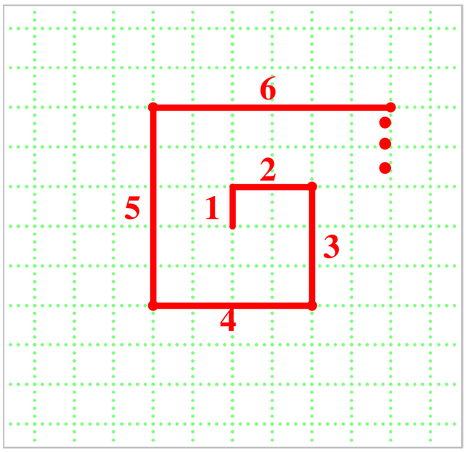
سنة 2000 ؟ سنة 2007 ؟ سنة 2030 ؟

98 مسألة ريكورد (Robert Recorde 1510 – 1558) مخترع العلامة " = " .

أبيع لك حصانا له 4 صفائح وفي كل صفيحة يوجد 6 مسامير .

للمسمار الأول أدفع دينارا واحدا ، للمسمار الثاني دينارين وللمسمار الثالث أربع دنانير . . . وهكذا حتى نصل إلى المسمار الأخير . ما هو ثمن الحصان ؟

99 على ورقة مربعة الشكل طول ضلعها $30\,cm$ ، نرسم "يونانية" ابتداءً من وسط الورقة . كل قطعة تزد بـِ $1\,cm$ عن سابقتها .



1) ما هو طول "اليونانية" في الصف 10 ؟

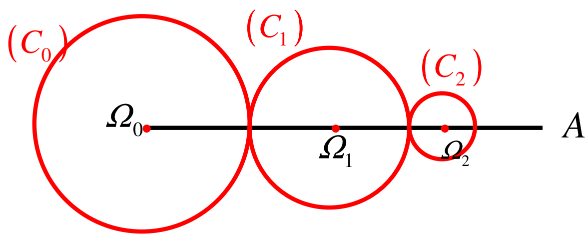
2) ما هو طول "اليونانية" في الصف n ؟

3) ابتداءً من أي قيمة للعدد الطبيعي n تخرج "اليونانية" من الورقة .

100 لتكن A و Ω_0 نقطتين متمايزتين من المستوي حيث $A\Omega_0 = 10$. $\left(C_0\right)$ الدائرة التي مركزها Ω_0 ونصف قطرها 5 . h التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\dfrac{1}{3}$.

$\left(C_1\right)$ صورة $\left(C_0\right)$ بواسطة h و $\left(C_2\right)$ صورة $\left(C_1\right)$ بواسطة h ومنه أجل كل عدد طبيعي n الدائرة $\left(C_{n+1}\right)$ هي صورة $\left(C_n\right)$ بالتحاكي h .

نسمي Ω_n مركز الدائرة $\left(C_n\right)$ و R_n نصف قطرها.



1) عبر عن المسافة $l_n = A\Omega_n$ و عن R_n بدلالة n .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n الدائرتين $\left(C_n\right)$ و $\left(C_{n+1}\right)$ متماستين خارجيا .

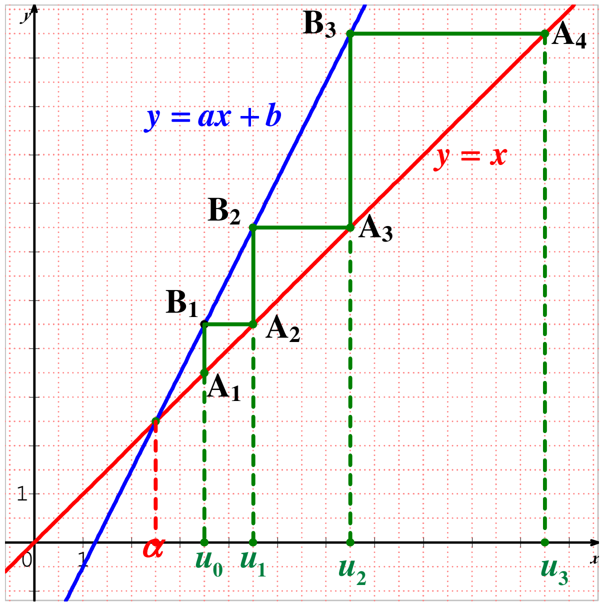
3) نضع u_n مساحة القرص المحدود بالدائرة (C_n) .

- أكتب u_n بدلالة n .
- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

4) لتكن S_n مجموع المساحات u_n $(n \geq 0)$.

- عبر عن S_n بدلالة n .
- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

101 المتتالية (u_n) معرفة في الشكل التالي بحيث قطع الخط المنكسر موازية لمحوري الإحداثيتين .



نفرض أن u_0 معلوم ، $u_0 > \alpha$ و $\alpha > 1$.

1) عبر عن α بدلالة a و b .

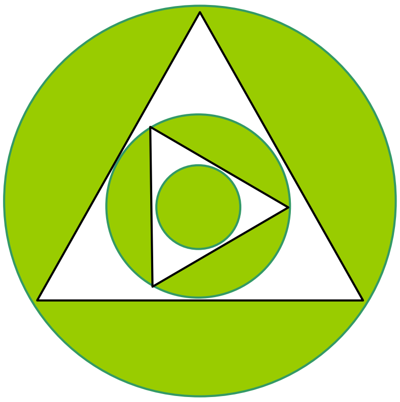
2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n - \alpha$
أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية.

3) عبر عن u_n بدلالة n و α ثم بدلالة n ، a و b .

4) نعتبر المتتالية (h_n) ارتفاع أدراج سلم حيث :
$h_1 = A_1B_1$ ، $h_2 = A_2B_2$ ، . . . . ، $h_n = A_nB_n$.

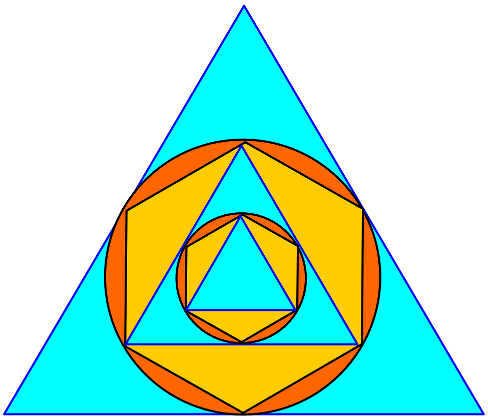
- عبر عن h_n بدلالة u_n و u_{n-1} .
- أثبت أن المتتالية (h_n) هندسية يطلب أساسها.
- برهن المساواة : $h_1 + h_2 + ... + h_n = u_n - u_0$.

102 في الشكل الموالي المثلثات متقايسة الأضلاع

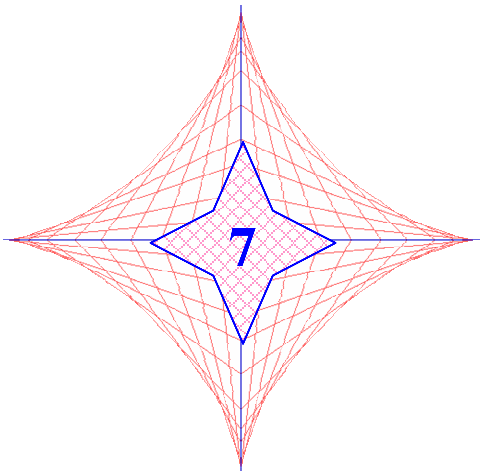


1. بين أن متتالية مساحات المثلثات هي هندسية .
2. بين أن متتالية مساحات الأقراص هي هندسية .

103 في الشكل الموالي كل المضلعات منتظمة .



1. بين أن المتتالية*Erreur ! Liaison incorrecte.* لمساحات المثلثات هي هندسية وكذلك المتتالية (h_n) لمساحات السداسيات هي هندسية
2. أثبت أن المتتالية المعرفة بالحدود t_0 ، h_0 ، t_1 ، h_1 ، t_2 ، h_2 . . . هي كذلك هندسية .



المرجح في المستوي

الكفاءات المستهدفة

- إنشاء مرجح نقطتين.
- إنشاء مرجح ثلاث نقط.
- حساب إحداثيات المرجح.
- استعمال المرجح لإثبات استقامية نقط أو تلاقي مستقيمات.

ولد أرخميدس عام 287 قبل الميلاد في جزيرة صقلية، وكان والده فلكياً شهيراً، وكمعظم الشباب آنذاك سافر إلى الإسكندرية ثم إلى اليونان طلباً للدراسة، ويعد الكثير من مؤرخي الرياضيات والعلوم أن أرخميدس من أعظم علماء الرياضيات في العصور القديمة. من أشهر اكتشافاته، طرق حساب المساحات والأحجام والجانبية للأجسام، وأثبت القدرة على حساب تقريبي دقيق للجذور التربيعية وأخترع طريقة لكتابة الأرقام الكبيرة.وهو نفسه الذي حدد قيمة π وهي العلاقة بين محيط الدائرة ونصف قطرها بدقة عالية .

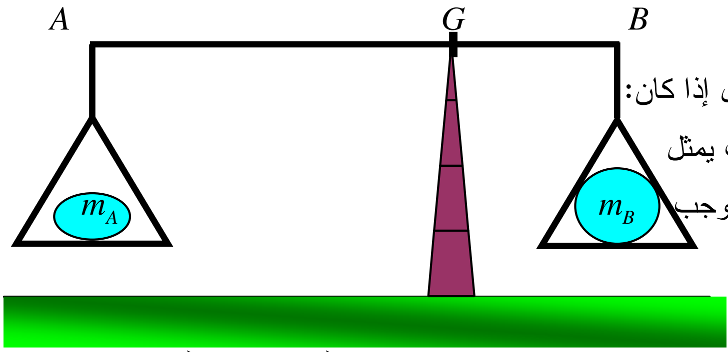
أما في مجال الميكانيك فأرخميدس هو مكتشف النظريات الأساسية لمركز الثقل للأسطح المستوية والأجسام الصلبة واستخدام الروافع ومخترع قلاووظ أرخميدس. ومن أبرز القوانين التي اكتشفها قانون طفو الأجسام داخل المياه والذي صار يعرف بـِ "قانون أرخميدس ".

وقد قتل أرخميدس عام 212 قبل الميلاد على يد الرومان.

أرخميدس

287 ق م / 212 ق م

نشاط أول



حسب قانون أرخميدس يكون التوازن في الشكل المقابل إذا كان: $m_A \times GA = m_B \times GB$ حيث m_A عدد حقيقي موجب يمثل كتلة جسم معلق في النقطة A و m_B عدد حقيقي موجب يمثل كتلة جسم معلق في النقطة B . GA هي المسافة بين A و G، GB هي المسافة بين B و G .

في الرياضيات $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ شعاعين متوازيان و لهما إتجاهان متعاكسان و القانون يكتب : $m_A\overrightarrow{GA} = -m_B\overrightarrow{GB}$.

أي $m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ وهكذا النقطة G هي نقطة توازن النقطتين A و B المزودتين بالكتلتين m_A و m_B .

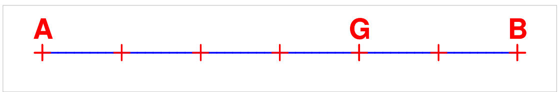
وحدة الكتل هي الكيلوغرام (kg) و وحدة الأطوال هي السنتيمتر (cm) .

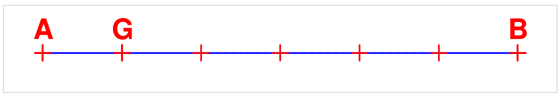
1) التوازن محقق من أجل $m_A = 6kg$ ، أحسب قيمة m_B بدلالة GA و GB .

2) نضع $m_A = 7kg$ و $m_B = 3kg$.

- أكتب $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{GB}$.
- أثبت أن $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$ (يمكن الإستعانة بعلاقة شال).
- أنشئ G علما أن $AB = 20cm$.

3) عين كتلتين m_A و m_B في الوضعيتين الآتيتين لـ G

a) 

b) 

نشاط ثان

ليكن ABC مثلث من المستوي .

لتكن النقطة I من المستوي المعرفة كما يلي $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

لتكن النقطة J من المستوي المعرفة كما يلي $\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

لتكن النقطة G من المستوي المعرفة كما يلي $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

1) أنشئ مثلثا ABC ثم النقطتين I و J .

2) أثبت أن $3\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GC}$. ماذا يمكن القول عن النقط C ، I ، G ؟

3) أثبت أن $-\overrightarrow{GJ} + 2\overrightarrow{GA} = \vec{0}$. ماذا يمكن القول عن النقط A ، J ، G ؟

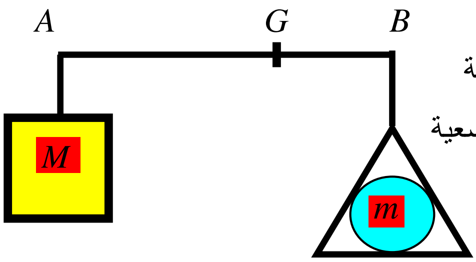
4) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمستقيمين (AJ) و (CI) ؟

5) أنشئ النقطة G

6) أثبت أن $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{CA}$.

7) إستنتج أن المستقيمين (BG) و (AC) متوازيان .

نشاط ثالث



يمثل الشكل المقابل ميزان يحتوي على كفتين متصلتين بطرفي $[AB]$، كفة ثابتة في A تحتوي على كتلة ثابتة M. لوزن بضاعة m نضع في وضعية مضبوطة النقطة G. هذا الميزان له ميزة وهي عدم استعمال كتل عديدة. وحدة الكتل و الأوزان هي الكيلوغرام (kg).

نفرض $M = 2kg$.

1) أين يجب وضع النقطة G على القطعة $[AB]$ للحصول على التوازن إذا كان $m = 4kg$ ؟

2) أين يجب وضع النقطة G على القطعة $[AB]$ للحصول على التوازن إذا كان $m = 3kg$ ؟

3) أين يجب وضع النقطة G على القطعة $[AB]$ للحصول على التوازن إذا كان $m = 2kg$ ؟

4) النقطة G معرفة كما يلي : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

ما هو وزن البضاعة m ؟

نشاط رابع

الجدول الموالي يعطي معدل النقط المحصل عليها من طرف تلميذ خلال فصل دراسي .

	المواد	المعاملات	النقط
المواد الأدبية	اللغة العربية	4	12
	التربية الإسلامية	2	13.5
	الإجتماعيات	2	09.5
	اللغة الفرنسية	3	10
	اللغة الإنجليزية	2	10
المواد العلمية	رياضيات	5	11
	علوم فيزيائية	4	08.5
	علوم طبيعية	4	09.5
المواد الأخرى	الموسيقى	1	12
	الرسم	1	13.5
	الرياضة	1	16

1) أحسب المعدل الفصلي للتلميذ .

2) أحسب المعدل m_1 معدل المواد العلمية و المعدل m_2 معدل المواد الأدبية و المعدل m_3 معدل المواد الأخرى.

3) أحسب العدد $\frac{13\times m_1 + 13\times m_2 + 3\times m_3}{29}$.ماذا تستنتج ؟

تذكير حول الأشعة.

1.الأشعة المرتبطة خطيا.

تعريف1: نقول أن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث أن $\vec{u}=k\vec{v}$.

تعريف2: يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين .

ملاحظة: الشعاع المعدوم الذي نرمز له $\vec{0}$ مرتبط خطيا مع كل شعاع من المستوي.

2.طويلة شعاع.

تعريف: طويلة شعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ هي طول القطعة $[AB]$ و نرمز لها $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ونكتب $\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.

ملاحظات:

يكون الشعاع $\vec{u}$ شعاع وحدة إذا و فقط إذا كان $\left\|\vec{u}\right\|=1$ (وحدة أطوال في المستوي).

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=0$ معناه النقطة A منطبقة على النقطة B .

من أجل كل شعاع $\vec{u}$ و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $\left\|k\vec{u}\right\|=|k|\times\left\|\vec{u}\right\|$.

$M\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ (k عدد حقيقي)

3.التوازي و الإستقامة.

مبرهنة1: القول أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

مبرهنة2: القول أن النقط A ، B ، C استقامة واحدة معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

4.الأشعة المرتبطة خطيا في الهندسة التحليلية.

مبرهنة1: في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) ليكن الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه: $xy'-x'y=0$.

مبرهنة2: في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) لتكن القطتان $A(x,y)$ و $B(x',y')$.

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$.

مبرهنة3: في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J) ليكن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

طويلة الشعاع $\vec{u}$ هي : $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

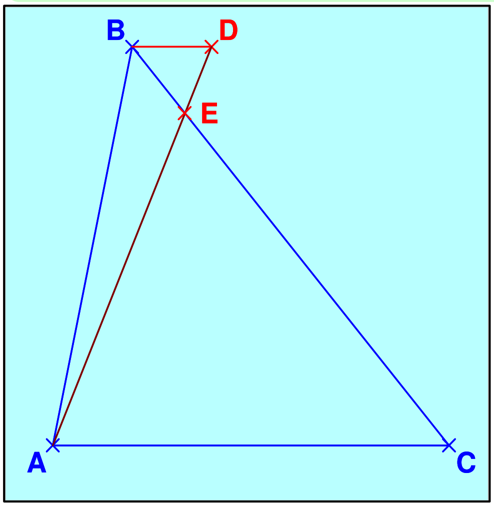
طرائق

تمرين محلول 1

ليكن ABC مثلث من المستوي، لتكن النقطة D حيث $5\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ و لتكن النقطة E حيث $6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$

أثبت أن النقط A ، E ، D على استقامة واحدة .

طريقة: لإثبات أن النقط A ، E ، D على استقامة واحدة نثبت أن $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{DE}$ (k عدد حقيقي) .



حـــل: بتطبيق علاقة شال $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$.

نعلم أن $5\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ ومنه $5\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}$. ونعلم أن $6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$.

لدينا $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=6\overrightarrow{BE}$ (الرسم المقابل) ومنه $\overrightarrow{EC}=5\overrightarrow{BE}$.

$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$ ومنه $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{BE}+5\overrightarrow{DB}$ أي

$\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{DB}+5\overrightarrow{BE}$ ومنه $\overrightarrow{EA}=5\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}\right)$

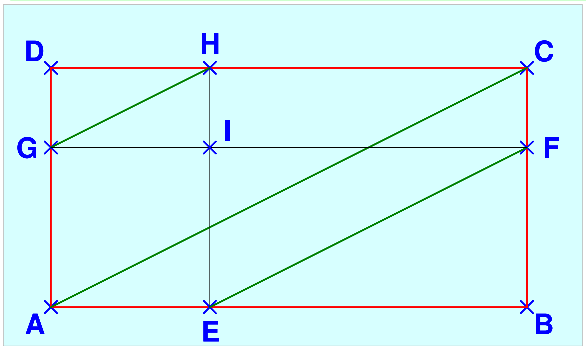
أي $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{DE}$

إذن النقط A ، E ، D في استقامية .

تمرين محلول 2

ليكن $ABCD$ مستطيلا من المستوي، α عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1 ، E النقطة حيث $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}$. لتكن F النقطة حيث $\overrightarrow{BF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}$. المستقيم الموازي للمستقيم (AD) و يشمل E يقطع المستقيم (CD) في H. المستقيم الموازي للمستقيم (AB) و يشمل F يقطع المستقيم (AD) في G. المستقيمان (EH) و (FG) يتقاطعان في النقطة I . أثبت أن المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية .

طريقة: لإثبات أن المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{GH}$ مرتبطة خطيا مثنى مثنى .



حـــل: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EB}$ (محصلة شعاعين)

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+(1-\alpha)\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)$ و منه $\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$

إذن (AC) و (EF) متوازيين . $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GI}$ (محصلة شعاعين) ومنه $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BC}-(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{GH}=\alpha\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{GH}=\alpha\overrightarrow{AC}$

ومنه (EF) و (GH) متوازيين . و بالتالي المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية .

ملاحظة: يمكن اختيار الطريقة التحليلية باعتبار المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

مرجح نقطتين.

تعريف مرجح نقطتين.

تعريف: لتكن A و B نقطتين متمايزتين و ليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\alpha+\beta\neq 0$.
نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب النقطة G حيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

ملاحظات: إذا كانت نقطة A مرفقة بالعدد الحقيقي α الثنائية (A,α) تسمى نقطة مثقلة .

الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين(يمكن تعريف وبنفس الطريقة جملة n نقطة مثقلة).

النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

إذا كانت A منطبقة على B نحصل على $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ وبما أن $\alpha+\beta\neq 0$ فإن $\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ أي G ينطبق على A

إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي $\alpha=-\beta$ العلاقة تصبح $\alpha(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})=\vec{0}$ و هذا غير ممكن إذا كان $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$

و النقطة G غير موجودة . مثلا إذا كان $\alpha=2$ و $\beta=-2$ وإذا كان $A\neq B$ الجملة $\{(A,2);(B,-2)\}$ ليس لها مرجح.

نتيجة: إذا كان $\beta=\alpha$ نحصل $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ و النقطة G منتصف القطعة $[AB]$ تسمى عندئذ G مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B .وفي هذه الحالة نأخذ $\alpha=\beta=1$.

مبرهنة1: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإن النقطة G وحيدة.

برهان: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ معناه $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ومنه $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}$ بما أن $\alpha+\beta\neq 0$

فإن $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. A و B نقطتان ثابتتان إذا G وحيد .

خواص: 1• إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$. حيث k عدد حقيقي غير معدوم .

2• إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. فإن النقط A ، B و G على استقامة واحدة.

برهان:

1• $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ بضرب الطرفين في العدد الحقيقي الغير المعدوم k نحصل على:

$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ونعلم أن $\alpha+\beta\neq 0$ و بما أن $k\neq 0$ فإن $k\alpha+k\beta\neq 0$ و هذا يعني صحة الخاصة الثانية .

2• من المبرهنة 1 السابقة نعلم أن $\overrightarrow{GA}=-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ معناه أن النقط A ، B و G على استقامة واحدة.

مبرهنة2: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإن من أجل كل نقطة M $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

برهان:

من أجل كل نقطة M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}$ وبما أن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
فإن $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

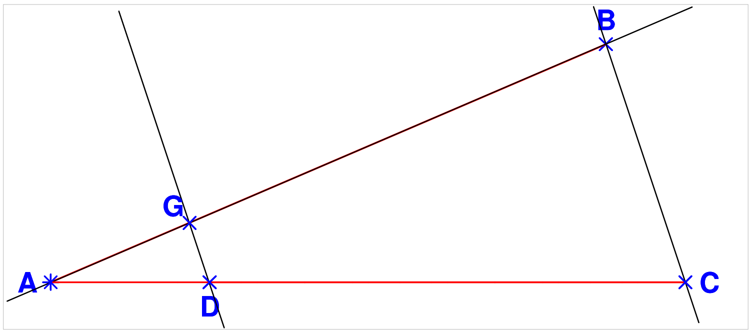
ملاحظة: إذا كان المرجح G منتصف القطعة $[AB]$ فإن من أجل كل نقطة M $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$.

تمرين محلول 3

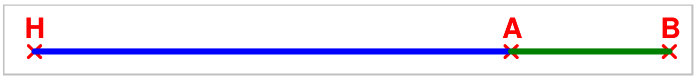
A و B نقطتان متمايزتان .
1) أنشئ النقطة ِ G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب .
2) أنشئ النقطة H مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -4 و 3 على الترتيب .

طريقة: نعلم أنه إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم إنطلاقا من A نضع G على بعد $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.(يمكن الإستعانة مبرهنة طاليس كما هو في الحل)

حـــل: 1) $4=1+3$ و $4\neq 0$ إذا النقطة G موجودة و وحيدة . و هي تحقق ما يلي $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ إذا النقطة G تنتمي إلى المستقيم (AB)ولإنشاء النقطة Gنختار قطعة $[AC]$ نقسمها إلى 4 أجزاء متقايسة ثم نضع النقطة D على (AC) بحيث $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ثم من Dننشئ المستقيم (Δ) الموازي للمستقيم (BC). (Δ)يقطع (AB) في النقطة G.



2) $3-4=-1$ و $-1\neq 0$ إذا النقطة H موجودة و وحيدة . و هي تحقق ما يلي $-4\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AH}=-3\overrightarrow{AB}$ إذا النقطة H تنتمي إلى المستقيم (AB) وننشئ النقطة H بنفس الطريقة السابقة.



تمرين محلول 4

A و B نقطتان متمايزتان .
1) لتكن النقط K حيث أن: $\overrightarrow{AK}=-\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$. أثبت أن K مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين صحيحين يطلب تعيينهما
2) أثبت أن كل نقطة من المستقيم (AB) هي مرجح للنقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

حـــل: 1) $\overrightarrow{AK}=-\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$ و منه $3\overrightarrow{AK}=-8\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}\right)$ و بالتالي $11\overrightarrow{AK}+8\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ و نستنتج أن: $11\overrightarrow{KA}-8\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ إذا K مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين 11 و -8 على الترتيب.

2)لتكن M نقطة من المستقيم (AB) إذن الشعاعين $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا و منه يوجد عدد حقيقي α حيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{AM}=\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)$ وبالتالي $(1-\alpha)\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{MB}$. و نستنتج أن: $(1-\alpha)\overrightarrow{AM}-\alpha\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ بعبارة أخرى $(1-\alpha)\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

$(1-\alpha)+\alpha=1$ و $1\neq 0$ إذا النقطة M مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين $1-\alpha$ و α على الترتيب.

و في الخلاصة نستنتج أن المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح الجملة $\{(A,1-\alpha);(B,\alpha)\}$. حيث α يمسح $\mathbb{R}$.

مرجح ثلاث نقط.

تعريف مرجح ثلاث نقط.

تعريف: A ، B ، و C ثلاث نقط و α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
نسمي مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

مبرهنة1: إذا كانت النقطة G مرجحا للنقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب فإن النقطة G وحيدة.

برهان: بكتابة $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$ نحصل على $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

و منه $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\right)$

بوضع $\lambda=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ نحصل على $\overrightarrow{AG}=\lambda\vec{u}$ ومنه G وحيدة .

ملاحظة: إذا كانت المعاملات متساوية و غير معدومة يسمى G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، و C. ونأخذ في هذه الحالة المعاملات مساوية لــ 1 ،عندئذ و إذا كانت النقط ليست على استقامة واحدة النقطة G هي مركزثقل المثلث ABC ، بالفعل G تحقق $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و منه $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. حيث A' منتصف الضلع $[BC]$. إذن النقطة G على ثلثي البعد من A و ثلث البعد من A' و بالتالي G مركز ثقل المثلث ABC .

خاصية: إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$. فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$. حيث k عدد حقيقي غير معدوم .

مبرهنة2: إذا كانت النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب فإن من أجل كل نقطة M ، $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

برهان: بكتابة $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}$ ، $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$ نحصل على
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

خاصية التجميع.

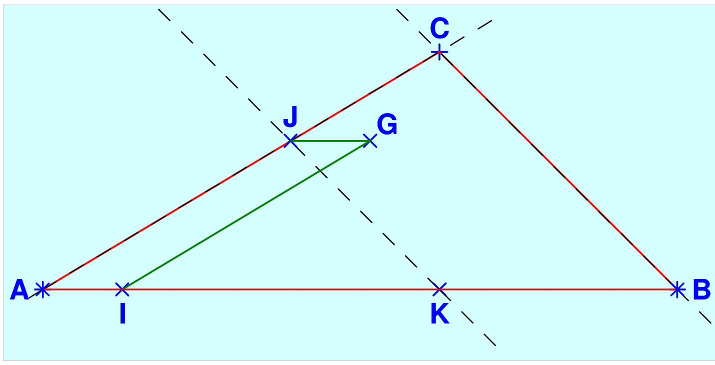
مبرهنة: G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.
إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ و كان D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.
فإن النقطة G مرجح النقطتين D و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha+\beta$ و γ على الترتيب.

برهان: لدينا $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و نعلم أن من أجل كل نقطة M لدينا $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MD}$
و إذا كانت M منطبقة على G، $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GD}$ ومنه $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GD}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و بالتالي G مرجح النقطتين D و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha+\beta$ و γ على الترتيب.
ونستنتج أنه يمكن تعويض نقطتين بمرجحيهما مرفق بمجموع المعاملين .

تمرين محلول 5

A ، B ، و C ثلاث نقط من المستوي

أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالعوامل 2 ، 1 و 5 على الترتيب



حـــل: $2+1+5=8$ و $8\neq 0$ إذن G موجود و وحيد . النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالعوامل 2 ، 1 و 5 على الترتيب معناه $2\vec{GA}+\vec{GB}+5\vec{GC}=\vec{0}$ و بكتابة $\vec{GB}=\vec{GA}+\vec{AB}$ و $\vec{GC}=\vec{GA}+\vec{AC}$ نحصل على $8\vec{GA}=-\vec{AB}-5\vec{AC}$ ومنه $\vec{AG}=\frac{1}{8}\vec{AB}+\frac{5}{8}\vec{AC}$

لإنشاء $\vec{AG}=\frac{1}{8}\vec{AB}+\frac{5}{8}\vec{AC}$ G نأخذ على $[AB]$ النقطتين I و K حيث $\vec{AI}=\frac{1}{8}\vec{AB}$ و $\vec{AK}=\frac{5}{8}\vec{AB}$.

من K ننشئ المستقيم الموازي للمستقيم (BC) الذي يقطع المستقيم (AC) في J إذا حسب مبرهنة طاليس $\vec{AJ}=\frac{5}{8}\vec{AC}$.

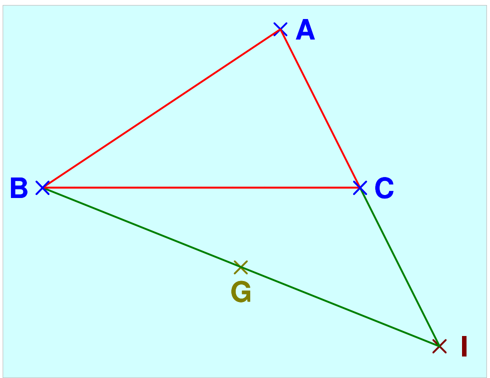
ومنه $\vec{AG}=\vec{AI}+\vec{AJ}$ أي $\vec{AG}$ هي محصلة الشعاعين $\vec{AI}$ و $\vec{AJ}$.

تمرين محلول 6

A ، B ، و C ثلاث نقط من المستوي .

1) أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات -1 ، 1 و 2 على الترتيب

2) ليكن الشعاع $\vec{u}$ المعرف بـــ $\vec{u}=-\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{MC}$ أكتب $\vec{u}$ بدلالة $\vec{MG}$ ثم استنتج مجموعة النقط M التي تحقق $\|\vec{u}\|=2$



حـــل: 1) $2+1-1=2$ و $2\neq 0$ إذا G موجود و وحيد . النقطة G مرجح النقط A ، B ، و C المرفقة بالمعاملات -1 ، 1 و 2 على الترتيب معناه $-\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC}=\vec{0}$. $-1+2=1$ و $1\neq 0$ إذن يوجد مرجح I للنقطتين A و C مرفقتين بالمعاملين -1 و 2 أي $-\vec{IA}+2\vec{IC}=\vec{0}$ أي $\vec{IA}=2\vec{IC}$ و منه $\vec{AI}=2\vec{AC}$ أي C منتصف القطعة $[AI]$.

بتطبيق خاصية التجميع العلاقة $-\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC}=\vec{0}$ تصبح $\vec{GI}+\vec{GB}=\vec{0}$ أي G منتصف القطعة $[IB]$

2) في العلاقة $\vec{u}=-\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{MC}$ ندخل G في الأشعة $\vec{MA}$ ، $\vec{MB}$ و $\vec{MC}$ و نحصل على :
$\vec{u}=-\vec{MG}-\vec{GA}+\vec{MG}+\vec{GB}+2\vec{MG}+2\vec{GC}$ و بما أن $-\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC}=\vec{0}$ نستنتج : $\vec{u}=2\vec{MG}$.
$\|\vec{u}\|=2$ يعني $\|2\vec{MG}\|=2$ أي $MG=1$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

إحداثيات مرجح ثلاث نقط.

مبرهنة: المستوي منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. لتكن النقطة G مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات α، β و γ على الترتيب. نضع $A\left(x_A;y_A\right)$، $B\left(x_B;y_B\right)$ و $C\left(x_C;y_C\right)$ إحداثيا النقطة G هي $\left(x_G;y_G\right)$ حيث :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

برهان: G مرجح النقط A، B ، C و المرفقة بالمعاملات α، β و γ على الترتيب. ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ إذا أخذنا M على O نحصل على :

$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OG}$ و منه $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

ومن هذه العلاقة نستنتج : $x_G=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}x_A+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}x_B+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\lambda}x_C$

$$y_G=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}y_A+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}x_B+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\lambda}y_C$$

و بالتالي : $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

ملاحظة: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب. و كان : $A\left(x_A;y_A\right)$، $B\left(x_B;y_B\right)$ و $G\left(x_G;y_G\right)$ فإن $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ و $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

مثال: المستوي منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ لتكن النقط $A(1;2)$ ، $B(-3;5)$ و $C(0;2)$.

النقطة G مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات -1، -1 و 4 على الترتيب إحداثياها :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{-1+3+0}{2}=1 \quad \text{و} \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{-2-5+8}{2}=\frac{1}{2}$$

حالات خاصة: 1) إذا كانت النقطة G منتصف القطعة $[AB]$.

$$x_G=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{y_A+y_B}{2} .$$

2) إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} .$$

مرجح عدة نقط. (مرجح n نقطة حيث $n>3$)

تعريف: لتكن A_1، A_2، A_3، ..... A_n n نقطة مرفقة بالمعاملات α_1، α_2، α_3، ...... α_n على الترتيب حيث. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+....+\alpha_n\neq 0$ نسمي مرجح النقط A_1، A_2، A_3، ..... A_n مرفقة بالمعاملات α_1، α_2، α_3، ...... α_n على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\alpha_3\overrightarrow{GA_3}+....+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

ملاحظة: الخواص المعروفة في مرجح ثلاث نقط تبقى صحيحة.

تمرين محلول 9

المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.لتكن النقط $A(1;2)$ ، $B(-1;4)$ و $C(-3;3)$.

1) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) عين إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC .

3) عين إحداثيات النقطة H مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,-3);(C,2)\}$.

حــــل: 1)للبرهان على أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة يمكن أن نبرهن أن المستقيمين (AB) و (AC) غير متوازيين .الشعاعان $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ هما شعاعا توجيه للمستقيمين (AB) و (AC) على الترتيب .

$(-2)\times(1)-(-4)\times(2)=6$ و $6\neq 0$ إذن المستقيمان (AB) و (AC) غير متوازيين . و بالتالي النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة و ABC مثلث من المستوي .

2) ليكن G مركز ثقل المثلث ABC . نضع $G(x_G;y_G)$.

$x_G=\dfrac{1-1-3}{3}$ و $y_G=\dfrac{2+4+3}{3}$. و منه $x_G=-1$ و $y_G=3$.

إذن $G(-1;3)$.

3) $-1-3+2=-2$ و $-2\neq 0$ إذن المرجح H موجود و وحيد نضع $H(x_H;y_H)$.

$x_H=\dfrac{(-1)\times 1+(-3)\times(-1)+2\times(-3)}{-2}$ و $y_H=\dfrac{(-1)\times 2+(-3)\times 4+2\times 3}{-2}$

و منه : $x_H=2$ و $y_H=4$ و بالتالي : $H(2;4)$

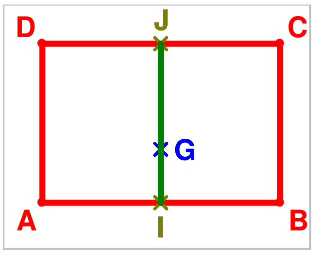
تمرين محلول 10

$ABCD$ مستطيل من المستوى.

1) عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,1);(D,1)\}$.

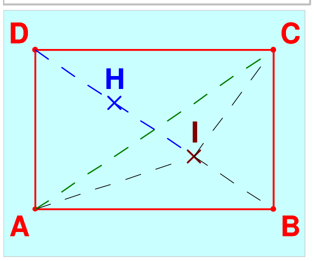
2) عين النقطة H مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$.

حــــل: 1) $2+1+2+1=6$ و $6\neq 0$ إذن المرجح G موجود و وحيد. $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.نلاحظ أن النقطتين A و B مرفقتان بنفس المعامل 2 وأن النقطتين C و D مرفقتان بنفس المعامل 1.إذن يمكن تعويض A و B بالنقطة I مرجحيهما مرفقتين بالمعاملين 2 ، 2 على الترتيب ومنه I منتصف القطعة $[AB]$ و يمكن تعويض C و D بالنقطة J مرجحيهما مرفقتين بالمعاملين 1،1 على الترتيب و منه J منتصف القطعة $[CD]$ و بالتالي $4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$



2) $1+1+1+3=6$ و $6\neq 0$ إذن المرجح H موجود و وحيد.

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+3\overrightarrow{HD}=\vec{0}$.نلاحظ أن النقط A ، B و C مرفقة بنفس المعامل 1 . يمكن تعويض A ، B و C بـ I مركزثقل المثلث ABC . و بالتالي $3\overrightarrow{GI}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ إذن G منتصف $[ID]$



أعمال موجهة

تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح.

ABC مثلث من المستوي. α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
ليكن G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب .
الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي k المجموعة (Γ_k) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\| \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} \|=k$$

1. أكتب الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$ ثم بين أن $MG=\dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}$.
2. ناقش تبعا لقيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (Γ_k) محددا عناصرها الهندسية .

تطبيقات:

1. ABC مثلث. بين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\| \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} \|=6$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

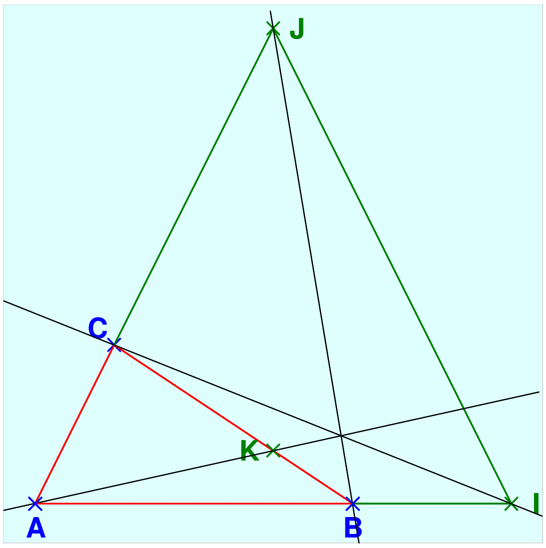
2. ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين من المستوي. حيث $CA=CB=1$.
عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}$.

3. ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=1$.
عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{3}$.

4. ABC مثلث. عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$.

5. ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=\alpha$. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$
   - تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ).
   - بين أن الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M.
   - ليكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,-4),(C,1)\}$.
   بين أن $GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.
   - أنشئ المجموعة (Γ).

استعمال المرجح لإثبات تلاقي مستقيمات:



ليكن ABC مثلث من المستوي لتكن النقط I ، J و K المعرفة كما يلي :

I نظيرة منتصف القطعة $[AB]$ بالنسبة إلى B .

النقطة J تحقق العلاقة $2\overrightarrow{JA}-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

النقطة K تحقق العلاقة $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) أرسم شكلا توضع فيه النقط I ، J و K مع إعطاء تبرير ا لهذا الإنشاء . ماذا يمكن تخمينه بخصوص المستقيمات (CI) ، (BJ) و (AK) .

2) أثبت أن كل نقطة من النقط I ، J و K هي مرجح لنقطتين من النقط A ، B و C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة .

3) أثبت أن المستقيمات (CI) ، (BJ) و (AK) متقاطعة .

مستقيم اولار (Euler):

ليكن ABC مثلث من المستوي و النقطة G مركز ثقله . و O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

لتكن A' منتصف القطعة $[BC]$ ، B' منتصف القطعة $[AC]$ ، C' منتصف القطعة $[AB]$.

لتكن النقطة H حيث أن : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

1) أنجز رسما بدون إنشاء النقطة H.

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{OA'}$ مرتبطان خطيا .

إستنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين .

3) ماذا تمثل النقطة H ؟

4) أثبت أن O مرجح النقطتين H و G مرفقتين بالمعاملين -1 و 3 على الترتيب.

5) أثبت أن النقط O ، G و H على استقامة واحدة . حدد وضعية النقط الثلاثة .

حالة خاصة: إذا كان المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن النقط الثلاثة O ، G و H منطبقة على بعضها

نتيجة: المستقيم الذي يشمل النقط O ، G و H يسمى **مستقيم اولار (Droite d'_Euler) للمثلث** ABC .

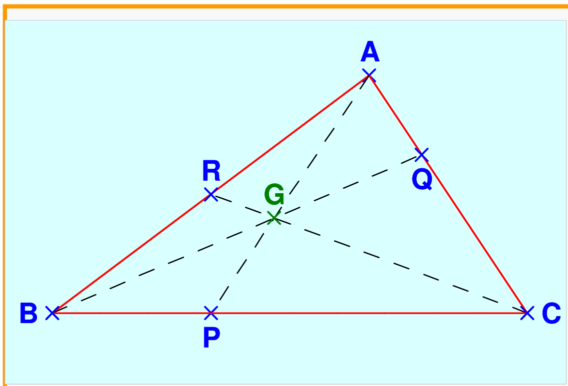
مسائل محلولة

الهدف من هذه المسألة هو إثبات تقاطع مستقيمات باستعمال المرجح .

ABC مثلث من المستوي و النقط P ، Q و R معرفة كما يلي :

- $2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
- R منتصف القطعة $[AB]$.

أثبت أن المستقيمات (AP) ، (BQ) و (CR) متقاطعة في نقطة يطلب تعيينها .



النقطة P معرفة بالعلاقة $2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ و منه النقطة P هي مرجح النقطتين B و C مرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب و نستنتج أن $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

النقطة Q معرفة بالعلاقة $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و نستنتج أن $2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\vec{0}$. و منه النقطة Q هي مرجح النقطتين A و C مرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب.

النقطة R منتصف القطعة $[AB]$ إذا النقطة R هي مرجح النقطتين A و B مرفقتين بالمعاملين 1 و 1 على الترتيب.

لتكن النقطة G مرجح A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 2 و 1 على الترتيب. و منه $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

$2+2+1=5$ و $5\neq 0$ إذا المرجح G موجود و وحيد.

حسب خاصية التجميع:

النقطة G مرجح الجملة $\{(P,3);(A,2)\}$. ومنه النقطة G تنتمي إلى المستقيم (AP).

النقطة G مرجح الجملة $\{(Q,3);(B,2)\}$. ومنه النقطة G تنتمي إلى المستقيم (BQ).

النقطة R منتصف القطعة $[AB]$ إذا $\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}=\vec{0}$. و منه و بضرب الطرفين في 2 نحصل على $2\overrightarrow{RA}+2\overrightarrow{RB}=\vec{0}$.

في العلاقة $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ندخل النقطة R في الشعاعين $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ و نحصل على :

$$2\left(\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{RA}\right)+2\left(\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{RB}\right)+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{GR}+2\overrightarrow{RA}+2\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

و نعلم أن $2\overrightarrow{RA}+2\overrightarrow{RB}=\vec{0}$.

إذا $4\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و بالتالي النقطة G مرجح الجملة $\{(R,4);(C,1)\}$.

ومنه النقطة G تنتمي إلى المستقيم (CR).

إذا النقطة G تنتمي إلى المستقيمات (AP) ، (BQ) و (CR).

و منه المستقيمات (AP) ، (BQ) و (CR) متقاطعة في نقطة واحدة هي النقطة G مرجح A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 2 و 1 على الترتيب .

الهدف من هذه المسألة هو إيجاد نهاية متتالية باستعمال المرجح .

ABC مثلث متساوي الساقين في النقطة A ليكن $[AH]$ الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ حيث $AH = 4cm$.

1) عين وأنشئ النقطة G مرجح A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 1 و 1 على الترتيب .

2) M نقطة من المستوي. عين طويلة الشعاع $\vec{u}$ حيث : $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

3) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|$.

4) لتكن G_n مرجح الجملة A ، B و C $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$. حيث n عدد طبيعي

أثبت أن النقطة G_n موجودة من أجل كل قيمة لـ n .

أثبت أن G_n ينتمي إلى القطعة $[AH]$.

5) بين أن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\| = n\left\|\vec{u}\right\|$ دائرة (Γ_n)

تشمل النقطة A يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها . نسمي Γ_n هذه الدائرة .

أحسب المسافة AG_n بدلالة n.

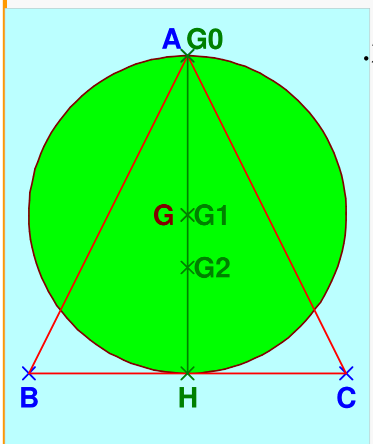
6) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \frac{4x}{x+1}$. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

7) عين نهاية AG_n . ماذا يمكن القول عن Γ_n .

1) $2+1+1=4$ و $4 \neq 0$ إذن G موجود و وحيد . $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ‏ G منتصف القطعة $[AH]$.

2) $\vec{u} = -\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ و منه $\left\|\vec{u}\right\| = 8$.

3) ندخل G في الأشعة $\overrightarrow{MA}$، $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ و نحصل على : $4\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 8$



و منه $MG = 2$ إذا مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 2.

4) $2+n+n = 2+2n$ و من أجل كل عدد طبيعي n ‏ G_n موجود و وحيد .

$2\overrightarrow{G_nA}+n\overrightarrow{G_nB}+n\overrightarrow{G_nC}=\vec{0}$ و بالتالي $(2+2n)\overrightarrow{G_nA}+n\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

و منه $\overrightarrow{G_nA} = \frac{n}{1+n}\overrightarrow{AH}$ و بالتالي $\left\|\overrightarrow{G_nA}\right\| = \frac{n}{1+n}\left\|\overrightarrow{AH}\right\|$ و نلاحظ أن

$0<\frac{n}{1+n}<1$ من أجل كل قيمة لـ n . و منه G تنتمي إلى القطعة $[AH]$.

5) ندخل G في الأشعة $\overrightarrow{MA}$ ، $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ و نحصل على : $(2+2n)\left\|\overrightarrow{MG_n}\right\| = 8n$

و منه $MG_n = \frac{8n}{2+2n}$ أي $MG_n = \frac{4n}{1+n}$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G_n ونصف قطرها $\frac{4n}{1+n}$

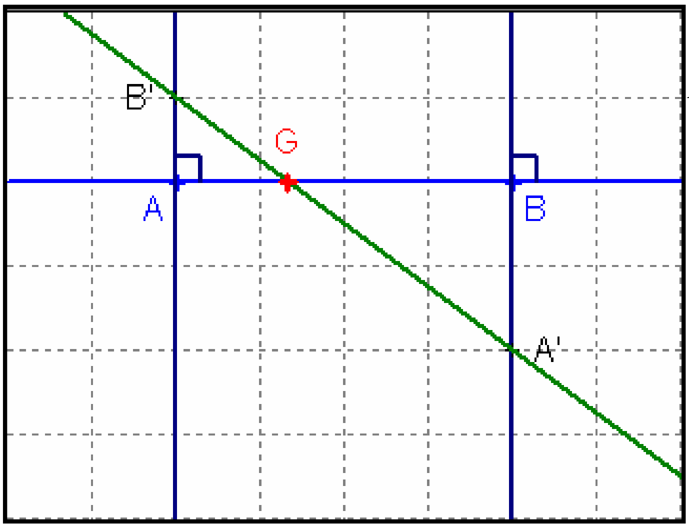
في العلاقة $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{u}\right\|$ إذا عوضنا M بـ A نجد أن A عنصر من Γ_n . AG_n هو نصف قطر Γ_n.

6) $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ و $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة على $[0,+\infty[$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 4$.

7) من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} AG_n = 4$. والدائرة Γ_n تؤول إلى الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها 4 .

إنشاء مرجح نقطتين

❖ **اكتشاف طريقة لإنشاء مرجح نقطتين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية:**



خطوات الانجاز باستعمال برمجية ديكليك $(Declic)$

باستعمال الأزرة ، و أنشئ نقطتين A و B على مستقيم مدرج (Δ). باستعمال الزر أنشئ محورين (Δ_1) و (Δ_2) عمودين على المستقيم (Δ) و متعاكسين مبدءاهما A و B على الترتيب.

أنشئ مستقيما (D) يقطع (Δ_1) في النقطة B' و يقطع (Δ_2) في النقطة A' (يتم إنشاء A' و B' باستعمال الزر). نسمي G نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) في حالة وجودها.نرمز بـِ a إلى فاصلة النقطة A' على (Δ_2) و بـِ b إلى فاصلة النقطة B' على (Δ_1).

1. ● قم بتحريك النقطتين A' و B' بحيث تنتمي النقطة G إلى القطعة المستقيمة $[AB]$ و يكون:
   $AB'=1$ و $BA'=2$
   ● بين أن: $\dfrac{GA}{GB}=\dfrac{1}{2}$
   ● بين أن النقطة G هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بالمعاملين 2 و 1.
2. ● قم بتحريك النقطتين A' و B' بحيث لا تنتمي النقطة G إلى القطعة المستقيمة $[AB]$ و يكون:
   $AB'=3$ و $BA'=1$
   ● بين أن: $\dfrac{GA}{GB}=3$
   ● بين أن النقطة G هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بالمعاملين 1 و -3.
3. استنتج مما سبق طريقة لإنشاء مرجح نقطتين متقلتين.
4. ما هي الشروط التي يجب أن تحققها a و b حتى:
   - لا تنتمي النقطة G إلى $[AB]$ و تكون أقرب إلى A منها إلى B.
   - لا تنتمي النقطة G إلى $[AB]$ و تكون أقرب إلى B منها إلى A.
   - تنتمي النقطة G إلى $[AB]$ و تكون أقرب إلى A منها إلى B.
   - تنتمي النقطة G إلى $[AB]$ و تكون أقرب إلى B منها إلى A.

تطبيق: أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,-2),(B,3)\}$.

أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **10** أجب بصحيح أم خاطئ

1 إذا كان G مرجح للجملة $\{(A,2);(B,1)\}$ فإن:
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

2 إذا كانت $[AB]$ قطعة مستقيمة و C نقطة بحيث $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ فإن A هي مرجح النقطتين B و C المرفقتين بالمعاملين 1 و -3 على الترتيب.

3 إذا كان ABC مثلثا مركز ثقله G و كانت I منتصف القطعة $[AB]$ فإن A هي مرجح للجملة $\{(G,3);(I,2)\}$

4 إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع فإن A مرجح الجملة $\{(B,1);(D,1);(C,-1)\}$

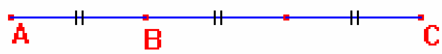
5 A، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية .توجد نقطة G من المستوي معرفة بالعلاقة:
$$4\overrightarrow{AG}-7\overrightarrow{BG}-3\overrightarrow{GC}=7\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

6 إذا كانت النقطة G معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ فإن G هي مرجح للجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,-3)\}$.

7 $ABCD$ رباعي محدب و O نقطة تقاطع قطريه. O هي مركز المسافات المتساوية للنقط A، B، C و D يكافئ $ABCD$ متوازي أضلاع .

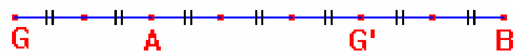
8 $[AB]$ قطعة مستقيمة و I منتصفها.مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2AB$ هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها AB .

9 A، B و C ثلاثة نقط في استقامية كما هو مبين في الشكل



B هي مرجح للجملة $\left\{(A,1);\left(C,\frac{1}{2}\right)\right\}$

10 A، B، G و G' أربع نقط في استقامية كما هو مبين في الشكل



G هي مرجح للجملة $\{(A,-7);(B,2)\}$ و G' هي مرجح للجملة $\{(A,2);(B,3)\}$

أسئلة متعددة الاختيارات

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة بالنسبة للتمارين من **11** إلى **17**

11 m عدد حقيقي. مرجح $(A,3m)$، $(B,5m-2)$ يكون موجودا إذا كان:

1) $m\neq 1$ 2) $m\neq 0$ 3) $m\neq\frac{1}{4}$

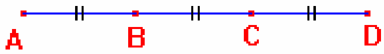
12 مرجح الجملة $\{(A,2);(B,3)\}$ هو النقطة G حيث:

1) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ 2) $2\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}$ 3) $5\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$

13 G مرجح للجملة $\{(A,1);(B,3)\}$ ، إذن A هو مرجح للجملة:

1) $\{(B,4);(G,3)\}$ ، 2) $\{(B,3);(G,-4)\}$
3) $\{(B,3);(G,4)\}$

14



في هذا الشكل ، النقطة B هي مرجح الجملة

1) $\{(A,-1);(D,1)\}$ ، 2) $\{(A,-1);(C,4)\}$
3) $\{(A,2);(D,1)\}$

15 مرجح الجملة $\{(A,-2);(B,3);(C,-1)\}$ هو أيضا مرجح للجملة :

1) $\left\{(A,1);\left(B,\frac{3}{2}\right);\left(C,\frac{1}{2}\right)\right\}$
2) $\{(A,4);(B,-6);(C,1)\}$
3) $\left\{\left(A,\frac{1}{3}\right);\left(B,-\frac{1}{2}\right);\left(C,\frac{1}{6}\right)\right\}$

16 $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ،إذن G هي مرجح الجملة:

1) $\left\{(A,1);\left(B,-\frac{3}{5}\right);\left(C,\frac{2}{5}\right)\right\}$
2) $\{(A,6);(B,-3);(C,2)\}$
3) $\{(A,5);(B,-3);(C,2)\}$

17 ABC مثلث مجموعة النقط M من المستوي بحيث
$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{BC}\right\|$$

1) مستقيم 2) دائرة 3) مجموعة خالية

مرجح نقطتين

18 $[AB]$ قطعة مستقيمة حيث $AB = 8cm$

أنشئ مرجح (A,α) و (B,β) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\alpha = 4$ و $\beta = 6$ 2) $\alpha = \frac{1}{6}$ و $\beta = \frac{1}{3}$

3) $\alpha = 3$ و $\beta = -2$ 4) $\alpha = 3009$ و $\beta = 2006$

19 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي.

أنشئ مرجح الجمل المثقلة التالية:

1) $\{(A,4);(B,5)\}$

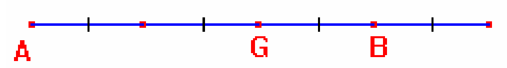
2) $\{(A,8);(B,-5)\}$

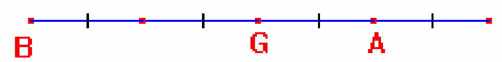
3) $\{(A,-6);(B,2)\}$

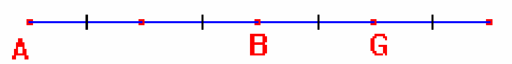
4) $\left\{\left(A,-\frac{1}{2}\right);\left(B,-\frac{1}{3}\right)\right\}$

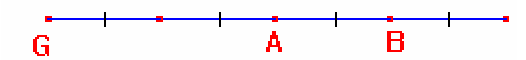
5) $\left\{\left(A,\sqrt{12}\right);\left(B,\sqrt{3}\right)\right\}$

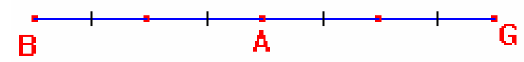
20 في كل حالة من الحالات التالية عين عددين حقيقيين a و b حيث تكون النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,a);(B,b)\}$

1)


2)


3)


4)


5)


21 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي. اذكر إن كانت النقطة G مرجحا لجملة مثقلة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ 2) $5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

3) $3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{AB}$ 4) $\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

5) $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ 6) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{BA}$

22 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي . G نقطة معرفة بالعلاقة المعطاة. جد عددين حقيقيين α و β حيث تكون G مرجح (A,α) و (B,β)

1) $3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2) $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

3) $2\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GB}$

4) B نظيرة G بالنسبة إلى A

23 علما أن C هي مرجح للجملة $\{(A,2);(B,-3)\}$

من أجل أي جملة مثقلة يكون A مرجحا ؟ B مرجحا؟

24 علما أن B هي مرجح للجملة $\{(A,3);(C,1)\}$

من أجل أي جملة مثقلة يكون A مرجحا ؟ C مرجحا؟

25 علما أن A هي مرجح للجملة $\left\{\left(B,\frac{1}{5}\right);\left(C,-\frac{1}{10}\right)\right\}$

من أجل أي جملة مثقلة يكون B مرجحا ؟ C مرجحا؟

26 هذا التمرين هو تعميم للتمارين 23 ، 24 و 25

علما أن C هي مرجح للجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ ،

بين أن: A مرجح الجملة $\{(B,-\beta);(C,\alpha+\beta)\}$

و B مرجح الجملة $\{(A,-\alpha);(C,\alpha+\beta)\}$

27 A ، B و C ثلاثة نقط من المستوي ليست في استقامية. مثل النقطة G_1 مرجح $(A,1)$ و $\left(B,-\frac{1}{2}\right)$

و النقطة G_2 مرجح $(B,-1)$ و $(C,2)$.

28 1) أنشئ النقطة G مرجح $(A,1)$ و $\left(B,-\frac{3}{2}\right)$

و النقطة G' مرجح $(A,-1)$ و $\left(B,-\frac{1}{2}\right)$

2) احسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

29 ليكن ABC مثلثا. B' مرجح $(A,-2)$ و $(C,1)$

A' مرجح $(A,2)$ و $(B,-3)$

C' مرجح $(C,-1)$ و $(B,3)$

1) أنشئ الشكل.

2) بين انه مهما كانت النقطة M من المستوي:

$$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$$

3) استنتج أن النقط A' ، B' و C' في استقامية.

30 ليكن ABC مثلثا. G_1 مرجح $(B,2)$ و $(C,-3)$
و G_2 مرجح $(A,1)$ و $(C,-3)$

1) أنشئ الشكل.

2) عبر عن $\overrightarrow{AG_1}$ و $\overrightarrow{BG_2}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) استنتج أن (BG_2) و (AG_1) متوازيان

31 ليكن ABC مثلثا. L مرجح $(A,2)$ و $(C,1)$
M مرجح $(A,1)$ و $(B,2)$
N مرجح $(C,1)$ و $(B,-4)$

1) أثبت أن B مرجح $(C,1)$ و $(N,3)$

2) بين أن M منتصف القطعة $[LN]$

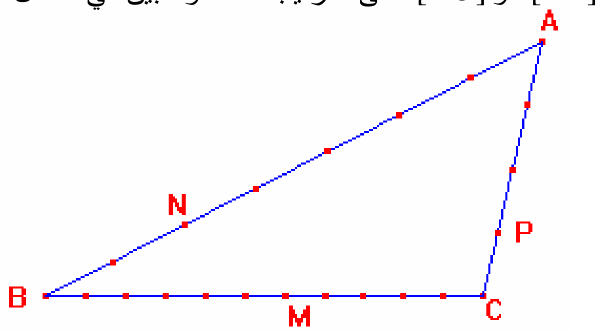
3) لتكن النقطتين I و J منتصفي القطعتين $[CL]$ و $[CN]$ على الترتيب.
بين أن الرباعي $LMJI$ متوازي أضلاع و أن مركزه O هو مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C.

32 ABC مثلث. J و L نقطتان معرفتان كما يلي:
$\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$. الموازي لـ (AC) و المار بـ J يقطع (BC) في K.

1) عبر عن L كمرجح للنقطتين A و C.

2) عبر عن K كمرجح للنقطتين B و C.

33 ABC مثلث. M ، N و P نقاط من $[BC]$ ، $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب كما هو مبين في الشكل



1) عبر عن M كمرجح للنقطتين B و C
و عن N كمرجح للنقطتين A و B
و عن P كمرجح للنقطتين A و C.

2) بين أن المستقيمات (AM) ، (NC) و (BP) متقاطعة في نقطة واحدة.

34 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. نعتبر النقطتين I و J حيث I مرجح $\left(A,-\frac{1}{2}\right)$ و $\left(B,\frac{3}{2}\right)$
و J مرجح $(A,2)$ و $(D,-3)$

1) أنشئ الشكل.

2) بين أن: $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$

3) بين أن النقط C ، I و J في استقامية.

4) لتكن K منتصف القطعة $[DJ]$ و L نقطة حيث:
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BL}$

أ- بين أن C منتصف $[KL]$.

ب- بين أن (KL) و (BD) متوازيان

35 ABC مثلث.

1) أنشئ النقطة D حيث تكون C مرجح $(D,1)$ و $\left(B,-\frac{2}{3}\right)$

2) أنشئ النقطة E حيث تكون A مرجح $(E,1)$ و $\left(C,-\frac{1}{3}\right)$

3) أنشئ النقطة F حيث $3\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

4) برهن أن النقط D ، E و F في استقامية.

36 A ، B نقطتان متمايزتان من المستوي و m عدد حقيقي.

1) ناقش وجود النقطة G مرجح الجملة
$$\{(A\ ,\ m^2+2)\ ;(B\ ,\ m^2+m-3)\}$$

2) أنشئ G في الحالة $m=0$ و في الحالة $m=1$

37 $[AB]$ قطعة مستقيمة. C مرجح $(A,-1)$ و $(B,4)$.
P مرجح $\left(A,\frac{1}{3}\right)$ و (B,β) حيث $\beta\neq-\frac{1}{3}$.
عين β في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) P و C منطبقتان   2) $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$.

مرجح ثلاث نقط

38 A ، B و C ثلاث نقط ليست في استقامية

أنشئ (إن وجد) مرجح (A,α) ، (B,β) و (C,γ) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\alpha=4$ ، $\beta=6$ ، $\gamma=1$

2) $\alpha=\frac{1}{6}$ ، $\beta=\frac{1}{3}$ ، $\gamma=\frac{1}{2}$

3) $\alpha=-1$ ، $\beta=-2$ ، $\gamma=-4$

4) $\alpha=-1$ ، $\beta=0$ ، $\gamma=3$

39 ABC مثلث. اذكر إن كانت النقطة G مرجحا لجملة مثقلة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2) $5\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

3) $3\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

4) $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

5) $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

6) $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{BA}$

40 A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية. باستعمال خاصية التجميع للمرجح ، أنشئ المرجحات التالية:

1) E مرجح $\{(A,-1);(B,1);(C,2)\}$

2) F مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

3) G مرجح $\{(A,0);(B,2);(C,1)\}$

4) H مرجح $\{(A,1);(B,2);(C,4)\}$

5) I مرجح $\left\{\left(A,\frac{1}{2}\right);\left(B,-\frac{1}{3}\right);\left(C,\frac{1}{6}\right)\right\}$

6) J مرجح $\{(A,0);(B,0);(C,8)\}$

41 ABC مثلث و G نقطة معرفة بالعلاقة المعطاة. جد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ حيث يكون G مرجح (A,α) ، (B,β) و (C,γ) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\overrightarrow{BG}=-3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{GC}$

2) $2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BG}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

3) $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

4) $2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

5) $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

42 A ، B و C ثلاث نقط ليست في استقامية. D نقطة من المستوي.

عبر عن A ثم عن B ثم عن C كمرجح لجملة يطلب تعيينها في كل حالة من الحالات التالية:

1) D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$

2) D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,3);(C,-6)\}$

3) D مرجح الجملة $\{(A,-3);(B,7);(C,-14)\}$

4) D مرجح الجملة $\left\{\left(A,\frac{1}{2}\right);\left(B,\frac{1}{4}\right);\left(C,-\frac{5}{8}\right)\right\}$

5) D مرجح الجملة $\{(A,-3);(B,1);(C,3)\}$

6) D مرجح الجملة $\{(A,\sqrt{2});(B,\sqrt{2});(C,-3\sqrt{2})\}$

43 ABC مثلث و G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,1)\}$

1) ارسم شكلا مبينا فيه كيفية إنشاء النقطة G.

2) عين ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ حيث تكون A مرجحا الجملة $\{(G,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

44 A ، B و C ثلاثة نقط ليست في استقامية.

1) بين أنه توجد نقطة G مرجح لــ $(A,1)$ ، $(B,2)$ و $(C,-4)$

2) عبر عن $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، ثم أنشئ G .

45 ليكن ABC مثلثا. G مرجح $(A,2)$ ، $(B,-4)$ و $(C,6)$. I و J منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.

1) أنشئ شكلا.

2) بين أن النقط I ، J و G في استقامية.

46 A ، B و C ثلاث نقط ليست في استقامية.

ليكن G مرجح $(A,-3)$ و $(B,2)$.

H مرجح $(A,1)$ و $(C,-2)$.

K مرجح $(A,-1)$ ، $(B,1)$ و $(C,-1)$

1) بين أنه يمكن إنشاء النقط G ، H و K ثم أنشئها.

2) برهن أن النقط G ، H و K في استقامية

47 ABC مثلث و النقطة I منتصف القطعة $[BC]$.

1) بين أن $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

2)هل A هي مرجح $(C,1)$ ، $(B,1)$ و $(I,-2)$ ؟

48 ABC مثلث .

1) أنشئ النقطتين I و J حيث:

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) عبر عن I ثم J كمرجح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يطلب تعيينها.

49 في المثلث ABC ، نعتبر G مرجح $(A,1)$ ، $(B,4)$ و $(C,-3)$

1) أنشئ النقطة I مرجح $(B,4)$ و $(C,-3)$

2) بين أن G منتصف القطعة $[AI]$

50 A ، B و C ثلاث نقط ليست في استقامية.

1) هل الجملتين المثقلتين $\{(A,2);(B,-1)\}$ و $\{(A,-3);(C,-1)\}$ تقبلان مرجحين؟ إذا كان الجواب نعم ، نرمز لهما بـــ K و L على الترتيب.

2) لتكن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

بين أن G هو مرجح $(K,-1)$ و $(L,4)$

51 ABC مثلث متقايس الأضلاع .

1) أنشئ النقطة G مرجح $(A,1)$ $(B,3)$ و $(C,-3)$

2) بين أن المستقيمين (AG) و (BC) متوازيان.

52 $ABCD$ مستطيل . I منتصف $[AB]$ و G مركز ثقل المثلث ABC .

1) أنشئ المرجح F للجملة $(C,1)$ و $(D,3)$

2) بين أن M منتصف $[GD]$ هي مرجح الجملة $(A,1)$، $(B,1)$ ، $(C,1)$ و $(D,3)$.

3) بين أن M تنتمي إلى المستقيم (IF) .

4) لتكن L النقطة المعرفة بـــ: $\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

بين أن منتصف $[BC]$ ينتمي إلى المستقيم (ML) .

53 ليكن ABC مثلثا و H النقطة المعرفة بـــ:

$\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

ليكن I مرجح الجملة $\{(B,1);(C,2)\}$

و j مرجح الجملة $\{(A,1);(C,4)\}$

علما أن G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,4)\}$ بين أن المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CH) متقاطعة في G.

54 ABC مثلث. G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$.

1) لتكن النقطة I منتصف $[BC]$

بين أن: $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

2) استنتج أن G مرجح النقطتين A و I المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

3) استخلص.

55 ABC مثلث. B' منتصف $[AC]$ و C' منتصف $[AB]$.

I و J نقطتان معرفتان كما يلي:

$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

نعرف النقطة H بـــ: $\overrightarrow{C'H}=\frac{3}{5}\overrightarrow{C'J}$

1) بين أن H مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,2)\}$

2) بين أن النقط I ، B' و H في استقامية.

56 ABC مثلث. I نقطة من (AB) حيث

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

G نقطة من (IC) حيث $3\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

المستقيم (AG) يقطع المستقيم (BC) في H .

1) ارسم شكلا.

2) بين أن G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-2)\}$

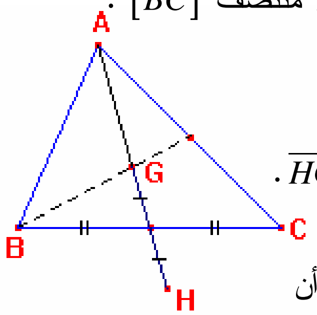
3) لتكن النقطة L مرجح الجملة $\{(B,1);(C,-2)\}$

أ- بين أن النقطة L تنتمي إلى المستقيمين (BC) و (AG)

ب- استنتج العدد الحقيقي k حيث $\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}$.

57 ABC مثلث مركز ثقله G

H نظيرة G بالنسبة إلى I منتصف $[BC]$.



1) برهن أن G منتصف القطعة $[HA]$.

2) بين أن $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}$.

3) عبر عن $\overrightarrow{HA}$ بدلالة $\overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{HC}$ ، ثم استنتج أن H هي مرجح A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها.

58 ABC مثلث. I و G نقطتان حيث:

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$.

الهدف من هذا التمرين هو البرهان أن G هي مرجح $(A,2)$ ، $(B,6)$ و $(C,1)$.

1) بين أن I مرجح $(A,2)$ و $(C,1)$ و استنتج المجموع $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$.

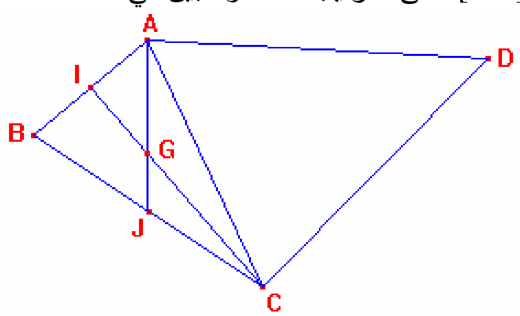
2) بين أن G هي مرجح $(B,2)$ و $(I,1)$ ، ثم أن $2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$.

3) أ) برهن أن $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}+6\overrightarrow{GB}$

ب) استنتج أن $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. استخلص.

59 $ABCD$ رباعي . G مركز ثقل المثلث ABC.

I و J منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب كما هو مبين في الشكل.



K مرجح $(A,1)$ و $(D,3)$ و L مرجح $(C,1)$ و $(D,3)$

الهدف من هذا التمرين هو البرهان أن المستقيمات (IL) و (JK) و (DG) متقاطعة في نقطة واحدة.

من أجل ذلك نستعمل H كمرجح لـ $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ و $(D,3)$.

1) مثل النقطة H (استعمل K و L).

2) برهن أن H مرجح النقطتين G و D المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما.

3) برهن أن H مرجح النقطتين J و K المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما.

4) برهن أن H مرجح النقطتين I و L المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما.

5) استنتج.

60 ABC مثلث.نعرف النقط I ، J و L كما يلي:

$\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CJ}=k\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\in\mathbb{R})$

نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC

1) أنشئ شكلا من أجل $k=\frac{1}{3}$

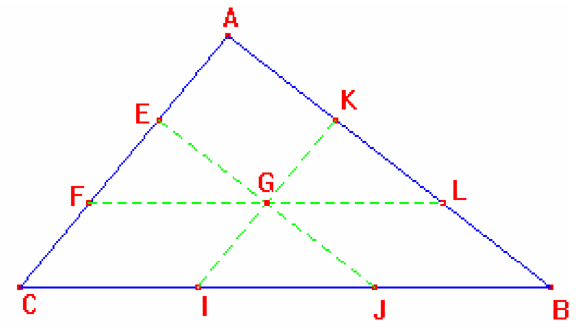
2) بين أن: $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GL}=\vec{0}$

3) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث IJL ؟

61 ABC مثلث مركز ثقله G. لتكن النقط E ، F ، I ، J ، K و L المعرفة كما يلي:

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ،

$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



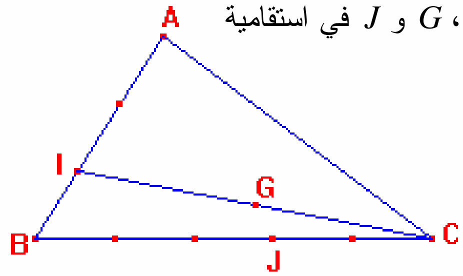
1) بين أنّ K هي مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و أنّ I مرجح $(C,2)$ و $(B,1)$

2) استنتج أن G منتصف القطعة $[KI]$

3) بنفس الطريقة بين أن G منتصف القطعة $[EJ]$ و منتصف القطعة $[FL]$.

– استنتج أن الرباعي $EKJI$ متوازي أضلاع.

62 ABC مثلث . النقطتان I و J ممثلة في الشكل. G منتصف $[CI]$. يهدف هذا التمرين إلى البرهان أن النقط A ، G و J في استقامية



1) عبر عن I كمرجح للنقطتين A و B ، ثم عن J كمرجح للنقطتين B و C .

2) ليكن H مرجح $(A,1)$ ، $(B,2)$ و $(C,3)$ ما هي المبرهنة التي تسمح بتبيان أن H هي منتصف القطعة $[IC]$ ؟

استنتج أن G و H منطبقتان.

3) برهن أن النقط A ، G و J في استقامية.

63 ABC مثلث. I مرجح $(A,-2)$ و $(B,-1)$

J مرجح $(B,-1)$ و $(C,2)$

G $(A,-2)$ ، $(B,-1)$ و $(C,2)$

1) ما هي المبرهنة التي تسمح بالبرهان على أن النقط A ، J و G و النقط C ، I و G في استقامية ؟

2) استنتج أن G هي نقطة تقاطع (AJ) و (CI).

– مثّل النقطة G.

3) برهن أن (BG) و (AC) متوازيان.

مجموعة النقط

64 $[AB]$ قطعة مستقيمة. و I منتصفها ، ولتكن E مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=AB$$

1) بين انه من أجل كل نقطة M من المستوي :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$$

2) استنتج أن المجموعة E هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

65 $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $10cm$.

E هي مجموعة النقط M بحيث:

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=\|-\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|$$

1) أنشئ المرجحين G و H للجملتين المثقلتين $\{(A,1);(B,2)\}$ و $\{(A,-1);(B,4)\}$ على الترتيب.

2) بين أن $M\in(E)$ إذا وفقط إذا كانت M متساوية المسافة عن G و H.

3) استنتج طبيعة المجموعة (E) و أنشئها.

66 A ، B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث $AB=3cm$. نعرف النقطة K بالعلاقة $\overrightarrow{AK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

1) أثبت أن K مرجح للنقطتين A و B بمعاملات يطلب تعيينها.

2) عين ثم أنشئ المجموعة E_1 ، مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=AB$.

3) عين ثم أنشئ المجموعة E_2 ، مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=2MB$.

67 A ، B نقطتان متمايزتان من المستوي و G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1)\}$.

1) أنشئ G.

2) أ– عين المجموعة E_1 ، مجموعة النقط M من مستوي حيث يكون الشعاعان $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

ب– نفس السؤال من أجل E_2 مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=AB$

جـ– نفس السؤال من أجل E_3 مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3MA$.

3) أنشئ في نفس الشكل المجموعات E_1 ، E_2 و E_3

68 $ABCD$ رباعي محدب.

1) أنشئ النقطة G مرجح $(A,3)$ و $(B,-1)$

2) أنشئ النقطة K مرجح $(C,-2)$ و $(D,4)$

3) ما هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

$$\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=\|-2\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}\|$$

69 A ، B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث: $AB=10$.

1) أنشئ النقطة C مرجح الجملة $\{(A,1);(B,4)\}$ و النقطة D مرجح الجملة $\{(A,4);(B,1)\}$.

1) عين المجموعة E، مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=10$.

2) عين المجموعة E'، مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$.

70 ABC مثلث. G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$.

1) عين الدالة f التي ترفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$

2) لتكن M نقطة كيفية من المستوي و $\vec{u}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

أ- عين الدالة g التي ترفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$.

ب- عين المجموعة E، مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|$.

71 ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث $AB=4cm$

لتكن (E) مجموعة النقط من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4$

1) استعمل المرجح G للجملة $(A,1)$، $(B,-1)$ و $(C,-2)$ لاستخلاص المجموع $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

2) بين أن : $M\in(E)$ تكافئ $MG=2$

3) استنتج طبيعة المجموعة (E).

4) مثل G ثم أنشئ (E).

72 ABC مثلث متقايس الأضلاع. طول ضلعه $5cm$

1) أنشئ G مرجح $(A,-1)$، $(B,1)$ و $(C,-1)$، و بين أن الرباعي $ABCG$ معين.

2) أ) استعمل السؤال السابق لإيجاد المجموعة (E)، مجموعة النقط من المستوي بحيث:

$$\left\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

ب) تحقق من أن منتصف $[AC]$ ينتمي إلى (E).

ارسم (E)

73 ABC مثلث قائم في A. I منتصف $[BC]$.

(Γ) هي الدائرة التي مركزها A و التي تشمل I

G نقطة من (Γ) مقابلة قطريا للنقطة I

1) بين أن النقطة G مرجح $(A,4)$، $(B,-1)$ و $(C,-1)$.

2) جد عددين حقيقيين α و β حيث يكون A مرجح $(G,2)$، (B,β) و (C,α).

3) ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ ؟

74 ليكن ABC مثلثا حيث $AB=8cm$ و $BC=4cm$ و $AC=6cm$.

1) أ- لتكن I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,4)\}$.

أنشئ النقطة I.

ب- لتكن J مرجح الجملة $\{(B,2);(C,-1)\}$.

أنشئ النقطة J.

3) نرمز بـــ G إلى مرجح الجملة $\{(A,1);(B,4);(C,-2)\}$

بين أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ).

4) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=5\left\|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

5) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

75 ABC مثلث قائم في A حيث $AB=12$ و $AC=5$

1) عين و أنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حيث: $\left\|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|6\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MC}\right\|$

2) عين و أنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حيث: $3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{AC}$

3) عين و أنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي

حيث: $\left\| 6\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} \right\|$

76 $ABCD$ مستطيل.

1) عين العدد الحقيقي a حيث تكون النقطة D مرجح الجملة $\{(A,a)$ ، $(B,-1)$ و $(C,a)\}$

2) لكل نقطة M من المستوي نرفق الأشعة

$\vec{u}(M)=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

و $\vec{v}(M)=2\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$

عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون للشعاعين $\vec{u}(M)$ و $\vec{v}(M)$ نفس الطويلة.

77 A ، B نقطتان متمايزتان. I منتصف $[AB]$. لكل نقطة M من المستوي نرفق:

النقطة M' مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(M,2)\}$

و النقطة M'' مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(M,-1)\}$

1) بين أن M' هي صورة M بانسحاب يطلب تعيينه.

2) بين أن M'' هي صورة M بتناظر مركزي يطلب تعيينه.

3) عندما تمسح النقطة M الدائرة التي مركزها A وتشمل I :

أ) ما هو المحل الهندسي الذي تتغير فيه النقطة M' ؟

ب) ما هو المحل الهندسي الذي تتغير فيه النقطة M'' ؟

78 ABC مثلث قائم و متساوي الساقين في A حيث : $AB=AC=4cm$.

1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$.

2) لتكن M نقطة كيفية من المستوي.

أ− عبر عن الشعاع $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$.

ب− بين أنه يمكن كتابة الشعاع $\vec{v}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ على الشكل $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

جـ − أنشئ النقطة D المعرفة بـ: $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$.

د− أحسب AD و AG بالسنتيمتر.

3) أ − استنتج من الأسئلة السابقة المجموعة E ، مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$\left\| 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| -2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \right\|$

ب − أنشئ المجموعة E.

79 $ABCD$ متوازي أضلاع. G مرجح الجملة $\{(A,k);(B,k+1);(C,k-1);(D,-3k+1)\}$ ، $k\in\mathbb{R}$

1) هل النقطة G معرفة من أجل كل قيمة لـ k ؟

2) برهن أن النقطة A هي مرجح الجملة $\{(B,1);(C,-1);(D,1)\}$

− بين أن $\overrightarrow{AG}=2k\overrightarrow{DB}$

3) ما هي مجموعة النقط G عندما k يمسح $\mathbb{R}$

80 A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية و ليكن k عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$

ليكن G_k مرجح الجملة $\{(A,k^2+1);(B,k);(C,-k)\}$

1) مثل النقط A ، B و C ، I منتصف $[BC]$ وأنشئ G_1 و G_{-1} .

2) برر وجود G من أجل عدد حقيقي k من المجال $[-1;1]$ و بين أن : $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

3) لتكن N نقطة من (BC) .

هل يمكن أن تنطبق N على G_k ؟ علل.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بــ: $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$.

5) استنتج مجموعة النقط G_k عندما يمسح k المجال $[-1;1]$

81 1) أنشئ مثلثا ABC حيث $AB=9$ ، $AC=15$ و $BC=12$. ما طبيعة المثلث ABC ؟ .

2) عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}$.

3) عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$.

4) بين أن المجموعة (Γ_2) معرفة أيضا بـ:

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

− تحقق إذن أن (Γ_2) تشمل B و B' منتصف $[AC]$

جـ) استنتج أن النقطة M' هي صورة النقطة بتحاكي يطلب تعيين مركزه و نسبته بدلالة k.

3) ما هي مجموعة النقط M' عندما تمسح النقطة M الدائرة (C) باستثناء النقطتين A و B ؟

82 نعتبر G مرجح $(A,1)$، $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح $(A,1)$ و $(B,2)$.

1) بين أن النقط C، J و G في استقامية ، وحدد وضعية النقطة G على المستقيم (CJ)

2) باستعمال النقطة G، عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$.

3) برهن أن (E) و (AB) متوازيان.

83 ليكن ABC مثلثا حيث $AC=12cm$ ، $AB=10cm$ و $CB=8cm$.

1) أنشئ النقطة G مرجح $(A,1)$، $(B,2)$ و $(C,1)$

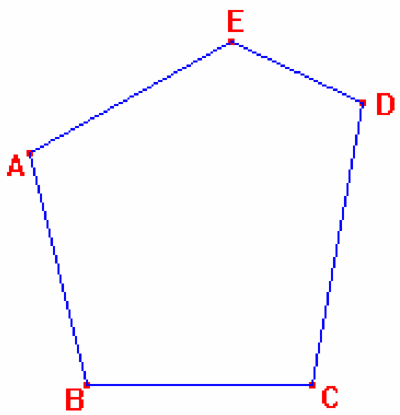
2) عين و أنشئ المجموعة (E_1) ، مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$

3) لتكن (E_2) مجموعة النقط N من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|$

أ) تحقق من أن B تنتمي إلى (E_2).

ب) عين طبيعة (E_2) ، ثم أنشئها.

84 نعتبر المضلع $ABCDE$ الممثل بالشكل المقابل



عين ثم أنشئ ما يلي :

1) المجموعة (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}\right\|$

2) المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}\right\|$

85 ABC مثلث. I و J نقطتان معرفتان كما يلي :

$$\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$$

1) عبر عن J كمرجح للنقط A، B و C .

2) المستقيم (BJ) يقطع القطعة $[AC]$ في نقطة G . حدد وضعية G على القطعة $[AC]$.

3) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right\|$

86 ليكن ABC مثلثا و k عدد حقيقي .

1) من أجل أي قيم لـ k يكون المرجح G_k لـ (A,k) ، $(B,-1)$، $(C,1)$ موجوداً ؟

2) عندما يكون G_k موجوداً ، بين أن $\overrightarrow{AG_k}=\frac{1}{k}\overrightarrow{BC}$.

3) بين أن الرباعي $ABCG_1$ متوازي أضلاع .

4) عين مجموعة النقط G_k عندما يتغير k في المجال $[1;+\infty[$

87 $ABCD$ متوازي أضلاع m عدد حقيقي. نرمز بـ G_m مرجح $(A,2m)$، $(B,1-m)$ و $(C,2-m)$

1) بين أن G_m موجود من أجل كل عدد حقيقي m.

2) أنشئ النقطة G_1

3) عبر عن $\overrightarrow{AG_m}$ بدلالة m و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

4) استنتج أن $\overrightarrow{G_1G_m}=\frac{1-m}{3}\overrightarrow{AD}$

5) ما هي مجموعة النقط G_m عندما يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ؟ أنشئ هذه المجموعة

إحداثيات المرجح

88 A ، B و C ثلاث نقط ليست في استقامية و G نقطة معرفة بالعلاقة المعطاة. عبر عن G كمرجح للنقط A ، B و C ، ثم جد إحداثيتي G في المعلم المعطى.

1) $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

2) $-4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، المعلم $(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\frac{7}{2}\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، المعلم $(C;\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

في التمارين من 88 إلى 96 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

89 1) مثل النقطتين $A(4;3)$ و $B(-1;-2)$

2) احسب إحداثيتي النقطة G مرجح $(A,-2)$ و $(B,-3)$

3) أ) مثل النقطة $C(5;4)$

ب) بين أن $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

4) استنتج عددين حقيقيين a و b حيث تكون C مرجح لــ (A,a) و (B,b)

90 1) مثل النقطتين $A(1;3)$ و $B(2;1)$

2) احسب إحداثيتي كل من النقطة M مرجح $(A,1)$ و $(B,-3)$ و النقطة N مرجح $(A,-2)$ و $(B,1)$

3) أ) احسب إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

ب) جد العدد الحقيقي k حيث $\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MN}$

جـ) استنتج عددين حقيقيين a و b حيث تكون I مرجح لــ (M,a) و (N,b)

91 1) مثل النقط $A(2;1)$ ، $B(-1;4)$ و $C(-3;-2)$

2) احسب إحداثيتي النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

3) احسب إحداثيتي النقطة H مرجح $(A,2)$ ، $(B,-3)$ و $(C,-1)$

4) النقط O ، G و H هل هي في استقامية؟

92 1) مثل النقط $A(-1;-2)$ و $B(3;-4)$ و $C(2;-5)$

2) G مرجح $(A,-3)$ ، $(B,-2)$ و $(C,4)$

– احسب إحداثيتي G

3) احسب إحداثيتي النقطة K مرجح $(A,3)$ و $(B,2)$

4) ما هي المبرهنة التي تسمح بالقول أن النقط C ، K و G في استقامية ؟.تحقق من ذلك بالحساب

93 نعتبر النقطتان $A(-1;2)$ و $B(2;-2)$

1. بين انه يوجد G مرجح لــ $(A,3)$ و $(B,7)$.

2. عبر عن $\overrightarrow{OG}$ بدلالة $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$.

3. ما هي إحداثيات النقطة G في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ ؟

94 1) مثل في المعلم النقط $A(1,2)$ ، $B(-3,4)$ و $C(-2,5)$.

2) لتكن النقطة G مرجح $(A,-3)$ ، $(B,-2)$ و $(C,4)$ عين إحداثيتي النقطة G .

3) هل المستقيم (BG) يمر بمبدأ المعلم O ؟ علل.

95 1) مثل في المعلم $(O;I,J)$ النقط $A(2,1)$ ، $B(-1,5)$ ، $C(5,7)$ و $D\left(1,\frac{5}{2}\right)$

1) عن إحداثيتي النقطة H مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين B و C

2) عين إحداثيتي النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) هل يوجد عدد حقيقي x بحيث تكون النقطة D مرجح $(A,1)$ و (B,x) ؟ علل.

96 لتكن النقط A ، B ، C و D إحداثياتها على الترتيب $(3;3)$ ، $(-1;-1)$ ، $(-2;-3)$ و $(3;-3)$.

1) عين إحداثيتي النقطة E بحيث يكون الرباعي $BCDE$ متوازي أضلاع.

2) عين إحداثيتي النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,1);(D,1);(E,1)\}$

3) ليكن L مركز متوازي أضلاع $BCDE$. برهن أن النقط A ، G و L في استقامية.

4) أ) بين أن: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

ب) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABD ؟

5) لتكن I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[DE]$.
برهن أن G مركز ثقل المثلث AIJ .

97 نعتبر النقطتين A و C التي إحداثياتها على الترتيب $(2;4)$ ، $(6;0)$. لتكن النقطتين B' و K حيث B' منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف القطعة $[OB']$.

1) احسب إحداثيتي كل من B' و K .

2) I نقطة إحداثياتها $(2;0)$. جد عددين حقيقيين α و β حيث تكون K مرجح لـ (A,α) و (I,β) .

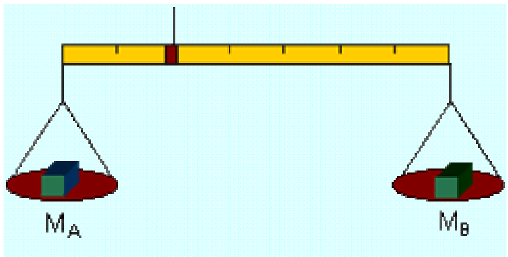
3) احسب إحداثيتي J مرجح $(A,1)$ $(O,2)$

4) برهن أن (IJ) و (AC) متوازيان

مركز العطالة

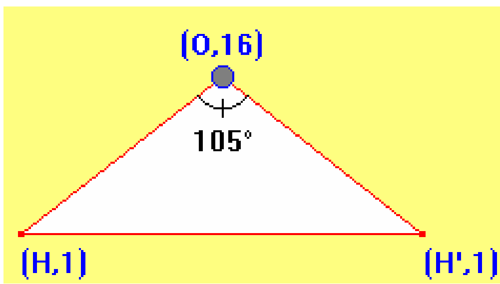
نسمي مركز عطالة جملة مكونة من جسمين متجانسين ، مرجح الجملة المكونة من مركزي ثقل هذين الجسمين مرفقين بكتلتيهما (أو مساحتيهما)على الترتيب .

98 في الشكل المقابل ، لدينا الجسم A كتلته M_A تساوي $100g$.



– عين الكتلة M_B للجسم B علما أن الجملة متزنة.

99 جزيء الماء H_2O مكون من ذرة أوكسجين و ذرتي هيدروجين. نرفق بكل نواة لهذه الذرات النقط O ، H و H'



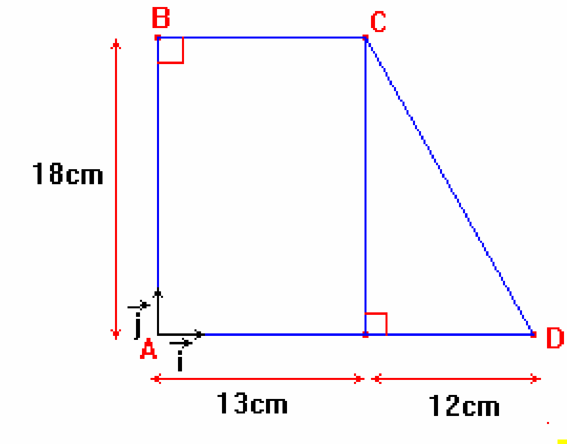
المثلث OHH' متساوي الساقين ، المسافة OH تقدر بـ $0,96\times10^{-10}m$ و الزاوية $\widehat{HOH'}$ قياسها 105^0 .

الكتلة المولية للأوكسجين 16 و الكتلة المولية للهيدروجين 1 .

– مثل مركز العطالة G جزيء الماء .

– احسب المسافة OG .

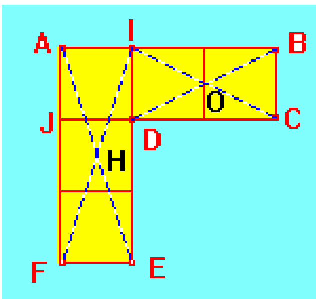
100 عين إحداثيتي مركز عطالة الصفيحة $ABCD$ في المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j})$ (انظر الشكل)



101 في الشكل التالي، نريد تعيين مركز العطالة G للصفيحة المتجانسة $ABCDEF$ حيث

$$AB = AF = 3AI = 3AJ$$

و O مركز عطالة الصفيحة $IBCD$ و H مركز عطالة الصفيحة $AIEF$.



الطريقة الأولى:

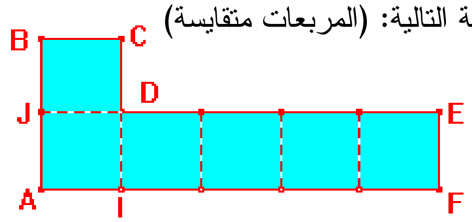
1) بين أن: G تقع على المستقيم (OH)

2) قسم الصفيحة $ABCDEF$ على شكل آخر و مثل هندسيا النقطة G .

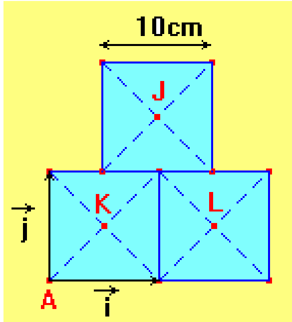
الطريقة الثانية:

بين أن G هي مرجح $(O,2)$ و $(H,3)$. استنتج إحداثيتي G في المعلم $(A;I,J)$. مثل G.

102 عين بطريقتين مختلفتين مركز عطالة الصفيحة المتجانسة التالية: (المربعات متقايسة)



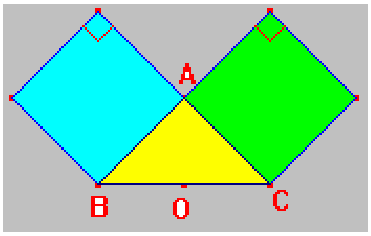
103 الشكل المقابل يمثل صفيحة مكونة من ثلاث صفائح مربّعة حيث طول ضلع كل مربع هو $10cm$ مراكزها هي J ، K و L على الترتيب و كتلها $m_1 = 100g$ ، $m_2 = 300g$ و $m_3 = 600g$ على الترتيب .



عين إحداثيتي مركز عطالة هذه الصفيحة في المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j})$.

104 في الشكل المقابل الصفيحة P متجانسة ومكونة من اتحاد مثلث قائم و متساوي الساقين ABC و مربعين حيث $AB = 6cm$ و O منتصف $[BC]$.

G_1 و G_2 مركزي عطالتي المربعين و G_3 مركز عطالة المثلث و I مركز عطالة الصفيحة P



1) أنشئ G_1 ، G_2 و G_3

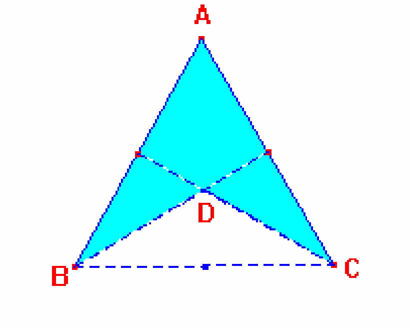
2) لماذا I تنتمي إلى (OA) ؟

3) بين أن I هي مرجح $(G_1,2)$ و $(G_2,2)$ و $(G_3,1)$

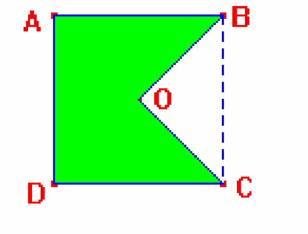
4) احسب المسافة OI .

105 عين وضعية مركز عطالة الصفيحة المتجانسة P المبينة في الشكل في كل حالة من الحالات التالية :

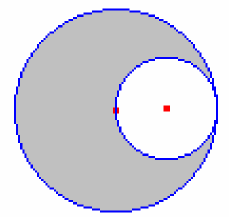
أ) الصفيحة P عبارة عن الجزء الملون من مثلث ABC متقايس الأضلاع . (BD) و (CD) ارتفاعان في المثلث.



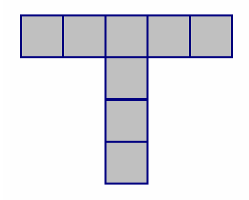
ب) الصفيحة P عبارة عن مربع $ABCD$ مركزه O منزوع منها المثلث OBC (الجزء الملون من المربع)



جـ) الصفيحة P عبارة عن قرص حيث نصف قطر الدائرة الكبيرة هو قطر الدائرة الصغيرة

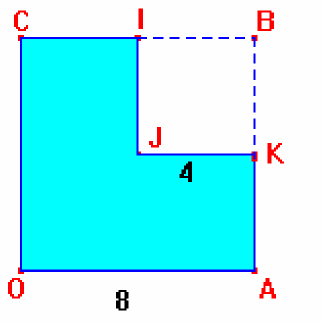


د) الصفيحة P على شكل حرف T (المربعات متقايسة)

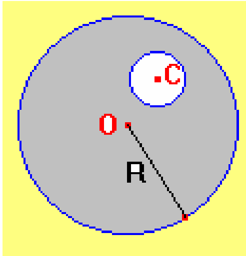


106 الصفيحة P متجانسة و مكونة من مربع $OABC$ طول ضلعه $8cm$ و نزع منه المربع $BIJK$ الذي طول ضلعه $4cm$ كما هو مبين في الشكل

عين وضعية مركز عطالة الصفيحة P بطريقتين مختلفتين



107 صفيحة معدنية دائرية متجانسة مركز عطالتها I سمكها ثابت ، مركزها O و نصف قطرها R مستثنى منها القرص الذي مركزه C ونصف قطره $R'=\frac{R}{4}$ حيث $OC=\frac{R}{2}$



1) نرمز بـــ A و A' إلى مساحتي القرصين الذين قطريهما R و R' على الترتيب

بين أن: O مرجح $(I,A-A')$ و (C,A') .

2) استنتج I كمرجح لـ O و C .

3) ارسم شكلا من أجل $R=4cm$ و أنشئ مركز العطالة I

108 في الفيزياء لدينا: "جملة تتكون من جسمين صلبين S_1 و S_2 مركزي عطالتهما على الترتيب C_1 و C_2 و كتلتيهما على الترتيب m_1 و m_2. مركز العطالة G لهذه الجملة يحقق $m_1\overrightarrow{GC_1}+m_2\overrightarrow{GC_2}=\vec{0}$

1) ترجم هذه المعطيات باستعمال المرجح.

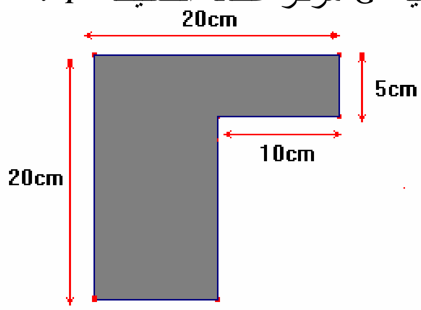
2) صفيحة معدنية متجانسة P سمكها ثابت a و كتلتها الحجمية k مكونة من اتحاد جزئين S_1 و S_2 على شكل مستطيل. مركزي عطالة S_1 و S_2 هما على الترتيب C_1 و C_2 مركزي المستطيلين.

أ) نسمي m_1 كتلة S_1 و m_2 كتلة S_2

إذن $m_1=$(مساحة S_1) $\times k\,a$

و $m_2=$ (مساحة S_2) $\times k\,a$. لماذا ؟

ب) استنتج وضعية G مركز عطالة الصفيحة P ، و مثل G



مســـــائل

109 مبرهنة Ménélaüs

نعتبر مثلثا ABC . P ، Q و R ثلاث نقط من المستقيمات (BC) ، (AC) و (AB) على الترتيب.

1) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية p ، q و r حيث يكون P مرجحا لـــ $(B,1)$ و $(C,-p)$

و Q مرجحا لـــ $(C,1)$ و $(A,-q)$

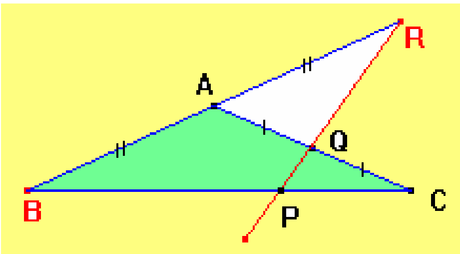
و R مرجحا لـــ $(A,1)$ و $(B,-r)$.

2) في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ، عين احداثيي النقط P ، Q و R.

3) برهن أن النقط P ، Q و R تكون في استقامية إذا وفقط إذا كان $pqr=1$.

4) تطبيق: R نظيرة B بالنسبة إلى A و Q منتصف $[AC]$. (RQ) يقطع (BC) في P.(انظر الشكل).

ما هي وضعية P على المستقيم (BC) ؟



110 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و النقطة I منتصف $[AB]$. المستقيمان (DB) و (CI) يتقاطعان في النقطة G.

1) أرسم الشكل المناسب .

2) برهن أن: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ .... (1)

3) أ) أنشئ النقطة K مرجح $(A,1)$ ، $(B,1)$ و $(C,-1)$

ب) برهن أن K هي أيضا مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$

3) أ) استنتج من العلاقة (1) أن النقطة A مرجح $(D,1)$ ، $(G,3)$ و $(C,-2)$

ب) بين أن A منتصف القطعة $[DK]$

4) عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

5) أ) من أجل أي قيم للعدد الحقيقي m المرجح I_m للجملة $\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$ يكون موجوداً ؟

ب) عندما تكون النقطة I_m موجودة، بين أن:

$$\overrightarrow{DI_m}=\frac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$$

جـ) ادرس تغيرات الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{x+1}$ وشكل جدول تغيراتها(حدد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف)

د) استنتج المحل الهندسي للنقطة I_m عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$

111 ABC مثلث، من أجل كل عدد حقيقي m ، نرفق النقطة G_m مرجح الجملة $\{(A,2);(B,m);(C,-m)\}$.

لتكن النقطة O منتصف القطعة $[BC]$.

1) برهن أنه ،عندما يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، المحل الهندسي لــ G_m هو مستقيم Δ يطلب تعيينه.

2) أ) أنشئ G_2 و G_{-2} .

ب) نفرض أن $m\neq 2$ و $m\neq -2$. و لتكن G_m نقطة من Δ تختلف عن A ، G_2 و G_{-2} .

برهن أن (BG_m) يقطع (AC) في نقطة نرمز لها بــ I و أن (CG_m) يقطع (AB) في نقطة نرمز لها بــ J .

3) في معلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. احسب بدلالة m إحداثيتي I و J . استنتج أن النقط O ، I و J في استقامية

112 ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين و قائم في A .

I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[AC]$. ليكن k وسيط حقيقي ، من أجل كل نقطة M من المستوي نرفق النقطة M' حيث : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}$

1) في هذا السؤال نفرض أن $k=-1$

أ) بين أن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ شعاع ثابت يطلب تعيينه.

ب) استنتج طبيعة التحويل من المستوي الذي يرفق بكل M النقطة M'.

2) في هذا السؤال نفرض أن $k=2$

أ) أنشئ النقطة H مرجح $(A,2)$ و $(B,-1)$

ب) أنشئ النقطة G مرجح $(A,2)$ ، $(B,-1)$ و $(C,2)$.

جـ) بين أن G تنتمي إلى المستقيم (BJ) .

د) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{GM'}$ بدلالة $\overrightarrow{GM}$.

هـ) استنتج طبيعة التحويل من المستوي الذي يرفق بكل M النقطة M'.

3) النقطة M تمسح الدائرة التي قطرها $[BC]$.

أ) ما طبيعة المجموعة (E_1) مجموعة النقط M' في الحالة $k=-1$ ؟ أنشئ (E_1)

ب) ما طبيعة المجموعة (E_2) مجموعة النقط M' في الحالة $k=2$ ؟ أنشئ (E_2)

113 (المنصفات الداخلية و المرجح)

ABC مثلث.منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ يقطع $[BC]$ في I.

الموازي لــ$[AI]$ و المار بــ C يقطع (AB) في D.

1) برهن أن المثلث ADC متقايس الساقين .

استنتج أن : $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}$

2) نضع $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$

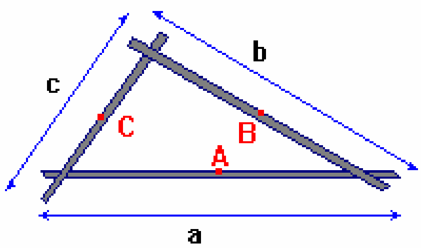
بين باستعمال المساواة السابقة أن النقطة I هي مرجح

3) منصف الزاوية $\widehat{ABC}$ يقطع $[AC]$ في J و منصف الزاوية $\widehat{ACB}$ يقطع $[AB]$ في K . نسمي O مرجح (A,a) ، (B,b) و (C,c)

بين أن: $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+(b+c)\overrightarrow{OJ}$

استنتج أن O نقطة من (AI) ثم نقطة تقاطع منصفات المثلث ABC .

4) تطبيق: ثلاثة قطع حديدية متصلة فيما بينها على شكل مثلث نسمي A ، B و C مراكز عطالة هذه القطع و a ، b و c أطوالها على الترتيب.



– بين أن مركز العطالة G لهذا المثلث هو مرجح (A,a) ، (B,b) و (C,c) . عين وضعية G .

114 **(مركزالدائرة المرسومة داخل مثلث، نقطة تلاقي الإرتفاعات في مثلث، المرجح)**

ABC مثلث حيث $AB=c$ $BC=a$ ، $AC=b$.

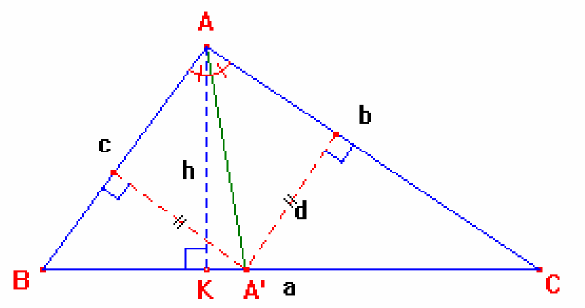
I مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث و H نقطة تقاطع الإرتفاعات فيه و O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

الهدف من هذه المسألة هو إيجاد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون I (أو H أو O) مرجحاً لــ (A,α) ، (B,β) و (C,γ)

I) مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث

منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ يقطع $[BC]$ في A' ، إذن A' متساوية المسافة عن المستقيمين (AB) و (AC). نرمز إلى هذه المسافة بــ d .

h طول الارتفاع المار بالنقطة A .



1) أ) عبر عن مساحتي المثلثين $AA'B$ و $AA'C$ بطريقتين مختلفتين .

ب) استنتج أن $\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{c}{b}$ ، ثم أن A' مرجح لــ (B,b) و (C,c).

2) منصف الزاوية $\widehat{ABC}$ يقطع $[AC]$ في النقطة B' و منصف الزاوية $\widehat{ACB}$ يقطع $[AB]$ في النقطة C'

– عبر عن B' كمرجح لــ C و A ، ثم C' كمرجح لــ A و B

3) برهن أن I هي رجح لــ (A,a) ، (B,b) و (C,c).

II) نقطة تلاقي الارتفاعات و مركز الدائرة المحيطة بالمثلث:

من أجل البرهان ، نأخذ مثلثا ABC كل زواياه حادة.

نضع $\widehat{BAC}=\alpha$ ، $\widehat{ABC}=\beta$ و $\widehat{ACB}=\gamma$

الارتفاع المار بالنقطة A يقطع $[BC]$ في K .

1) أ) برهن أن : $\dfrac{KB}{KC}=\dfrac{\tan\widehat{\gamma}}{\tan\widehat{\beta}}$

ب) استنتج أن K هي مرجح $(B,\tan\widehat{\beta})$ $(C,\tan\widehat{\gamma})$

جـ) الارتفاع المار بالنقطة B يقطع $[AC]$ في L و الارتفاع المار بالنقطة C يقطع $[AB]$ في M

– أعط نتائج مماثلة للنقطتين L و M .

د) بين أن H (نقطة تلاقي الارتفاعات)هي مرجح لــ : $(A,\tan\widehat{\alpha})$ ، $(B,\tan\widehat{\beta})$ و $(C,\tan\widehat{\gamma})$

2) M ، N و P منتصفات $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي .

أ) بين أن محاور المثلث ABC هي الارتفاعات في المثلث MNP .

ب) عبر إذن عن O كمرجح لــ M ، N و P .

(استعمل النتيجة 1) د)).

جـ) استنتج أن O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي مرجح A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها.

115 **I)** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+8$$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

– ادرس تغيرات الدالة f .

II) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتان $A(4;0)$ و $C(0;4)$. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $I=[0;8]$ ، نرفق النقطتان $K(4;k)$ و $L(0;8-k)$ و نرمز بــ G_1 و G_2 إلى مركزي ثقل المثلثين AKL و OAL

1) أ) ما هما المحلان الهندسيان لــ K و L عندما يتغير k في I ؟

ب) بين أن G_1 ثابتة و أن G_2 تمسح مستقيماً عندما k يمسح I .

2) احسب ، بدلالة k ، مساحتي المثلثين AKL و OAL .

3) نفرض أن $OAKL$ صفيحة متجانسة مركز عطالتها G .

أ) احسب بدلالة k احدثيي G .

ب) تحقق من أن G نقطة من المنحني (C_f) و استنتج مجموعة النقط G لما يتغير k في I .

8

الزوايا الموجهة
حساب المثلثات

الكفاءات المستهدفة

- استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا.
- تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين.
- توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.
- حل معادلات و متراجحات مثلثية.

ولد محمد أبو الوفا البوزجاني ببوزجان ضواحي خراسان. في السن العشرين انتقل إلى مدينة بغداد. من خلال ملاحظات فلكية وضح أبو الوفا بصفة خاصة مختلف حركات القمر.

محمد أبو الوفا البوزجاني

940 م / 998 م

قدم أبو الوفا عدة أعمال في حساب المثلثات المستوية و الكروية. قام بتصحيح جداول علماء سبقوه و قدم جداول جديدة متعلقة بالجيوب تسمح بحساب قيمة مقربة للعدد $\sin 30°$ إلى 10^{-8}. قام كذلك بتطوير مفهومي الظل و الظل تمام منجزا جدوليهما وهو أول من عرف مقلوبي الجيب و الجيب تمام و قد اكتشف العلاقات الأولى بين الدوال المثلثية التي ساهمت بشكل كبير في تطور علم الفلك.

لقد درس كذلك القطوع المخروطية محددا طرق إنشائها باستعمال المدور و المسطرة كما عرض طرقا لإنشاء القطع المكافئ نقطة نقطة...

نذكر كذلك أن أبو الوفا هو أول من اعتبر الكسور أعدادا.

نشاط أول

قيس زاوية بالدرجة متناسب مع قيسها بالراديان .

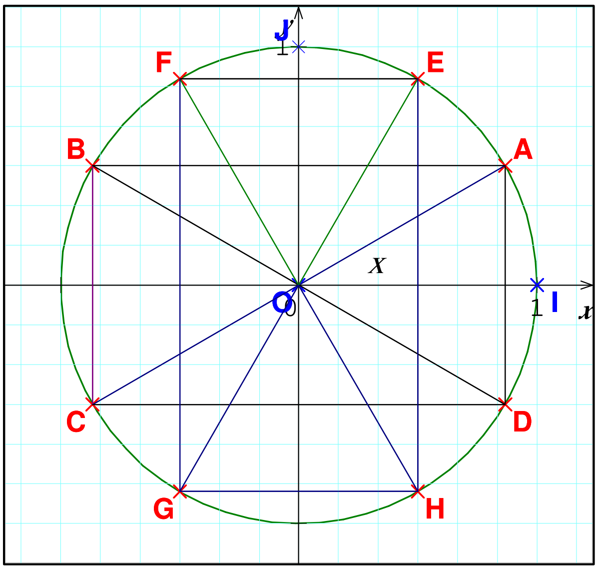
باستعمال جدول التناسبية . أنقل و أكمل الجدول الآتي:

القيس بالدرجة	15	22.5	36	105	120					
القيس بالراديان						$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{24}$

نشاط ثان

في الرسم المقابل (C) الدائرة الموجهة التي مركزها O و نصف قطرها 1 الاتجاه الموجب المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة . x هو قيس بالراديان للزاوية $\widehat{IOA}$.

بعبارة أخرى A هي صورة x على الدائرة المثلثية.

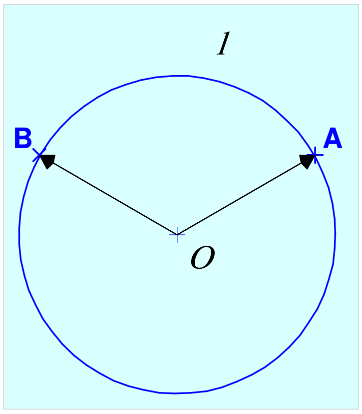


1) ماذا تمثل النقطة C بالنسبة للنقطة A ؟
2) ماذا تمثل النقطة B بالنسبة للنقطة A ؟
3) ماذا تمثل النقطة D بالنسبة للنقطة A ؟
4) ماذا تمثل النقطة E بالنسبة للنقطة A ؟
5) ماذا تمثل النقطة F بالنسبة للنقطة E ؟
6) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقطة E ؟
7) ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للنقطة E ؟
8) أنقل و أكمل الجدول الآتي:

قيس الزاوية	$\pi-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$-x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$x-\frac{\pi}{2}$
النقطة المرفقة							

9) ضع على الدائرة المثلثية النقطة M صورة $\pi-\frac{5}{2}x$.

نشاط ثالث



(C) الدائرة المثلثية التي مركزها O و نصف قطرها 1 الموجهة الاتجاه الموجب المعاكس لإتجاه دوران عقارب الساعة .

لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) (أنظر الشكل المقابل) . بتحرك A نحو B . في الإتجاه الموجب (للمرة الأولى) تعرف لنا النقطتان A و B قوسا $\overset{\frown}{AB}$ طوله l . اصطلاحا نقول ان l قيس بالرديان للزاوية $\widehat{AOB}$ المعرفة بالشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$. و نكتب $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=l$.

ضع على الدائرة المثلثية (C) النقط C ، D ، E ، F في الحالات الآتية :

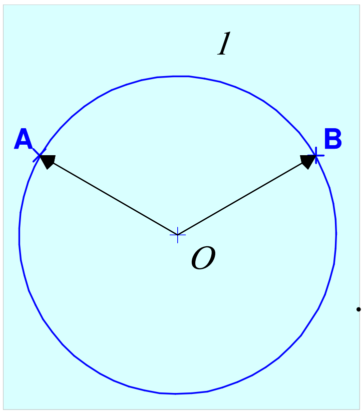
1) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{4}$ ، $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{6}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

2) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{3\pi}{4}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

3) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{4\pi}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{3\pi}{2}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{\pi}{3}$.

4) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{9\pi}{4}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{41\pi}{6}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{17\pi}{4}$.

نشاط رابع



(C) الدائرة المثلثية التي مركزها O و نصف قطرها 1 الموجهة الاتجاه الموجب المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة .

لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) (أنظر الشكل المقابل) . بتحرك A نحو B . في الاتجاه السالب (للمرة الأولى) تعرف لنا النقطتان A و B قوسا $\overset{\frown}{AB}$ طوله l . اصطلاحا نقول ان $-l$ قيس بالرديان للزاوية $\widehat{AOB}$ المعرفة بالشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$. و نكتب $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-l$.

ضع على الدائرة المثلثية (C) النقط C ، D ، E ، F في الحالات الآتية :

1) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{\pi}{4}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

2) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{5\pi}{4}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=-\frac{3\pi}{4}$.

3) علما أنّ: $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{10\pi}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=-\frac{7\pi}{2}$ ، $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=-\frac{19\pi}{3}$.

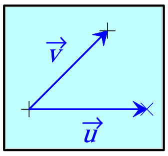
الزوايا الموجهة .

1.زاوية موجهة لشعاعين غير معدومين .

يوجه المستوي توجيها مباشرا (أو توجيها موجبا) ويسمى الاتجاه الآخر الاتجاه غير المباشر(أو الاتجاه السالب).
اصطلاحا نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
في المستوي الموجه نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر و التي نصف قطرها 1 .

في كل ما يأتي نعتبر المستوي الموجه

تعريف: ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدمين .
الثنائية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ تسمى زاوية موجهة لشع اعين .



2.قيس زاوية موجهة:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين ولتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن M و N النقطتين من المستوي حيث $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ المستقيم (OM) يقطع (C) في A و المستقيم (ON) يقطع (C) في B ، قيس بالرادين للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو كذالك قيس بالرادين للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)$.

تعريف: ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين .
إذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تعبير: نقبل التجاوز في التعبير الذي نعبر به على الزاوية و قيس لها في نفس الوقت ونقول الزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ تساوي x .

خاصية: من بين أقياس الزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

نتائج: 1) القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $\left(\vec{u},\vec{u}\right)$ هو 0 .
2) القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $\left(\vec{u},-\vec{u}\right)$ هو π .
3) القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$.
4) القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو $-\frac{\pi}{2}$.
5) إذا كان x القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ فإن $|x|$ هو قيس للزاوية الهندسية المكونة من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

2.علاقة شال:

مبرهنة :(تقبل بدون برهان) من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ لدينا .
$\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)$

نتائج: من أجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا : • $\left(\vec{v},\vec{u}\right)=-\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ ، • $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$
• $\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$ ، • $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

تمرين محلول 1

لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقطتين A و B من الدائرة (C) حيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6}$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}$.

عين قيسا للزوايا الموجهة : 1) $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA})$. 2) $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})$. 3) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

حـــل: 1) $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA})=-(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ})=-\left[(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})\right]=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$

2) $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

3) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$

تمرين محلول 2

أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ التي قيسها α في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\alpha=2007rad$.

2) $\alpha=-\frac{189\pi}{4}$.

3) $\alpha=\frac{65\pi}{8}$.

طريقة: إذا كان عدد حقيقي α قيس لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإنه يوجد عدد صحيح وحيد k حيث : $-\pi<\alpha+2k\pi\le\pi$ يكفي إيجاد k إنطلاقا من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$

حـــل: 1) $-\pi<2007+2k\pi\le\pi$ ومنه $-2007-\pi<2k\pi\le\pi-2007$

و بالتالي $\frac{-2007-\pi}{2\pi}<k\le\frac{\pi-2007}{2\pi}$ إذن $-319,923<k\le-318,923$ و منه $k=-319$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $2007+(-319\times2\times\pi)=2,663rad$

2) $-\pi<-\frac{189\pi}{4}+2k\pi\le\pi$ باختزال π نحصل على $-1<\frac{-189}{4}+2k\le1$

و بالتالي $\frac{185}{8}<k\le\frac{193}{8}$ إذن $23,125<k\le24,125$ و منه $k=24$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $-\frac{189\pi}{4}+(24\times2\times\pi)=-\frac{189\pi}{4}+\frac{192\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

3) $-\pi<-\frac{65\pi}{8}+2k\pi\le\pi$ بالاختزال في π نحصل على $-1<\frac{65}{8}+2k\le1$

و بالتالي $-\frac{73}{16}<k\le-\frac{57}{16}$ إذن $-4,5625<k\le-3,5625$ و منه $k=-4$

إذن القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\frac{65\pi}{8}+(-4\times2\times\pi)=\frac{65\pi}{8}-\frac{64\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$.

خواص الزوايا الموجهة .

1.الزوايا الموجهة المتقايسة.

خاصية: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ أشعة غير معدومة من المستوي،ليكن α قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية $(\vec{u}',\vec{v}')$

تكون الزاويتان $(\vec{u},\vec{v})$ و $(\vec{u}',\vec{v}')$ متقايستين إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$.

ملاحظة: وجود عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$ معناه $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π.

إذا كان $\alpha'=\alpha+2k\pi$ نقول أن α و α' قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتتن متقايستين.

2.الزوايا الموجهة و الإرتباط الخطي لشعاعين.

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي.

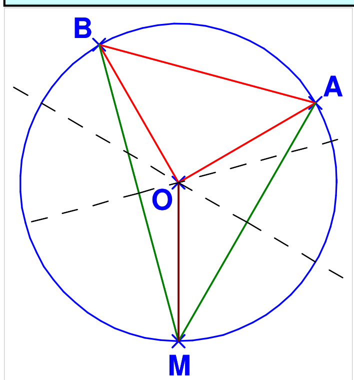
يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كان: $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ أو $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

ملاحظة: إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نفس الاتجاه .

إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اتجاهين متعاكسين .

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي . ليكن k و k' عددين حقيقيين غير معدومين .

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$.
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$.



3.الزاوية المحيطية.

(C) دائرة مثلثية مركزها O . A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من الدائرة (C). الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ تسمى زاوية محيطية.

مبرهنة: إذا كانت A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O وإذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

برهان: المثلث (OAB) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})$ و $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})$ متناظرتان بالنسبة إلى محور القطعة $[AM]$ و منه $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})=-(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})$ و منه $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})$ ....(1).

المثلث (OBM) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ و $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})$ متناظرتان بالنسبة إلى محور القطعة $[BM]$ ومنه $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})=-(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})$ و منه $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})=(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})$ ....(2).

من (1) و (2) نستنتج $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ أي

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ و منه $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$

$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB})$

$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ و منه $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

تمرين محلول 3

هل العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ؟

حـــل: حتى يكون عددان حقيقيان α و β قيسين لزاوية موجهة لشعاعين يكفي أن يكون $\alpha-\beta$ من الشكل $2k\pi$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

$\frac{41\pi}{8}-\frac{9\pi}{8}=\frac{32\pi}{8}=4\pi=2\times2\pi$ و هو من الشكل $2k\pi$.

إذن العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ، أو لزاويتين متقايستين .

(يمكن القول كذالك أن العددين $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاويتين متقايستين)

تمرين محلول 4

$ABCD$ مربع غير مباشر من المستوي حيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{2}$. E نقطة خارج المربع $ABCD$ حيث ECD مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة F داخل المربع $ABCD$ حيث AFD مثلث متقايس الأضلاع

1) أثبت أن المثلث ABF متقايس الساقين .

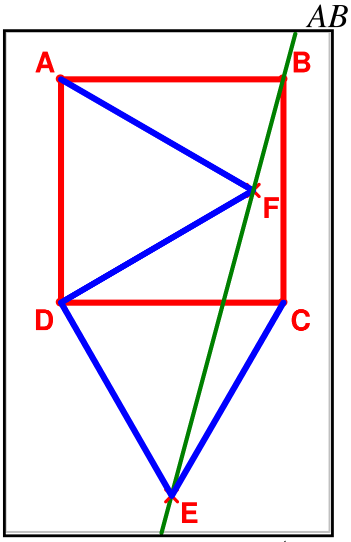
2) عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA}\right)$.

3) عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)$. استنتج قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}\right)$.

4) عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}\right)$.

5) استنتج أن النقط E ، F و B على استقامة واحدة .

حـــل: 1) المثلث AFD مثلث متقايس الأضلاع إذا $AF=AD=FD$ و بما أن $AB=AD$ فإن $AF=AB$ و بالتالي المثلث ABF متقايس الساقين .



2) الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA}\right)$ زاوية موجهة الآتجاه الموجب وبما أن $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)=\frac{\pi}{3}$ و $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{6}$ نستنتج أن $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA}\right)=\frac{5\pi}{12}$.

3) الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)$ زاوية موجهة الآتجاه الموجب و نستنتج أن $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذا المثلث EDF قائم في D و متساوي الساقين .

و نستنتج أن

(4

$$\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}\right)=\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA}\right)+\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FD}\right)+\left(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}\right)=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{12\pi}{12}=\pi$$

5) بما أن الزاوية $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}\right)=\pi$ فإن النقط E ، F و B في استقامية.

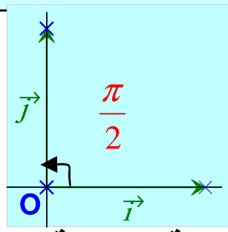
حساب المثلثات.

1 . معلم متعامد ومتجانس مباشر:

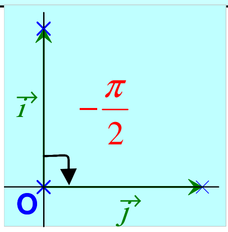
تعريف: إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوى مباشر .

إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=-\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوى غير مباشر .

معلم متعامد ومتجانس مباشر



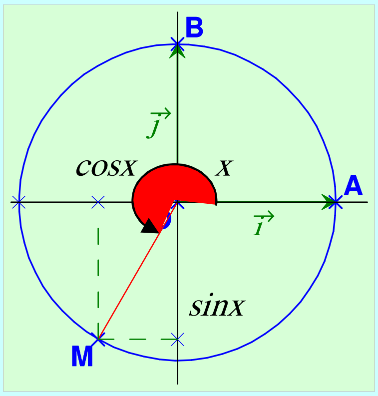
معلم متعامد ومتجانس غير مباشر



2. جيب تمام و جيب زاوية موجهة لشعاعين:

تذكير و تعريف: (C) دائرة مثلثية مركزها O ، لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث أن $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ معلم متعامد و متجانس مباشر . نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ ، لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ، نعلم أن جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونكتب $\cos x$ و أن جيب العدد x هو ترتيب النقطة M ونكتب $\sin x$. إذا كان x قيسا بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح هو كذلك قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ و منه x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة (C) . و بالتالي: $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ مع $k\in\mathbb{Z}$

نقول أن الدالتين دوريتان و 2π دور لهما .



نتائج: من أجل كل عدد حقيقي x : $-1\le\cos x\le 1$ ، $-1\le\sin x\le 1$ ، $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

جدول القيم الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تعريف:
- جيب تمام زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب تمام أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\cos(\vec{u},\vec{v})$.
- جيب زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\sin(\vec{u},\vec{v})$.

تمرين محلول 5

بدون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من:

1) $\cos\frac{9\pi}{4}$.   2) $\sin\frac{25\pi}{6}$.

2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$.   4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

حـــل: (1 $\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2 $\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(\frac{24\pi+\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\times2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(3 $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{-30\pi+\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-10\pi\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\times(-5)\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4 $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{-32\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-8\pi\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\times(-4)\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين محلول 6

1) بدون استعمال الآلة الحاسبة عين القيمة المضبوطة لــ $\cos x$ إذا علمت أن $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

2) باستعمال آلة حاسبة عين مدور لــ x إلى 10^{-2} .

حـــل:نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

1) بما أن $\sin x=\frac{3}{5}$ فإن $\sin^2 x=\frac{9}{25}$ و منه : $\frac{9}{25}+\cos^2 x=1$. و بالتالي $\cos^2 x=1-\frac{9}{25}$

أي $\cos^2 x=\frac{16}{25}$ و منه $\cos x=\frac{4}{5}$ أو $\cos x=-\frac{4}{5}$.

لدينا $\cos x<0$ لأن $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ إذن $\cos x=-\frac{4}{5}$.

2) تظهر الآلة $x=2.49802$.

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x=2.5$

الدرس 8

جيب تمام و جيب الزوايا المرفقة.

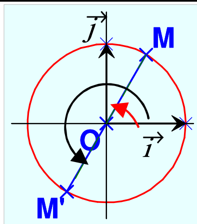
تعريف: نسمي الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث x قيس لها، الزوايا الموجهة التي أحد أقياسها :
$-x$ ، $\pi-x$ ، $\pi+x$ ، $\frac{\pi}{2}-x$ ، $\frac{\pi}{2}+x$.

في ما يلي نأخذ x عددا حقيقيا و M صورته على دائرة مثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

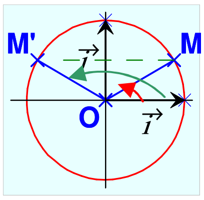
مبرهنة 1: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$(1)\ \begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$	$(2)\ \begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$	$(3)\ \begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}$

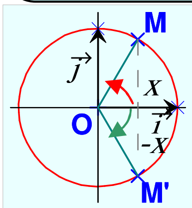
الجملة (1) M و M' متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم



الجملة (2) M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب



الجملة (3) M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل

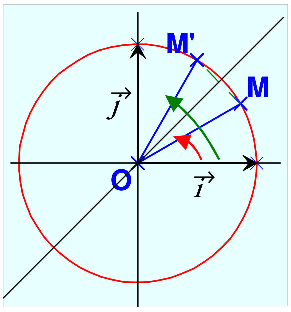


ملاحظة: من الجملة (3) نستنتج أن الدالة cos (جيب تمام) دالة زوجية و أن الدالة sin (جيب) دالة فردية .

مبرهنة 2: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

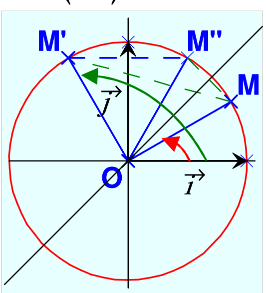
$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$	$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

في الشكل (1) : M و M' نقطتان من الدائرة المثلثية. M و M' متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول للمعلم. فاصلة M هي ترتيب M' و فاصلة M' هي ترتيب M . $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=x$
و $(\vec{i},\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}-x$ و منه $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$



الشكل (1)

في الشكل (2):النقطة M' صورة العدد $x+\frac{\pi}{2}$ على الدائرة المثلثية و هي نظيرة M'' بالنسبة إلى محور التراتيب ، و M'' هي صورة $\frac{\pi}{2}-x$ على الدائرة المثلثية ،
ومنه M' و M'' لهما نفس الترتيب و فاصلتان متعاكستان. $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=x$ ،
$(\vec{i},\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+x$ ، $(\vec{i},\overrightarrow{OM''})=\frac{\pi}{2}-x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
و $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ومنه $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$



الشكل(2)

تمرين محلول 8

دون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم الميضبوطة لكل من :

1) $\cos\frac{11\pi}{6}$. 2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

حـــل: 1)
$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{-6\pi-\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}-2\pi\right)$ أي $=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين محلول 9

دون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم الميضبوطة لكل من :

1) $\cos\frac{5\pi}{4}$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$ و $\sin\frac{5\pi}{6}$.

حـــل: 1)
$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2)
$$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

تمرين محلول 10

علما أن $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ دون استعمال الآلة الحاسبة عين القيمة المضبوطة لـــ $\sin\frac{7\pi}{12}$ ثم استنتج $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

حـــل: نعلم أن $\cos^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}=1$ و منه $\sin^2\frac{7\pi}{12}=1-\cos^2\frac{7\pi}{12}$ أي $\sin^2\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

وبما أن $0<\frac{7\pi}{12}<\pi$ فإن $\sin\frac{7\pi}{12}>0$ إذن $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (يمكن الملاحظة أن $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$).

$$\cos\frac{13\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

معادلات مثلثية.

1.عددين حقيقيين لهما نفس الجيب تمام و نفس الجيب: ليكن a و b عددين حقيقيين .

$\cos a=\cos b$ معناه $a=b+2k\pi$ أو $a=-b+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$	$\sin a=\sin b$ معناه $a=b+2k\pi$ أو $a=\pi-b+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2.المعادلات المثلثية الأساسية:

المعادلات من الشكل $\cos x=a$ حيث a عدد حقيقي .

إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $-1\le a\le 1$ يوجدعدد حقيقي c حيث $a=\cos c$ و الحلول هي $[x=c+2k\pi$ أو $x=-c+2k\pi]$.

المعادلات من الشكل $\sin x=a$ حيث a عدد حقيقي .

إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $-1\le a\le 1$ يوجدعدد حقيقي c حيث $a=\sin c$ و الحلول هي $[x=c+2k\pi$ أو $x=\pi-c+2k\pi]$.

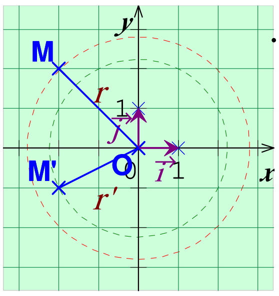
الإحداثيات القطبية.

1.التعليم القطبي

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم مباشر متعامد و متجانس. لتكن (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O .

تعريف: من أجل كل نقطة M غير منطبقة على O، الثنائية (r,θ) ، حيث $OM=r$ و $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ، تسمى ثنائية إحداثات قطبية في المستوي للنقطة M و نرمز $M(r,\theta)$ (r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي)

النقطة O تسمى القطب، $(O;\vec{i})$ يسمى المحور القطبي،نقول أن r هو نصف القطر القطبي و θ إحدى الزوايا القطبية .



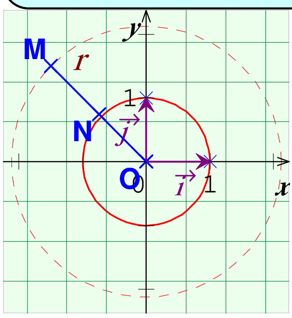
في الشكل $OM=2\sqrt{2}$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\dfrac{3\pi}{4}$ إذا الإحداثيات القطبية للنطة M هي: $\left(2\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

في الشكل $OM'=\sqrt{5}$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\dfrac{5\pi}{6}$ إذا الإحداثيات القطبية للنطة M هي: $\left(\sqrt{5};\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

ملاحظة: الثنائية $M(r,\theta)$ تعرف نقطة وحيدة M .

2.العلاقة بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية:

مبرهنة: في معلم مباشر متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن (C) الدائرة المثلثية. إذا كانت النقطة M غير منطبقة على O و كانت إحداثياها الديكارتية $(x;y)$ و إحداثياها القطبية (r,θ) فإن: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ؛ $x=r\cos\theta$ ؛ $y=r\sin\theta$



برهان: نصف المستقيم (OM) يقطع الدائرة (C) في N حيث $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ لهما نفس الإتجاه . بما أن $OM=r$ و $ON=1$ فإن $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{ON}$ بما أن N تنتمي إلى الدائرة المثلثية و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=(\vec{i},\overrightarrow{ON})$ فإن $N(\cos\theta;\sin\theta)$ إذا. إحداثيات $M(r\cos\theta;r\sin\theta)$. ونعلم أن $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ و منه $r^2=x^2+y^2$ إذا $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و. منه صحة المبرهنة .

تمرين محلول 11

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x الآتيتين

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

3) مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

حـــل: 1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$ و بالتالي

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

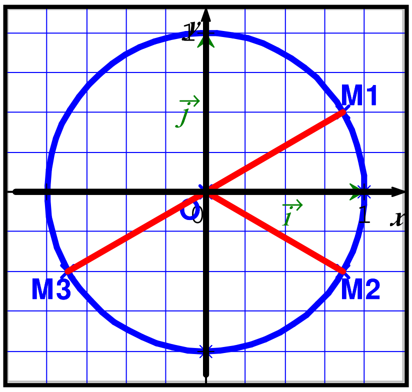
2) $\sin x = -\frac{1}{2}$ و منه $\sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$ و بالتالي

و بالتالي $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

و منه $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

و نستنتج $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

3)



النقطة $M1$ الموجودة في الربع الأول صورة $\frac{\pi}{6}$

بما أن $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ، لإنشاء النقطة $M1$ يكفي أخذ على محور التراتيب النقطة التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ و إسقاطها على الدائرة المثلثية . $M2$ صورة $-\frac{\pi}{6}$ هي نظيرة $M1$ بالنسبة إلى محور الفواصل ، النقطة $M3$ صورة $\frac{7\pi}{6}$ هي نظيرة $M1$ بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

تمرين محلول 12

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس

1) $\left(2,\frac{19\pi}{3}\right)$ هي إحداثيات القطبية للنقطة A في المعلم القطبي $(O;\vec{i})$. عين الإحداثيات الديكارتية للنقطة A

2) لتكن النقطة B التي إحداثياها الديكارتية $\left(-\sqrt{3};-1\right)$ عين إحداثيات قطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O;\vec{i})$.

حـــل: 1) $\frac{\pi}{3} + 2\times 3\pi = \frac{18\pi+\pi}{3} = \frac{19\pi}{3}$ ومنه

$x = 2\cos\frac{19\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ و $y = 2\sin\frac{19\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

إذن إحداثيتا A هي $\left(1;\sqrt{3}\right)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) ليكن r نصف القطر القطبي $r = OB = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

لتكن θ الزاوية القطبية لـــ B .

$-\sqrt{3} = 2\cos\theta$ و $-1 = 2\sin\theta$ و منه $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

ومنه ثنائية من الإحداثيات القطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O;\vec{i})$ هي $\left(2;\frac{7\pi}{6}\right)$.

حل المعادلات من الشكل : $\cos u = \sin v$.

تمرين: حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$$

ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

إرشادات للحل: لحل معادلة من الشكل $\cos u = \sin v$ يجب تحويل $\sin$ إلى $\cos$ أو العكس علما أن:

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$$

لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على أقياس الزوايا الشهيرة .نشير إلى أن القيم التي يأخذها k في العبارة $\frac{2k\pi}{n}$ هي من 0 إلى $n-1$ (k عدد صحيح و n عدد طبيعي غير معدوم)

حل المعادلات من الشكل : $a\cos x+b\sin x=c$.

تمرين: لتكن في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x :

$a\cos x+b\sin x=c$ .....(1) . حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و $(a;b)\neq(0;0)$.

1) أحسب $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$.

2) استنتج أنه توجد زاوية α حيث أن : $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3) استنتج أن المعادلة (1) تكتب $\cos x.\cos\alpha+\sin x.\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4) باستعمال دساتير الجمع استنتج أن (1) تكتب: $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ملاحظة: في السؤال الثالث كان بإمكاننا وضع $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.ثم استعمال دساتير الجمع لــ في السؤال الربع ، نكتب المعادلة (1) على الشكل : $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

تطبيق: حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\cos x+\sin x=1$.

2) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$.

3) $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-1$

4) $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=m$ (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

حل المتراجحات المثلثية:

1. المتراجحات من الشكل: $\cos x < a$.

تمرين: في المجموعة $[0,2\pi[$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $\cos x < a$ ... (1) (a عدد حقيقي) .

1) أثبت أنه إذا كان $a \le -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $[0,2\pi[$.

2) أثبت أنه إذا كان $a \ge 1$ فإن $[0,2\pi[$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).

3) أثبت أنه إذا كان $-1 < a < 1$ فإنه يوجد عددين متعاكسان α و β من المجال $[0,2\pi[$ حيث أن $\cos\alpha = \cos\beta = a$. نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.

استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي فواصلها أصغر من a .

استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $[0,2\pi[$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\cos x \le a$ الحالتان $a=-1$ و $a=1$ تدرس على حدى .

تطبيق: حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المتراجحات ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $2\cos x < 1$.

2) $\sqrt{2}\cos 3x + 2 \le 0$.

3) $2\cos 2x - \sqrt{3} \ge 0$.

4) $\cos 4x - \frac{1}{2} > 0$.

2. المتراجحات من الشكل: $\sin x < b$.

تمرين: في المجموعة $]-\pi,\pi]$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $\sin x < b$ ... (1) (b عدد حقيقي) .

1) أثبت أنه إذا كان $b \le -1$ فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في $]-\pi,\pi]$.

2) أثبت أنه إذا كان $b \ge 1$ فإن $]-\pi,\pi]$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).

3) أثبت أنه إذا كان $-1 < b < 1$ فإنه يوجد عددان α و β من المجال $]-\pi,\pi]$ حيث أن $\sin\alpha = \sin\beta = b$ نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية و نسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية ، أثبت أن M و M' متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي تراتيبها أصغر من b .

استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $]-\pi,\pi]$.

ملاحظة: في المتراجحات من الشكل $\sin x \le b$ الحالتين $b=-1$ و $b=1$ تدرس على حدى .

تطبيق: حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\sin x < -\frac{1}{2}$.

2) $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \le 0$.

3) $2\sin 5x + \sqrt{3} \ge 0$.

4) $2\sin 4x - \sqrt{2} > 0$.

الهدف من المسألة هو إيجاد حلول جملة متراجحتين مثلثيتين بطريقتين مختلفتين .

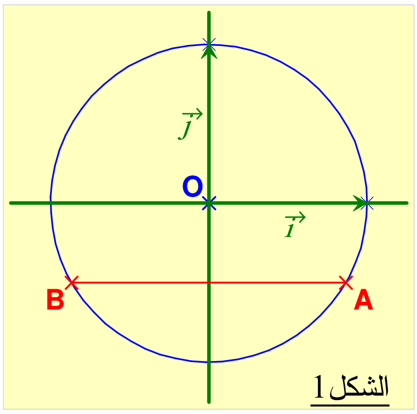
<u>مسألة :</u> لتكن في المجال $]-\pi,\pi[$ مجموعة الأعداد x التي تحقق $-\frac{1}{2}\le \sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) حل في $]-\pi,\pi[$ المتراجحتين ذات المجهول x : $\sin x\ge -\frac{1}{2}$ و $\sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2}$. استنتج الحلول المشتركة للمتراجحتين

2) أنشئ الرسم البياني (C) للدالة $f:x\mapsto \sin x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) أنشئ المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفتين بالمعادلتين $y=-\frac{1}{2}$ و $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ على الترتيب في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) عين نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيمين (Δ) و (Δ'). استنتج مجموعة الأعداد x التي تحقق $-\frac{1}{2}\le \sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2}$.



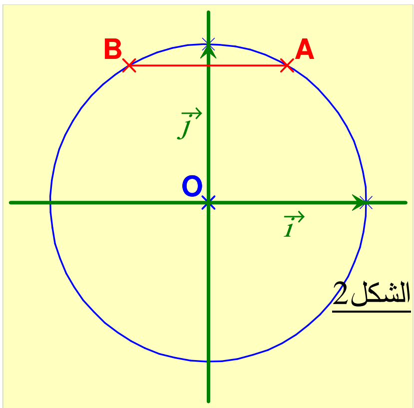
الشكل1

1) $\sin x\ge -\frac{1}{2}$. نعلم أن $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ و $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

في الشكل1، A و B صورتا $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{5\pi}{6}$ على الترتيب على الدائرة المثلثية.

النقط من الدائرة المثلثية الموجودة من فوق القطعة $[AB]$ تراتيبها تحقق المتراجحة و منه المجموعة $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right[$ هي مجموعة الحلول.

$\sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2}$. نعلم أن $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

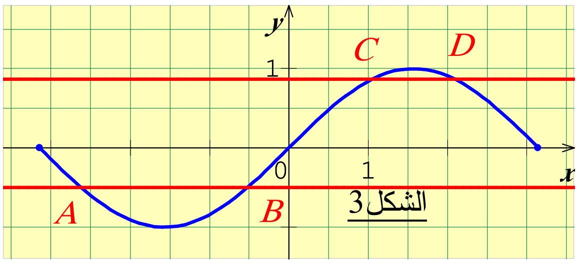


الشكل2

في الشكل2، A و B صورتي $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ على الترتيب على الدائرة المثلثية. النقط من الدائرة المثلثية الموجودة من تحت القطعة $[AB]$ تراتيبها تحقق المتراجحة و منه المجموعة $\left]-\pi,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ هي مجموعة الحلول. إذن مجموعة الحلول المشتركة للمتراجحتين هي: $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$

2) الدالة f دالة مرجعية و رسمها البياني في الشكل3 .

3) انظر الشكل3 .



الشكل3

4) $A\left(-\frac{5\pi}{6};-\frac{1}{2}\right)$ ، $B\left(-\frac{\pi}{6};-\frac{1}{2}\right)$ ، $C\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $D\left(\frac{2\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. الأعداد الحقيقية x التي تحقق $-\frac{1}{2}\le \sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2}$ هي فواصل نقط المنحنى (C) الموجودة بين المستقيمين (Δ) و (Δ')

و منه x عنصر من المجموعة: $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ و هي إجابة السؤال الأول.

<u>مسألة:</u> (O,I,J) معلم متعامد و متجانس من المستوي . θ عدد حقيقي من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

و r عدد حقيقي موجب تماما. لتكن النقطة A التي لها $(r;\theta)$ إحداثيات قطبية في المعلم $(O;\overrightarrow{OI})$.

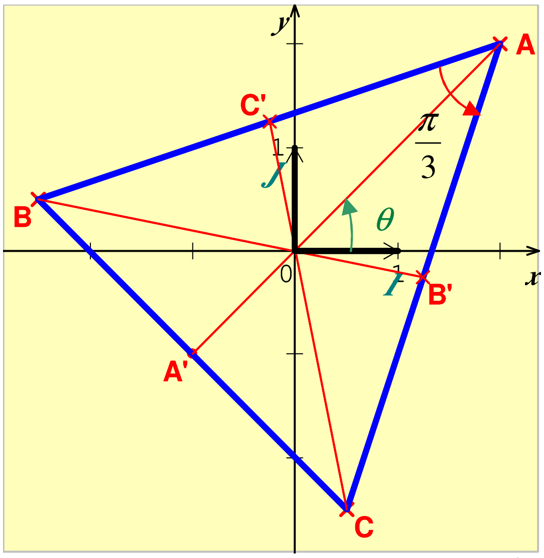
ليكن ABC مثلث متقايس الأضلاع مركز ثقله O حيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.

1) عين طول ضلع المثلث ABC بدلالة r.

2) عين أقياس الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$، $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)$

3) استنتج إحداثيات قطبية للنقط B و C في المعلم $(O,\overrightarrow{OI})$.

4) أثبت أن $\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=0$ و $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=0$.



<u>حل:</u> 1) O مركز ثقل المثلث ABC و منه $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$

و كذلك $OA=\frac{2}{3}AA'$ حيث A' منتصف القطعة $[BC]$. و منه

$AA'=\frac{3}{2}OA$ و $OA=r$ إذن $A'A=\frac{3}{2}r$. المثلث $AA'B$ قائم

في A' لدينا: $AB^2=A'A^2+A'B^2$ أي $AB^2-A'B^2=A'A^2$

إذن $AB=r\sqrt{3}$.

و بالتالي $AB=AC=BC=r\sqrt{3}$.

2) AOB مثلث متساوي الساقين و بما أن الزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

موجهة توجيها مباشرا فإن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2\pi}{3}$. AOC مثلث متساوي

الساقين و بما أن الزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ موجهة توجيه غير مباشر فإن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.

$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\theta+\frac{2\pi}{3}$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\theta-\frac{2\pi}{3}$

3) $OB=r$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\theta+\frac{2\pi}{3}$ و منه إحداثيات قطبية للنقطة B هي $\left(r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$OC=r$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)=\theta-\frac{2\pi}{3}$ و منه إحداثيات قطبية للنقطة C هي $\left(r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

4) نعلم أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$ و أن $A(r;\theta)$ و أن $B\left(r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ و أن

$C\left(r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right);r\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ و منه و بجمع الفواصل و جمع التراتيب نحصل على :

$\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0$ و $\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0$.

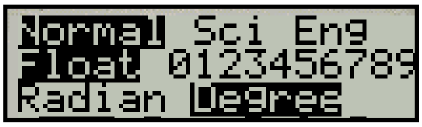
الانتقال باستعمال الحاسبة من الإحداثيات الديكارتية إلى القطبية و العكس

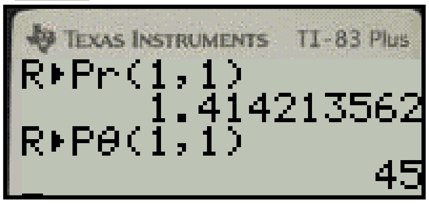
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

لتعيين الإحداثيات القطبية لنقطة علمت إحداثياتها الديكارتية نختار في البداية وحدة الزاوية بالضغط على اللمسة **MODE**

ثم نختار الدرجة أو الراديان





نضغط فيما بعد على **2nd** ثم **APPS** و نختار 5 و نعيد العملية باختيار6 نحجز الإحداثيات ثم نصادق.

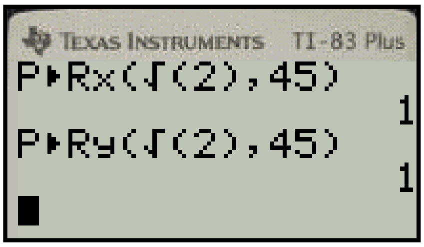
مثال: الإحداثيات القطبية للنقطة $(1;1)$ هي $(1,41;45)$.

2. الانتقال من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

بعد اختيار وحدة الزاوية نضغط على **2nd** ثم **APPS**

و نختار 7 و نعيد العملية باختيار 8. نحجز الإحداثيات ثم نصادق.

مثال: الإحداثيات الديكارتية للنقطة $\left(\sqrt{2};45\right)$ هي $(1;1)$.



3. تعيين زاوية علم جيبها، جيب تمامها أو ظلها

نختار في البداية وحدة الزاوية .

- تعيين زاوية علم جيبها

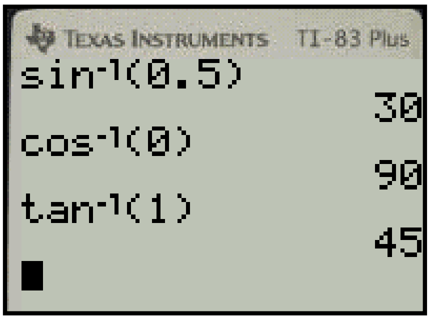
نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **sin** نحجز القيمة

- تعيين زاوية علم جيب تمامها

نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **cos** و نحجز القيمة

- تعيين زاوية علم ظلها

نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **tan** و نحجز القيمة



ملاحظة: بالنسبة لزاوية علم جيبها أو ظلها تقدم الحاسبة قيسا محصورا بين -90° و 90° بينما بالنسبة لزاوية علم جيب تمامها فالحاسبة تقدم قيسا محصورا بين 0° و 180°.

تطبيق:
- عين الإحداثيات القطبية للنقطة $A\left(7:-2\right)$
- عين الإحداثيات الديكارتية للنقطة $\left(4;60^{\circ}\right)$
- عين بالدرجات قيسا للزاوية θ علما أن: $\tan\theta=-5,2$

أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **8** أجب بصحيح أم خاطئ (مع التعليل)

1 تكون زاويتي شعاعين مقايستان إذا كان الفرق بين قياسهما مضاعف لــ 2π

2 إذا كانت $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u}',\vec{v}')$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ متوازيان و $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ متوازيان.

3 A، B و C ثلاث نقط إحداثياها القطبية على الترتيب هي: $A\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$، $B\left(2,\frac{7\pi}{3}\right)$، $C\left(4,-\frac{2\pi}{3}\right)$
إذن النقط A، B و C في استقامية.

4 في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة $2\sin 2x=\sqrt{3}$ تقبل أربع حلول فقط.

5 إذا كان α حلا للمعادلة $\cos x=0,6$ فإن العدد $\alpha+105\pi$ هو حل للمعادلة $\cos x=-0,6$

6 العددان $\frac{2007\pi}{4}$ و $-\frac{5\pi}{4}$ يعلمان نفس النقطة من الدائرة المثلثية.

7 بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ فإن $\sin x$ و $\cos x$ يكون دائما موجبا.

8 مجموعة حلول المتراجحة $\cos^2 x\leq 1$ هي $\mathbb{R}$

أسئلة متعددة الاختيارات

بالنسبة للتمارين من **9** إلى **15** اختر الجواب الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث.

9 إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=.....$

1) $-\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$

10 إذا كان $ABCD$ مربع حيث $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=...$

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $-\frac{\pi}{4}$ 3) $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$

11 إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{5}$ فإن $(\vec{u},-\vec{v})=...$

1) $-\frac{\pi}{5}$ 2) $-\frac{4\pi}{5}$ 3) $\pi+\frac{\pi}{5}$

12 إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$ فإن $(-\vec{u},-\vec{v})=...$

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{2\pi}{3}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$

13 إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=-\frac{\pi}{6}$ فإن $(2\vec{u},-3\vec{v})=...$

1) $-\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$

14 إذا كان $\sin x=\frac{1}{2}$ و $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن $\sin 2x=...$

1) 1 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15 إذا كان $\cos x<0$ و $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ فإن $\sin x=...$

1) موجب 2) سالب 3) لا نعرف

16 $ABCD$ مستطيل مبلشر مركزه O.
$AB=a$ و $\widehat{BAO}=\frac{\pi}{3}$.

1) ما هي طبيعة المثلث OAB ؟
2) احسب OA ، AC و AD .
3) احسب $\cos(\widehat{BAO})$ و $\sin(\widehat{BAO})$
4) احسب $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$ و $\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$

17 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين و x قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.

1) عين في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي و أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

- $x=-\frac{\pi}{3}$
- $x=-\frac{2007\pi}{3}$
- $x=\frac{53\pi}{4}$
- $x=493\pi$

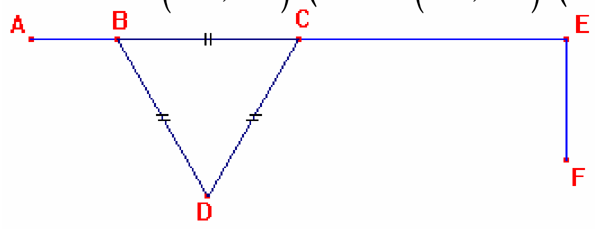
2) نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ عين في كل حالة من الحالات السابقة قيس الزاوية $\widehat{AOB}$

18 نعتبر النقط A ، B ، C و E في استقامية BCD مثلث متقايس الأضلاع. المستقيم (EF) يعامد (AE) .

عين قيسا للزوايا الموجهة التالية

1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$ 2) $\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF}\right)$ 4) $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\right)$



19 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي.

1) عين النقطة C حيث :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

2) ما هي طبيعة المثلث BAC ؟

20 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي.

1) عين النقطة C التي تحقق :

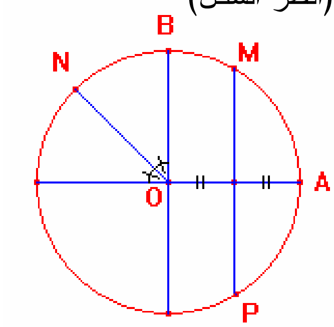
$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

2) عين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

بالنسبة للتمارين من **21** إلى **23** ، $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم للمستوي متعامد و متجانس و مباشر . (C) الدائرة المثلثية مركزها O و $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$

21 عين على (C) النقط M ، N ، P و Q معلمة بالأعداد $\dfrac{\pi}{3}$ ، $-\dfrac{7\pi}{4}$ ، $\dfrac{13\pi}{4}$ ، $\dfrac{5\pi}{6}$ على الترتيب.

22 عين الأعداد x من المجال $[0;2\pi[$ التي تعلم النقط M ، N و P (انظر الشكل)



23 لون على الدائرة المثلثية (C) القوس مجموعة النقط M حتى يكون القيس x للزاوية $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ موجود في المجال:

1) $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 2) $\left[-\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$

3) $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$ 4) $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{6}\right]$

بالنسبة للتمارين من **24** إلى **26** تحقق أن x و y هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة

24 $x=\dfrac{\pi}{2}$ و $y=-\dfrac{3\pi}{2}$

25 $x=\dfrac{11\pi}{4}$ و $y=-\dfrac{5\pi}{4}$

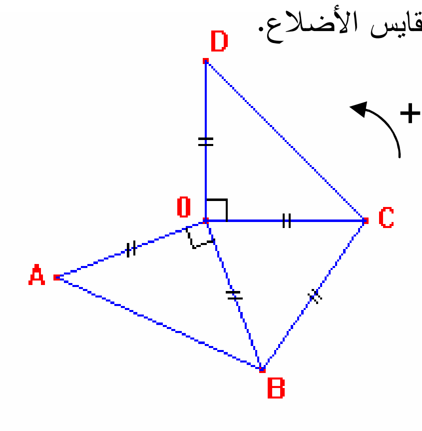
26 $x=\pi$ و $y=-\dfrac{2556\pi}{4}$

27 أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قياسها α

1) $\alpha=\dfrac{14\pi}{3}$ 2) $\alpha=-\dfrac{35\pi}{2}$

3) $\alpha=\dfrac{721\pi}{5}$ 4) $\alpha=\dfrac{2007\pi}{3}$

28 OAB و OCD مثلثان قائمان و متساويا الساقين. OBC مثلث متقايس الأضلاع.



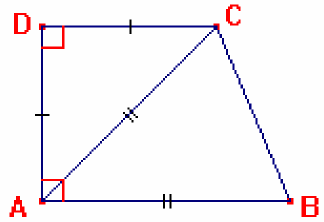
عين القيس الرئيسي للزوايا التالية:

1) $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ 2) $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CB}\right)$ 4) $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO}\right)$

5) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}\right)$ 6) $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}\right)$

29 $ABCD$ شبه منحرف قائم حيث $DC = AD$ و $AC = AB$



عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية

1) $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ 2) $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$

3) $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA})$ 4) $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})$

30 علما أن قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\frac{\pi}{2}$ عين قيس الزوايا الموجهة التالية:

1) $(\vec{u},-\vec{v})$ 2) $(2\vec{u},\vec{v})$ 3) $(\vec{u},-3\vec{v})$

4) $(-\vec{u},-\vec{v})$ 5) $(\vec{v},-\vec{u})$

31 علما أن الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو $-\frac{\pi}{3}$ عين قيس الزوايا الموجهة التالية:

1) $(\vec{v},\vec{u})$ 2) $(5\vec{u},3\vec{v})$ 3) $(2\vec{v},-\vec{u})$

3) $(2\vec{v},-\vec{u})$ 4) $(-6\vec{u},4\vec{v})$

بالنسبة للتمارين من 32 إلى 35 عين قيمة $\cos x$ ، $\sin x$ و $\tan x$

32 1) $x=\frac{\pi}{6}$ 2) $x=-\frac{5\pi}{6}$

3) $x=\frac{17\pi}{6}$ 4) $x=\frac{433\pi}{6}$

33 1) $x=\frac{\pi}{3}$ 2) $x=\frac{2\pi}{3}$

3) $x=-\frac{5\pi}{3}$ 4) $x=\frac{29\pi}{6}$

34 1) $x=\frac{\pi}{4}$ 2) $x=\frac{5\pi}{4}$

3) $x=-\frac{17\pi}{4}$ 4) $x=\frac{55\pi}{4}$

35 1) $x=\frac{\pi}{2}$ 2) $x=\frac{3\pi}{2}$

3) $x=\frac{148\pi}{4}$ 4) $x=-\frac{945\pi}{2}$

بالنسبة للتمارين من **36** إلى **41** بسط العبارة A

36 $A=\sin x+\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)$

37 $A=\sin x+\sin(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos x$

38 $A=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin(x+5\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

39 $A=\cos(\pi-x)-\cos x+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

40 $A=\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

41 $A=\tan(\pi+x)+\tan(2x-\frac{\pi}{2})+\cot(2x)$

42 عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ عن ما يلي:

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

43 1) تحقق من أن: $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$

2) احسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

3) احسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

44 1) تحقق من أن: $\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

2) احسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

45 1) تحقق من أن $\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}$

2) تحقق من أن $\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}$

3) أثبت أن:

$$16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{7\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}=1$$

بالنسبة للتمارين من 46 إلى 50 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

46

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)+$$
$$-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$$

47 $\sin(x+7\pi)-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$

$$=2\sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)-\cos\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)$$

48 $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

49 $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

50 x يختلف عن $k\frac{\pi}{2}$ ، $(k\in\mathbb{Z})$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$$

51 1) عين على الدائرة المثلثية النقطة M حيث

$\cos x=\frac{3}{5}$ و $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

2) احسب $\sin x$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ،

$\cos(\pi-x)$ ، $\sin(\pi-x)$

3) احسب $\tan x$ ، $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\tan(\pi-x)$

52 علما أن $\sin x=\frac{2}{3}$ و $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$

احسب $\cos x$ ، $\cos(\pi-x)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ،

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ، $\sin(17\pi+x)$.

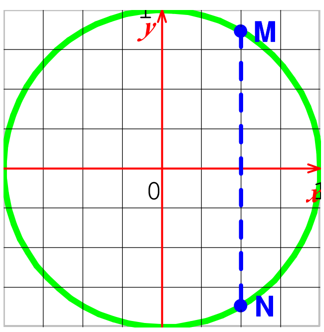
53 علما أن $\tan x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ و $x\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$

1) احسب $\cos x$ و $\sin x$

2) احسب $\cos(\pi-x)$ ، $\cos(\pi+x)$ ، $\sin(\pi-x)$

، $\sin(\pi+x)$ ، $\tan(\pi-x)$ ، $\tan(\pi+x)$

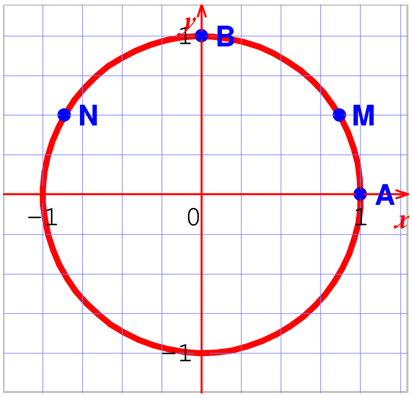
54 (C) دائرة مثلثية



1) ما هي قيم الأعداد الحقيقية x المرفقة للنقطة M ؟ ثم النقطة N ؟

2) استنتج كل الأعداد الحقيقية x بحيث

55 (C) دائرة مثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$



1) عين كل الأعداد الحقيقية x المرفقة للنقطة M .

2) عين كل الأعداد الحقيقية x المرفقة للنقطة N .

3) استنتج كل قيم x حيث $\sin x=\frac{1}{2}$

56 باستعمال الدائرة المثلثية (C) أوجد الأعداد الحقيقية x من المجال $[0;2\pi]$ التي تحقق:

1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\sin x=-1$

57 باستعمال الدائرة المثلثية (C) أوجد الأعداد الحقيقية x من المجال $[-\pi;\pi]$ التي تحقق:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$ 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin x=-\frac{1}{2}$ 4) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

بالنسبة للتمارين من 58 إلى 60 ، أوجد بواسطة الحاسبة قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد x في المجال I

58 $I=[0;\pi]$

1) $\cos x=0,7$ 2) $\cos x=-0,3$

59 $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

1) $\sin x=0,6$ 2) $\sin x=-0,4$

60 $I=[-\pi;\pi]$

1) $\cos x=\frac{43}{45}$ 2) $\sin x=-\frac{27}{29}$

61 حل في المجال $[0;2\pi[$ المعادلة:

$$2\cos^2 x=\sin x$$

62 حل في المجال $[-\pi;\pi[$ المعادلة:

$$\cos 2x+2\sin x\cos x=0$$

63 حل في المجال $[0;\pi[$ المعادلة:

$$\cos 7x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

الإحداثيات القطبية

64 عين في المستوى المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط التالية المعرفة باحداثياتها القطبية:

1) $A(1;0)$ 2) $B\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ 3) $C(1;\pi)$

4) $D\left(1;\frac{3\pi}{2}\right)$ 5) $E\left(2;\frac{3\pi}{4}\right)$ 6) $F\left(3;-\frac{5\pi}{6}\right)$

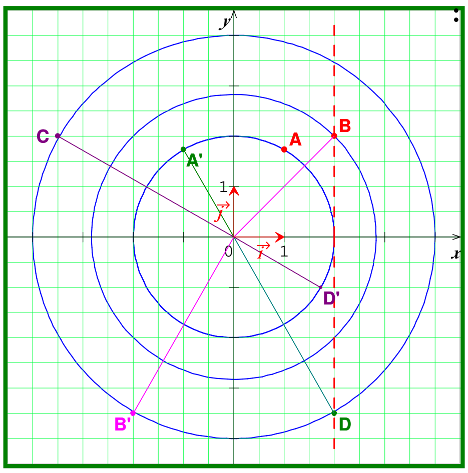
65 عين في المستوى المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط التالية المعرفة باحداثياتها القطبية:

1) $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$ 2) $B\left(2;\frac{-5\pi}{6}\right)$

3) $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $D\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$

2) أثبت أن النقط A ، B ، C و D على استقامة واحدة مع المبدأ O .

66 عين الإحداثيات القطبية (r,θ) مع $\theta\in[0;2\pi[$ للنقط التالية:



67 M و N نقطتان معرفتان كما يلي:

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ و $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+2\vec{j}$

1) احسب الأطوال OM و ON

2) أوجد القيس الرئيسي للزاويتين الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ و $(\vec{i};\overrightarrow{ON})$.

3) استنتج القيس الرئيسي للزاويتين الموجهتين $(\vec{j};\overrightarrow{OM})$ و $(\vec{j};\overrightarrow{ON})$.

4) عين الإحداثيات القطبية للنقطتين M و N.

68 احسب الإحداثيات القطبية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها الديكارتية:

1) $A(-1;1)$ 2) $B(0;-3)$

3) $C\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $D\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$

5) $E\left(-\frac{3}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 6) $E\left(-1;\sqrt{3}\right)$

69 احسب الإحداثيات الديكارتية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية:

1) $A(1;0)$ 2) $B\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$

3) $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $D\left(5;-\frac{3\pi}{4}\right)$

5) $E\left(2\sqrt{2};\frac{5\pi}{4}\right)$ 6) $E\left(4;-\frac{7\pi}{6}\right)$

7) $G\left(\frac{7}{4};345\pi\right)$ 8) $H\left(\frac{1}{4};20\pi\right)$

70 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس مباشر.

لتكن النقطتان A و B المعرفتان بإحداثيتيهما القطبيتين $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ و $B\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$.

C هي النقطة المعرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

احسب الإحداثيات القطبية للنقطة C.

71 1) علما أن $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ احسب $\cos^2\frac{\pi}{12}$

2) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

72 1) علما أن $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ احسب $\cos^2\frac{\pi}{8}$

2) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

73 1) احسب قيمة المجموع S_1 حيث

$$S_1=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$$

2) احسب قيمة المجموع S_2 حيث

$$S_2=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$$

74 x عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث

$$\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

1) احسب $\cos 2x$.

2) استنتج قيمة x.

75 x عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث

$$\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

1) احسب قيمة $\cos 2x$ و $\sin 2x$

2) تحقق من أن $\cos 4x=\sin x$

3) استنتج قيمة x.

76 عبر بدلالة $\sin x$ و $\cos x$ عن العبارات التالية:

1) $A=\cos^4 x+\sin^2 x+2\cos^2 x\sin^2 x$

2) $B=\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\sin^2 x$

3) $C=\cos^3 x+\cos^2 x\sin x+\cos x\sin^2 x+\sin^3 x$

77 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos x+\sin x=0$

4) $\cos 3x=\cos x$

5) $\cos 2x=\sin x$

6) $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

78 حل في المجال I المعادلات التالية :

1) $\sin^2 x-\sin x-6=0$ و $I=\mathbb{R}$.

2) $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$ و $I=[0\,,2\pi[$.

3) $4\cos^2 x+2(1-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0$

و $I=]-\pi;\pi]$.

79 x عدد حقيقي ، نعتبر الدالة f حيث :

$$f(x)=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\ .$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$f(x)=0$.

2) عين الدالة المشتقة f' .

3) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0\ .$$

80 $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس ومباشر .

ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

لتكن النقطة $A_1(1\,;\,\alpha)$ ذات الإحداثيتين القطبيتين

B صورة A بواسطة الدوران R، و C صورة B بواسطة الدوران R .

الهدف من التمرين هو البرهان أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ والاستنتاج أن :

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

و $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

1) أرسم شكلا .

2) ما هي صورة C بواسطة الدوران R .

3) برهن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

4) أثبت أن النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC .

5) ماذا تستنتج ؟

81 لتكن العبارة $E(x)$ حيث :

$$E(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$$

1) حلل العبارة $E(x)$ إلى جداء .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $E(x)=0$.

3) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$$

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- بسط عبارة $f(x)$.

82 1) علما أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $3x=x+2x$. عبر عن $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ ثم $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$. بسط العبارتين التاليتين :

$A=\dfrac{\cos 3x}{\cos x}+\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ ؛ $B=\dfrac{\cos 3x}{\cos x}-\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ (بعد تعيين مجموعة التعريف).

83 حلل إلى جداء عوامل العبارات التالية :

1) $A(x)=1+\cos 2x+\cos x$.

2) $B(x)=1-\cos 2x+\sin x$.

3) $C(x)=1+\cos x+\cos\dfrac{x}{2}$.

4) $B(x)=1-\cos x+\sin\dfrac{x}{2}$.

84 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

1) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

85 برهن ما يلي : $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2}$.

86 1) برهن أنه من أجل كل عدد x يكون :

$\cos^4 x=\dfrac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$.

$\sin^4 x=\dfrac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$.

2) أحسب ما يلي :

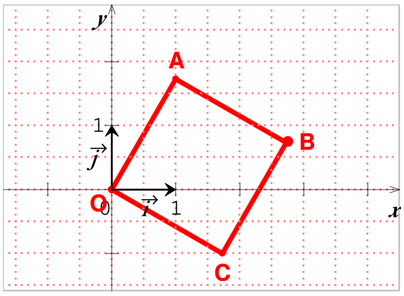
$\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$.

87 بملاحظة أن : $\dfrac{\pi}{6}=2\dfrac{\pi}{12}$ ، أحسب العددين التاليين : $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

88 $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس ومباشر

A النقطة ذات الإحداثيين القطبيين $\left(2\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$OABC$ مربع حيث $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.



الهدف من التمرين حساب $\cos\dfrac{\pi}{12}$ ، $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

1) باستعمال العلاقة :

$\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ ، أحسب قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)$.

2) أحسب الإحداثيين القطبيين ثم الإحداثيين الديكارتيتين للنقطة C .

3) أحسب الإحداثيين الديكارتيتين للنقطة A .

4) باستعمال العلاقة $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$. استنتج x_B و y_B الإحداثيين الديكارتيتين للنقطة B .

5) أحسب OB وقيس الزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$ استنتج الإحداثيين القطبيين للنقطة B .

6) استنتج القيمتين $\cos\dfrac{\pi}{12}$ ، $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

89 حل في المجال I المعادلات والمتراجحات التالية ومثل صور الحلول على الدائرة المثلثية .

1) $I=[0\ ;\ 2\pi[$ ،

$2\sqrt{3}\sin x-3=0$. $2\sqrt{3}\sin x-3<0$.

2) $I=\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ ،

$\sqrt{2}\cos x-1=0$. $\sqrt{2}\cos x-1>0$.

3) $I=[-\pi\,;\,\pi]$ ،

$2\sin x+\sqrt{2}=0$. $2\sin x+\sqrt{2}\le 0$.

4) $I=\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ ،

$tgx-1=0$. $tgx-1>0$

5) $I=[-\pi\,;\pi]$

$1-\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

$1-\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 0$

6) $I=[0\,;\pi]$

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$ ، $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{1}{2}$

7) $I=[0\,;\pi]$

$\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)\ge -\dfrac{1}{2}$ ، $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\dfrac{1}{2}$

90 f الدالة المعرفة على المجال $[-\pi;\pi]$ حيث :

$f(x)=\sin x$

1) مثل بيانيا الدالة f .

2) أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}$.

عين فاصلتي A و B نقطتي تقاطع (Δ) و (C_f) منحنى الدالة f .

3) أرسم المستقيم (Δ') الذي معادلته $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

عين فاصلتي C و D نقطتي تقاطع (Δ') و (C_f) .

4) استنتج في $[-\pi;\pi]$ حلول المتراجحة

$-\dfrac{1}{2}\le\sin x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

91 f الدالة المعرفة على المجال $[0;2\pi]$ حيث :

$f(x)=\cos x$

1) أرسم (C_f) منحنى الدالة f .

2) (D) المستقيم ذو المعادلة $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع كل من (D) و (Δ) .

3) بين أن مجموعة حلول المتراجحة :

$\cos^2 x\ge\dfrac{3}{4}$ هي إتحاد ثلاث مجالات يطلب تعيينها .

92 نعتبر المعادلة $\sin 3x=-\sin 2x$ ....(1)

1) حل في $\mathbb{R}$ ثم في المجال $]-\pi,\pi]$ المعادلة (1)

و مثل صور الحلول على الدائرة المثلثية.

2) – أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$\sin 3x=\sin x\left(4\cos^2 x-1\right)$

– استنتج أن حلول المعادلة (1) هي أيضا حلول المعادلة.

– من بين الحلول المعادلة(1) عين الحول التي هي أيضا حلول المعادلة $4\cos^2 x+2\cos-1=0$.

3) نضع $X=\cos x$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4X^2+2X-1=0$

استنتج قيمة العددين $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ و $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

93 1) باستعمال الأقواس المرفقة برهن أن :

$\sin\dfrac{\pi}{8}-\sin\dfrac{3\pi}{8}+\sin\dfrac{5\pi}{8}-\sin\dfrac{7\pi}{8}=0$

$\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}-\sin^2\dfrac{7\pi}{8}=2$

$\sin^4\dfrac{\pi}{8}-\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}-\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$

– استنتج قيمة المجموع S حيث

$S=\sin^3\dfrac{\pi}{8}-\sin^3\dfrac{3\pi}{8}+\sin^3\dfrac{5\pi}{8}-\sin^3\dfrac{7\pi}{8}$

94 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس و مباشر.

A نقطة إحداثياتها القطبية $(2;0)$ و B صورة A بواسطة الدوران R الذي مركزه 0 و زاويته $\dfrac{3\pi}{4}$.

I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

1) عين الإحداثيات الديكارتية للنقط A ، B و I .

2) ما هي طبيعة المثلث OAB. استنتج قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OI}\right)$.

3) عين الإحداثيات القطبية للنقطة I.

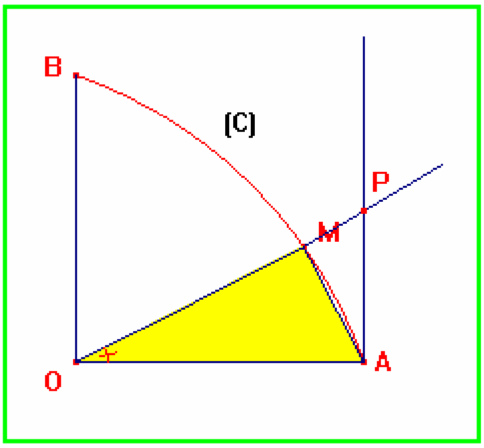
4) استنتج قيمة العددين $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ و $\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

95 $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ معلم متعامد و متجانس و مباشر.

M نقطة من الدائرة المثلثية (C) حيث

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=\alpha$ و $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

P نقطة تقاطع المستقيم (OM) و المماس للدائرة في A.



1) احسب مساحة المثلث OAM .

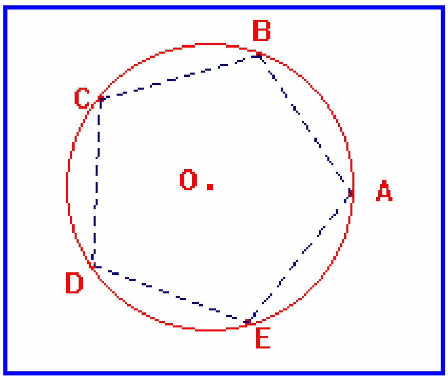
2) احسب مساحة الجزء الدائري $\overset{\frown}{OAM}$.

3) احسب مساحة المثلث OAP .

4) استنتج أن: $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$

96 (C) دائرة مثلثية منسوبة إلى معلم للمستوى متعامد ومتجانس و $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$

$ABCDE$ خماسي منتظم .



1) عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right)$.

2) بين أن النقط M من (C) التي تحقق:

$5\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=k.2\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$ هي رؤوس الخماسي $ABCDE$.

3) برهن أن المستقيم $(0A)$ محور تناظر الخماسي $ABCDE$ و أن مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، C ، D و E موجود على $(0A)$.

4) أثبت أن المستقيم $(0B)$ هو أيضا محور تناظر الخماسي $ABCDE$.

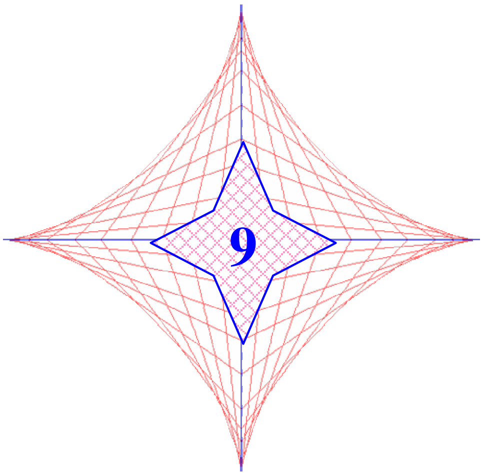
– ما هو موقع مركز ثقل الخماسي $ABCDE$ ؟

5) استنتج مما سبق أن:

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

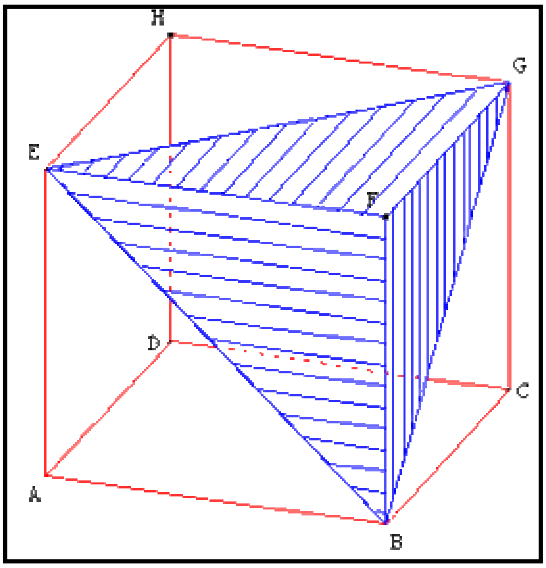
6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $4X^2+2X-1=0$

- تحقق من أن $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ هو حل لهذه المعادلة.
- استنتج قيمة العدد $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.



المقاطع المستوية
الأشعة في الفضاء

الكفاءات المستهدفة



- إنشاء مقطع مكعب و رباعي وجوه بمستو .
- ممارسة الحساب الشعاعي في الفضاء .
- استعمال الأشعة لإثبات توازي شعاعين و استقامية ثلاث نقط.
- البرهان على أن أشعة من نفس المستوي

درس الرياضياتي الإغريقي" منلاوس " بجامعة الإسكندرية و أصبح عضوا فيها قبل أن يصبح عالم فلك بروما.

لم تصلنا كتبه الستة حول الأوتار في دائرة و لم يبقى من مؤلفاته إلا كتابه : *Sphaerica* " المكون من ثلاثة أجزاء و يرجع الفضل في ذلك إلى علماء العرب و المسلمين.

في الجزء الأول يعمم نتائج إقليدس حول المثلثات إلى المثلثات الكروية (*spherique*) بينما خصص الجزء الثاني إلى علم الفلك و عالج في الجزء الثالث حساب المثلثات الكروية.

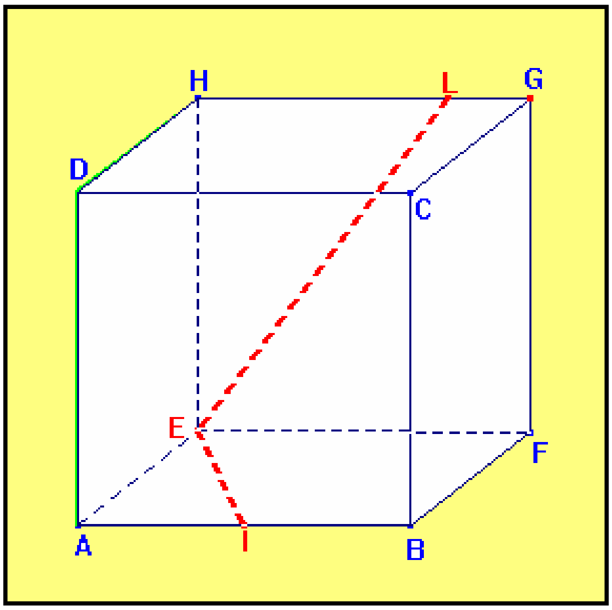
يشتهر بمبرهنته " مبرهنة Ménélaüs "

$$\frac{\sin P\hat{O}B}{\sin P\hat{O}C}\times\frac{\sin Q\hat{O}C}{\sin Q\hat{O}A}\times\frac{\sin R\hat{O}A}{\sin R\hat{O}B}=1$$

MENELAUS d'Alexandrie
grec, vers 100

نشاط أول

يقطع مستو (P) مستويين متوازيين (P_1) و (P_2) وفق مستقيمين متوازيين (Δ_1) و (Δ_2).



نعتبر مكعبا $ABCDEFGH$ و لتكن النقطتان I و L حيث I منتصف القطعة $[AB]$ و L نقطة من $[GH]$ تحقق:

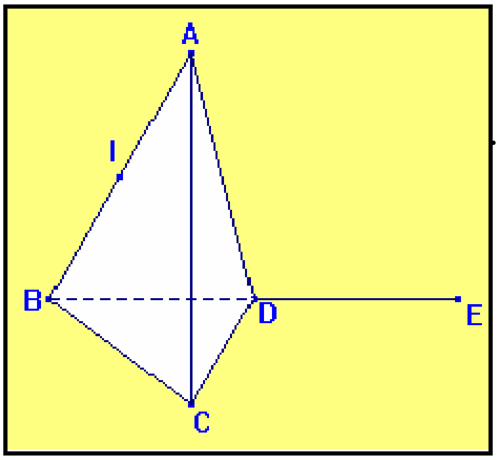
$$GL = \frac{1}{4}GH$$

من الواضح أن النقط E ، I و L ليست على استقامة واحدة فهي تحدد إذن مستويا نرمز إليه بـ (EIL).

1. أنشئ القطعة المستقيمة $[KL]$ تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $DCGH$.
2. أنشئ تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $ABCD$.
3. استنتج تقاطع المستوي (EIL) مع الوجه $BCGF$.
4. عين تقاطع المستوي (EIL) مع المكعب $ABCDEFGH$.

نشاط ثان

إذا كان مستقيم موازيا لمستويين متقاطعين (P_1) و (P_2)، يكون موازيا للمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2).



نعتبر رباعي وجوه $ABCD$ و لتكن النقطتان I و E حيث I منتصف القطعة $[AB]$ و E نظيرة B بالنسبة إلى D.

نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (IE) و الموازي للمستقيم (CD).

1. عين تقاطع المستوي (P) مع المستوي (ABD).
2. بين أن تقاطع المستويين (P) و (BCD) هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة E و يوازي المستقيم (CD). أنشئ المستقيم (Δ).
3. أنشئ المستقيم (Δ') تقاطع المستويين (P) و (ABC).
4. أنشئ تقاطع المستوي (P) مع رباعي الوجوه $ABCD$.

أنشطة

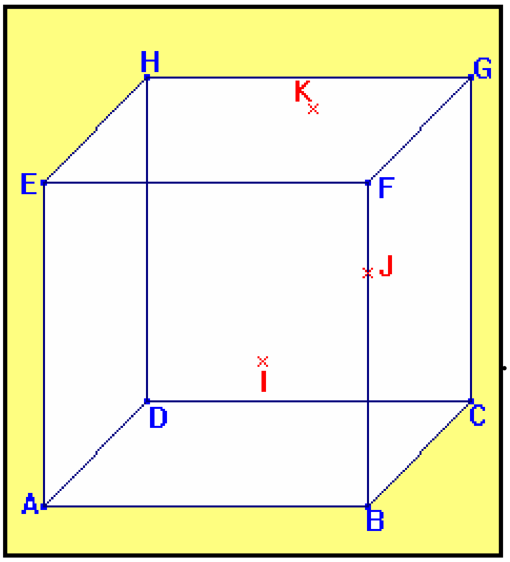
نشاط ثالث

نقبل أنه يمكن تمديد قواعد الحساب على الأشعة في المستوي إلى الفضاء.

$ABCD$ رباعي وجوه. نعتبر النقط E ، F و G حيث E منتصف القطعة $[CD]$، G مركز ثقل المثلث CDA و F تحقق العلاقة: $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{BF}$.

1. أنجز رسما مناسبا.
2. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{FA}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$ و عن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AE}$.
3. باستعمال العلاقة $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AG}$ بين أنه يوجد عدد حقيقي x يطلب تعيينه يحقق العلاقة: $\overrightarrow{BE} = x\,\overrightarrow{FG}$.
4. ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين (BE) و (FG) ؟

نشاط رابع



$ABCDEFGH$ مكعب. I نقطة من الوجه $ABFE$،
J نقطة من الحرف $[BF]$ و K نقطة من الوجه $EFGH$.

1. أنشئ تقاطع المستوي (IJK) مع مختلف أوجه المكعب.
2. نفرض أن $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{FB}$ و لتكن النقطة L منتصف القطعة $[BC]$.
عبر عن الشعاع $\overrightarrow{LJ}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{EH}$.

نشاط خامس

نسمي مركز ثقل رباعي وجوه $ABCD$ النقطة الوحيدة G التي تحقق: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

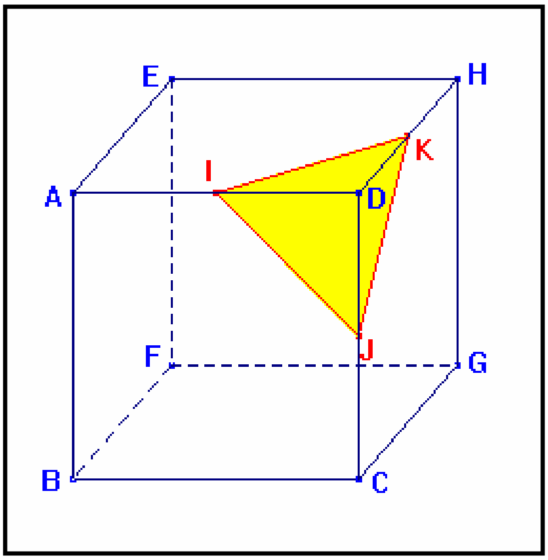
ليكن $ABCD$ و $IJKL$ رباعيا وجوه حيث G مركز ثقل $ABCD$ و G' مركز ثقل $IJKL$.

1. بين باستعمال علاقة شال أن: $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DL} = 4\overrightarrow{GG'}$.
2. استنتج أنه يكون للرباعيين $ABCD$ و $IJKL$ نفس مركز الثقل إ ذا و فقط إ ذا كان:
$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DL} = \vec{0}$

<u>تطبيق:</u> بين أن مراكز ثقل أوجه رباعي وجوه $ABCD$ هي رؤوس لرباعي وجوه مركز ثقله هو نفس مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

إنشاء مقطع مكعب بمستو

1. تمهيد



نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ و لتكن النقط I، J و K منتصفات الأحرف $[AD]$، $[CD]$ و $[DH]$ على الترتيب.

من الواضح جدا أن المستوي (IJK) يقطع المكعب $ABCDEFGH$ وفق المثلث IJK.

نقول أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK) هو المثلث IJK.

نلاحظ أيضا أن المثلث IJK متقايس الأضلاع لأن:

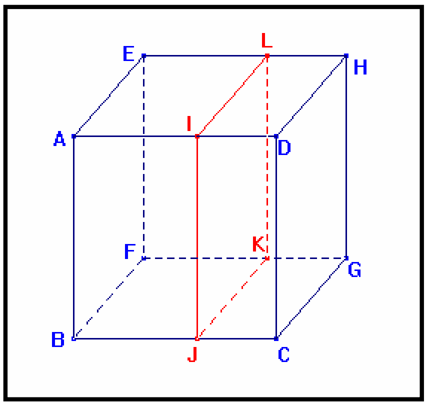
$IJ = JK = KI = \frac{1}{2}AH$ حيث AH قطر لأحد الأوجه.

2. المقاطع المستوية لمكعب

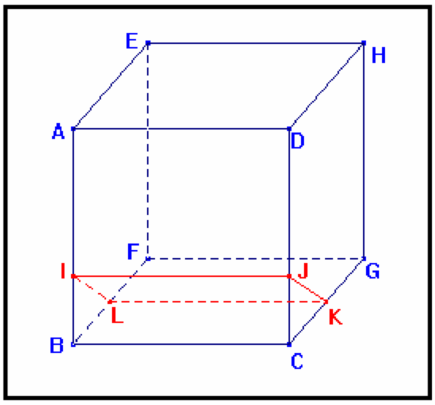
مقطع مكعب بمستو (P) هو:

- **مربع إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه المكعب.**
- **قطعة مستقيمة أو مستطيل إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أحرف المكعب.**
- **نقطة، مثلث، متوازي أضلاع، شبه منحرف، خماسي أو سداسي في الحالات الأخرى.**

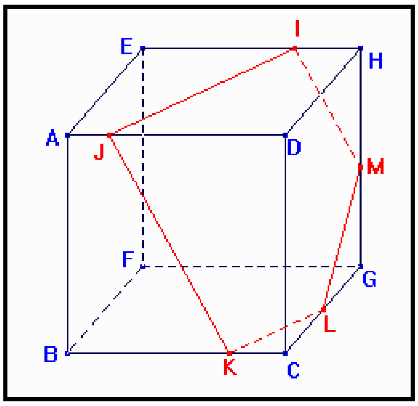
3. أمثلة



المستوي (LIJ) يوازي الوجه $ABFE$
مقطع المكعب هو المربع $IJKL$



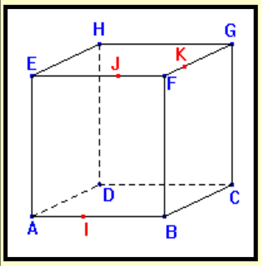
المستوي (IJK) يوازي الحرف $[BC]$
مقطع المكعب هو المستطيل $IJKL$



مقطع المكعب بالمستوي (IJK)
هو الخماسي $IJKLM$

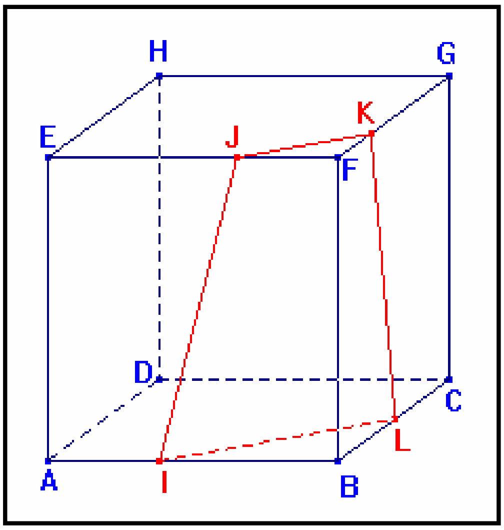
تمرين محلول 1

$ABCDEFGH$ مكعب. I، J و K ثلاث نقط تنتمي على الترتيب إلى الأحرف $[AB]$، $[EF]$ و $[FG]$.



1. عين تقاطع المستوي (IJK) مع الأوجه $(ABFE)$، $(EFGH)$ و $(ABCD)$.
2. أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK).

حـــل:



1. تنتمي I و J إلى المستوي (IJK) و إلى الوجه $(ABFE)$.

و منه المستوي (IJK) يقطع الوجه $(ABFE)$ وفق القطعة $[IJ]$.

كذلك المستوي (IJK) يقطع الوجه $(EFGH)$ وفق القطعة $[JK]$.

المستوي (IJK) يقطع المستويين المتوازيين $(EFGH)$ و $(ABCD)$ وفق مستقيمين متوازيين. المستقيم الذي يمر من I و الموازي للمستقيم (JK) يقطع (BC) في النقطة L. إذن (IJK) يقطع $(ABCD)$ وفق $[IL]$.

2. المستوي (IJK) يقطع الوجه $(BCGF)$ وفق القطعة $[KL]$.

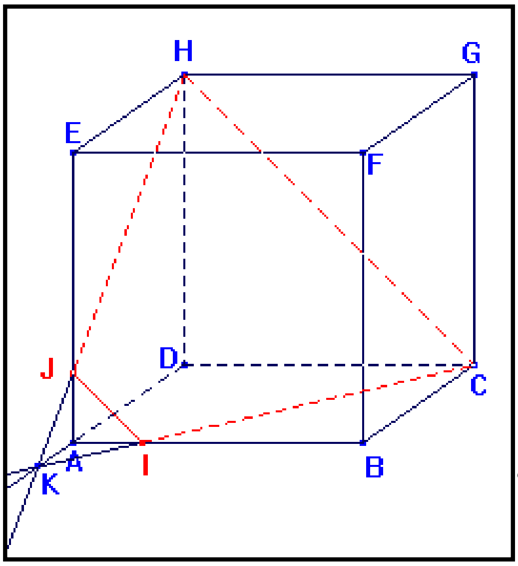
مقطع المكعب $ABCDEFGH$ **بالمستوي** (IJK) هو الرباعي $IJKL$

تمرين محلول 2

$ABCDEFGH$ مكعب. I نقطة من الحرف $[AB]$ حيث $AI = \frac{1}{3}AB$

أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (ICH).

حـــل:



بما أن المستويين $(ABFE)$ و $(DCGH)$ متوازيان فإن المستوي (ICH) يقطع الوجهين $ABFE$ و $DCGH$ وفق مستقيمين متوازيين.

ننشئ النقطة J من القطعة $[AE]$ حيث $(IJ)//(CH)$.

لدينا $AJ = \frac{1}{3}AE$

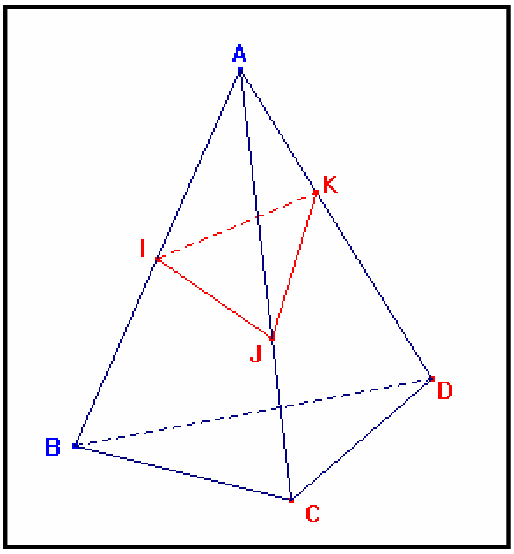
المستقيمان (IC) و (AD) يتقاطعان في نقطة K.

المستقيمان (HJ) و (AD) يتقاطعان كذلك في النقطة K.

و منه المستوي (ICH) يقطع الوجه $ADHE$ وفق القطعة $[HJ]$.

إذن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (ICH) هو شبه المنحرف المتساوي الساقين و الذي قاعدتاه (CH) و (IJ).

إنشاء مقطع رباعي وجوه بمستو



1. تمهيد

نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ و لتكن النقط I، J و K حيث $I \in [AB]$، $J \in [AC]$ و $K \in [AD]$

من الواضح جدا أن المستوي (IJK) يقطع رباعي الوجوه $ABCD$ وفق المثلث IJK.

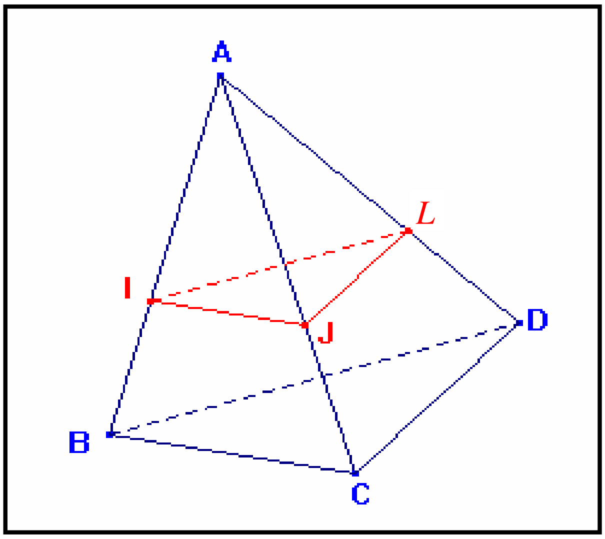
نقول أن مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK) هو المثلث IJK.

2. المقاطع المستوية لرباعي وجوه

مقطع رباعي وجوه بمستو (P) هو:

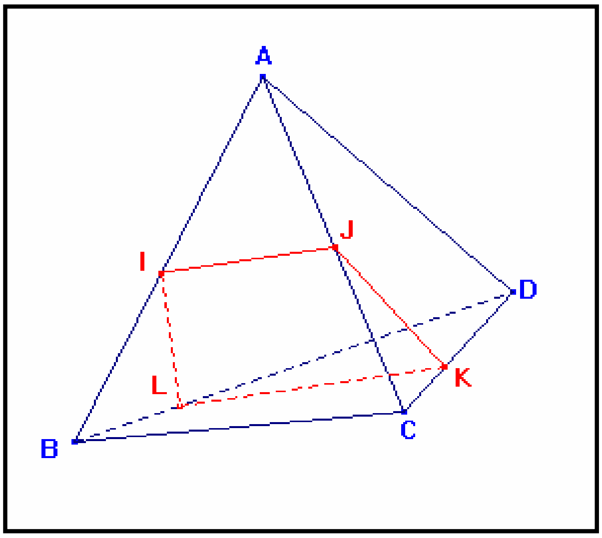
- **نقطة أو مثلث إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه رباعي الوجوه.**
- **نقطة، قطعة مستقيمة، مثلث أو رباعي في الحالات الأخرى.**

3. أمثلة



المستوي (LIJ) يوازي الوجه BCD

مقطع رباعي الوجوه هو المثلث IJL

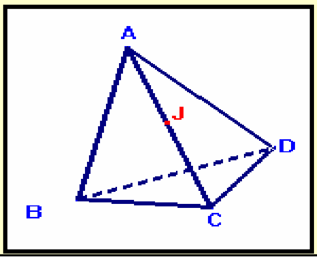


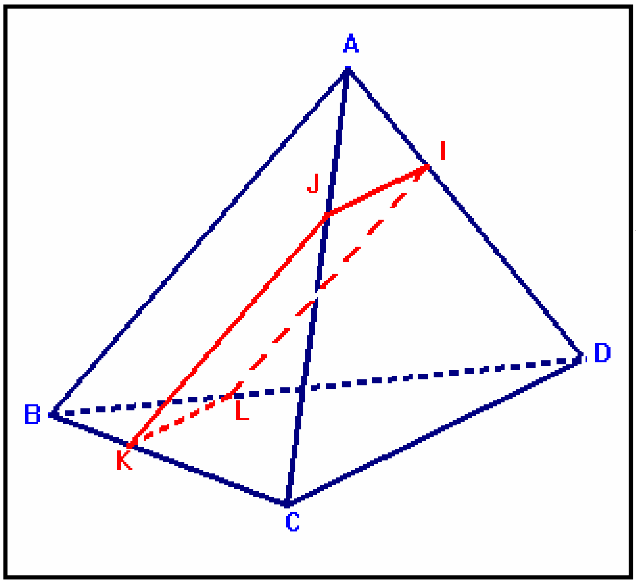
المستوي (IJK) يقطع رباعي الوجوه

وفق الرباعي $IJKL$

تمرين محلول 1

$ABCD$ رباعي وجوه . J نقطة من الحرف $[AC]$
أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (P) الذي يمر من النقطة J و الموازي للمستقيمين (AB) و (CD) محددا طبيعته.





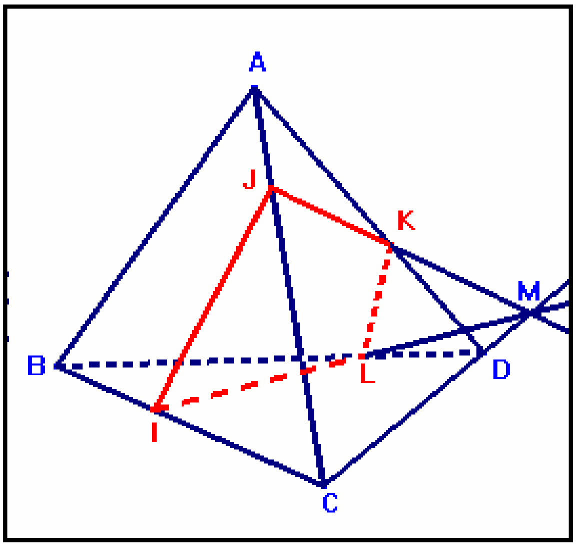
حــــل:

بما أن المستويين (P) و (ABC) يوازيان المستقيم (AB) فهما يتقاطعان وفق مستقيم (JK) يوازي المستقيم (AB).
نرسم المستقيم (JK) الموازي للمستقيم (AB) مع $K \in [BC]$
بإتباع نفس المنهجية نرسم المستقيم (IJ) الموازي لـ (CD) حيث I نقطة من $[AD]$. مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (P) هو إذن الرباعي $IJKL$.
بما أن (IL) يوازي (AB) و (KL) يوازي (CD) فإن المقطع $IJKL$ متوازي أضلاع.

تمرين محلول 2

$ABCD$ رباعي وجوه. I، J و K ثلاث نقط تنتمي عل الترتيب إلى الأحرف $[BC]$، $[AC]$ و $[AD]$.
المستقيمان (JK) و (CD) غير متوازيين.

1. عين تقاطع المستوي (IJK) مع الوجهين ABC و ACD.
2. بين أن المستقيمين (JK) و (CD) يتقاطعان في نقطة M و حيث أن المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD). أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK).



حــــل:

1. المستوي (IJK) يقطع الوجه ABC وفق القطعة $[IJ]$ و الوجه ACD وفق القطعة $[JK]$.
2. المستقيمان (JK) و (CD) ينتميان إلى المستوى ACD و بما أنهما غير متوازيين فهما متقاطعان في نقطة M. النقطة I تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD). كذلك النقطة M تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD) لأنها تنتمي إلى المستقيمين (JK) و (CD). و منه المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD).
3. يتقاطع المستقيمان (IM) و (BD) في نقطة L. مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ هو إذن الرباعي $IJKL$.

الحساب الشعاعي في الفضاء

ملاحظة: يتم تمديد تعاريف و خواص الأشعة و العمليات عليها في الهندسة المستوية إلى الفضاء.

1. أشعة الفضاء

نرفق، كما في المستوي، بكل ثنائية نقطية (A,B) من الفضاء الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

• إذا كان $A \neq B$، منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB)، اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو من A نحو B و طويلة $\overrightarrow{AB}$ التي نرمز إليها بالرمز $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ هي المسافة AB. لدينا: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

• إذا كان $A = B$، فإن $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع المعدوم الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{0}$.

• غالبا ما نرمز إلى الأشعة بواسطة حرف مثل: $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ ...

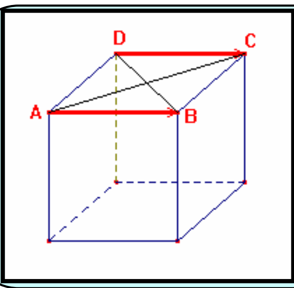
• من أجل كل نقطة O و من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من الفضاء، توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

مبرهنة: A، B، C و D أربع نقط من الفضاء. الخواص الثلاث الآتية متكافئة:

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(2) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(3) للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف.

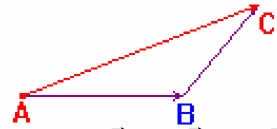


2. العمليات على الأشعة

❖ مجموع شعاعين

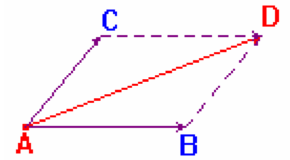
علاقة شال

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



قاعدة متوازي الأضلاع

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$



حالة خاصة: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. نقول أن $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس $\overrightarrow{AB}$ و نكتب $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

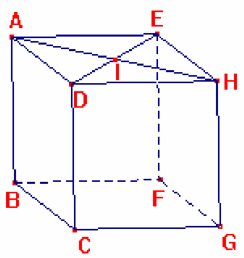
❖ جداء شعاع بعدد حقيقي

مبرهنة: من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و من أجل كل عددين حقيقيين k و k' لدينا:

• $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ • $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$

• $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ • $k\left(k'\vec{u}\right) = (kk')\vec{u}$

• $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ $k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$



مثلا: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AI}$

نتائج:

• يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k\vec{u}$

• يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.

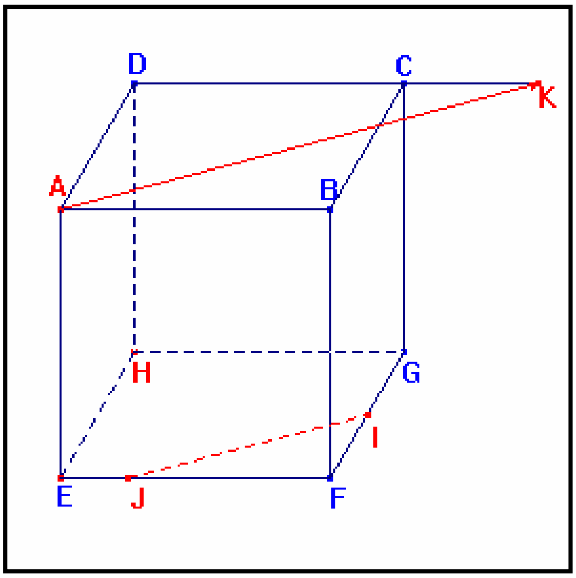
• تكون النقط A، B و C في استقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

تمرين محلول 1

$ABCDEFGH$ مكعب. لتكن النقط I ، J و K حيث I منتصف $[FG]$، $4\overrightarrow{FJ} = 3\overrightarrow{FE}$ و $2\overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{DC}$

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{FG}$.
2. بين أن الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (IJ) و (AK)؟

حـــل:



.1 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ و بما أن:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{FE}$ فإن: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{FG} - \frac{3}{2}\overrightarrow{FE}$

.2 لدينا مما سبق: $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ و منه فالشعاعان

$\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا.

نستنتج هكذا أن المستقيمين (IJ) و (AK) متوازيان.

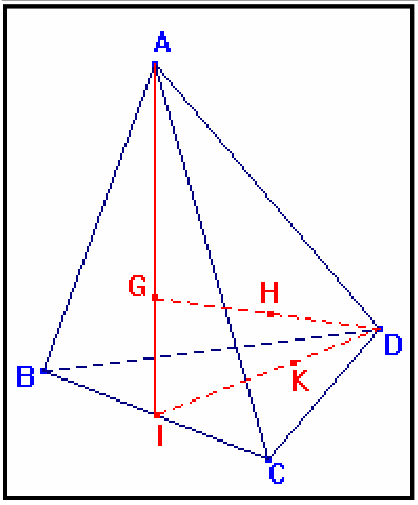
تمرين محلول 2

$ABCD$ رباعي وجوه. I منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل الوجه ABC. نعتبر النقطتين H و K المعرفتين بـِ:

$\overrightarrow{DH} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$.

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AG}$.
2. بين أن النقط A، H و K في استقامية.

حـــل:



.1 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}\right)$

و منه: $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right)$

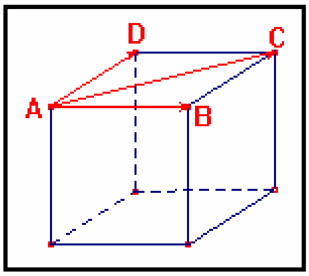
نعلم أن: $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ و منه: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

نجد هكذا: $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

.2 نلاحظ أن: $\overrightarrow{AK} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AH}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. إذن A، H و K في استقامية.

الأشعة من نفس المستوي

تعريف: لتكن $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة أشعة و لتكن O نقطة كيفية من الفضاء. نعتبر النقط A، B و C من الفضاء حيث:
$\overrightarrow{OA}=\vec{u}$، $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$
القول أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يعني أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي.

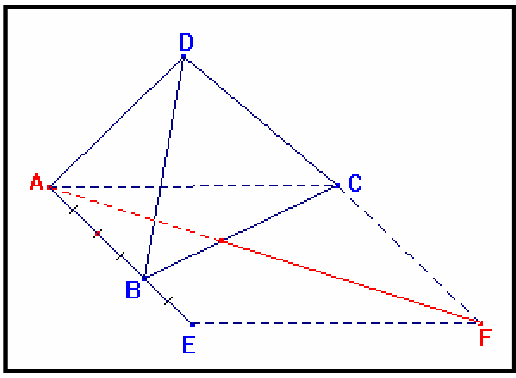


مثال: نلاحظ أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي و منه فالأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ الممثلة على الترتيب بـِـ: $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي.

ملاحظة:
- يعمم التعريف السابق إلى عدد كيفي من أشعة الفضاء.
- إذا كان شعاعان من بين الأشعة الثلاثة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطين خطيا تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي.

مبرهنة: $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.
تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا و فقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y بحيث:
$$\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

برهان: لتكن O نقطة كيفية من الفضاء و لتكن النقط A، B و C من الفضاء حيث: $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$، $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$
القول أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يعني أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي(التعريف).
النقط O، A، B ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فهي تعرف إذن مستويا (OAB) حيث $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ معلم له.
النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (OAB). يوجد إذن عددان حقيقيان x و y بحيث: $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$
($(x;y)$ هما إحداثيا النقطة C بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$).
و هكذا $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

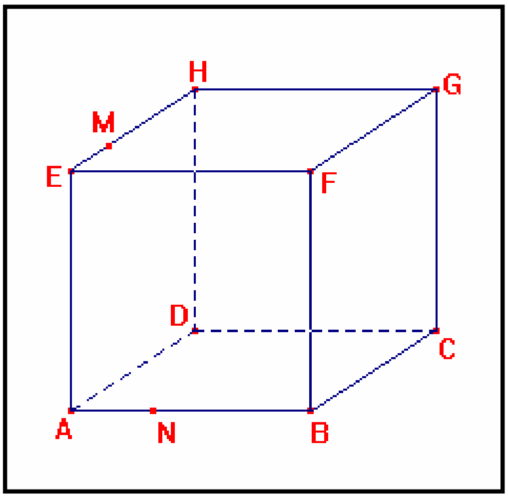


مثال: $ABCD$ رباعي وجوه.(الشكل المقابل)
لدينا $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
و منه الأشعة $\overrightarrow{AF}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من نفس المستوي. و بما أن A مشتركة فإن النقط A، B، C و F تنتمي إلى نفس المستوي.

تمرين محلول 1

نعتبر على المكعب $ABCDEFGH$ النقطتين M و N المعرفتين بــ: $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MN}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{DB}$.
2. هل الأشعة $\overrightarrow{MN}$، $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي؟



حــل:

1. لدينا باستعمال علاقة شال: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AN}$

و بما أن $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$، $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و فإن:

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$

و هكذا نجد $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

2. لدينا باستعمال علاقة شال: $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HD}$

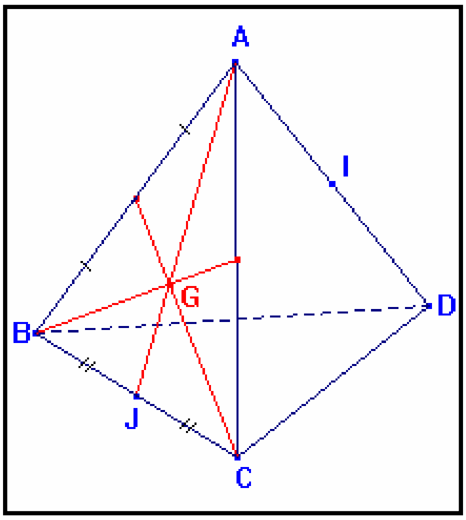
و بما أن $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{EA}$ فإن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{EA}\right)$

نجد هكذا $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$ و منه فالأشعة $\overrightarrow{MN}$، $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي.

تمرين محلول 2

$ABCD$ رباعي وجوه. لتكن النقط I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل المثلث ABC.

3. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$ مرة بدلالة $\overrightarrow{DG}$ و مرة أخرى بدلالة الشعاع $\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DJ}\right)$.
4. بين أن النقط D، G، I و J تنتمي إلى نفس المستوي.



حــل:

1. لدينا من جهة باستعمال علاقة شال وعلما أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$$

لدينا من جهة ثانية $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DJ}$ و منه:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DJ}\right)$$

2. من السؤال الأول نجد: $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$. نستنتج أن النقط D، G، I و J تنتمي إلى نفس المستوي.

مبرهنة منلاوس $(Ménélaùs)$

1. ABC مثلث. M، N و P ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى و تنتمي إلى المستقيمات (AB)، (AC) و (BC) على الترتيب.

نفرض إضافة إلى ما سبق أن النقط M، N و P في استقامية وتنتمي إلى مستقيم (Δ).

المستقيم المار من النقطة C و الموازي للمستقيم (AB) يقطع المستقيم (Δ) في نقطة Q.

❖ بين أن:

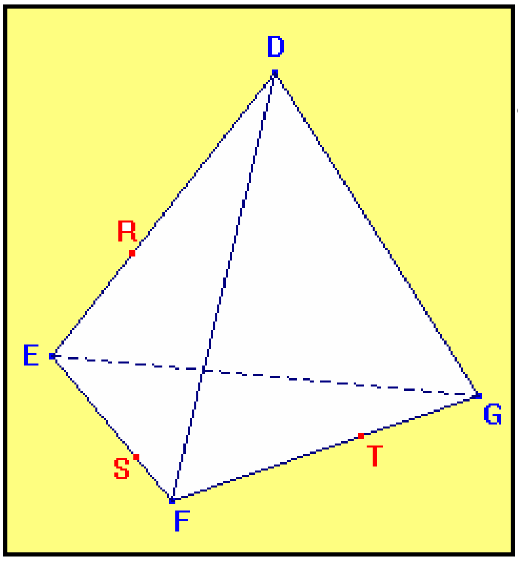
$$\frac{QC}{AM}=\frac{NQ}{NM}=\frac{NC}{NA} \quad \text{و} \quad \frac{PQ}{PM}=\frac{PC}{PB}=\frac{QC}{MB}$$

❖ برهن أن: $\boxed{\frac{MA}{MB}\times\frac{PB}{PC}\times\frac{NC}{NA}=1}$

2. $DEFG$ رباعي وجوه. R، S، T و U أربع نقط تنتمي على الترتيب إلى المستقيمات (DE)، (EF)، (FG) و (DG).

نفرض إضافة إلى ما سبق أن النقط R، S، T و U تنتمي إلى نفس المستوي.

❖ أعد رسم الشكل ثم أنشئ النقطة U.



❖ يتقاطع المستقيمان (RS) و (DF) في نقطة V.

بتطبيق نتيجة السؤال الأول على مثلثين مختارين بشكل مناسب و بضرب طرف في طرف المساواتين المحصل عليهما برهن أن:

$$\boxed{\frac{RD}{RE}\times\frac{SE}{SF}\times\frac{TF}{TG}\times\frac{UG}{UD}=1}$$

تطبيق

$HIJK$ رباعي وجوه. W، X، Y و Z أربع نقط معرفة كما يلي:

$\overrightarrow{HW}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$، $\overrightarrow{JX}=\frac{3}{4}\overrightarrow{JI}$، $\overrightarrow{YJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{YK}$ و $\overrightarrow{ZK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{ZH}$.

❖ ارسم شكلا مناسبا.

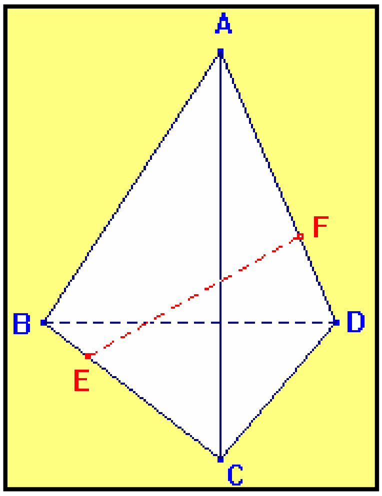
❖ هل تنتمي النقط W، X، Y و Z إلى نفس المستوي؟

أعمال موجهة

المرجح و الاستقامية

لإثبات استقامية ثلاث نقط يكفي أحيانا إثبات أن إحدى هذه النقط هو مرجح النقطتين الأخريين

$ABCD$ رباعي وجوه. نعتبر النقطتين E و F المعرفتين كما يلي: $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE}=\beta\overrightarrow{BC}$
حيث α و β عددان حقيقيان غير معدومين.



1. **دراسة مثال**

نفرض $\alpha=\frac{2}{3}$ و $\beta=\frac{1}{4}$

لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3),(C;1),(D;2)\}$

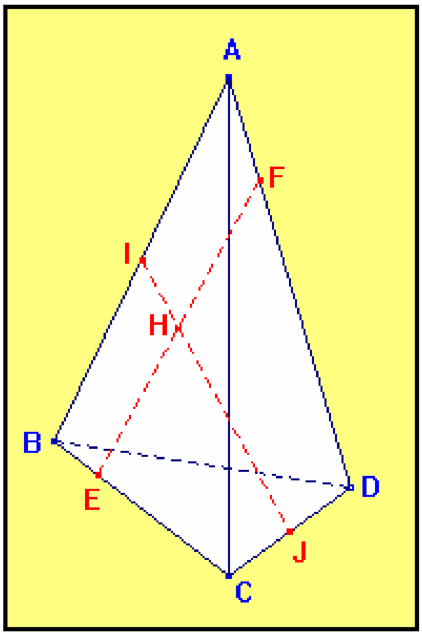
- ❖ أثبت أن النقط E ، F و G في استقامية.
- ❖ أنشئ النقطة G.

2. **دراسة حالة خاصة**

نفرض $\alpha=\beta=k$

لتكن النقط I، J و H منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$، $[CD]$ و $[EF]$ على الترتيب.

نهدف إلى إثبات استقامية النقط I، J و H باستعمال المرجح.



- ❖ أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان x و y يطلب تحديدهما حيث: $x\,\overrightarrow{EB}+y\,\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. ماذا تستنتج ؟
- ❖ اثبت أن النقطة F هي مرجح للنقطتين A و D مرفقتين بمعاملين يطلب تحديدهما.
- ❖ أثبت باستعمال قاعدة التجميع ان النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1-k),(B;1-k),(C;k),(D;k)\}$.
- ❖ أثبت أن النقط I، J و H في استقامية.

$ABCDEFGH$ مكعب. P منتصف $[EH]$، Q منتصف $[AB]$ و R منتصف $[CG]$.

1. بين أن $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و أن $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)$.
2. بين أن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.
3. بين أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو سداسي منتظم.

1. لدينا باستعمال علاقة شال $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$ و بما أن $\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ فإن: $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$. نعلم أن $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ و بتعويض $\overrightarrow{AC}$ بـ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و علما أن $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ فإن $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)$. و بما أن $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$ فإن $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. علما أن $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ نستنتج هكذا أن:

$$\boxed{\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}\quad(1)$$

لدينا $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GR}\right)$. و بما أن: $\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ و $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{GR}\right)=\vec{0}$ فإن: $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}\right)$

نعلم أن $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)}\quad(2)$

2. من العلاقة (1) نستنتج أن المستقيم (PQ) يوازي المستوي (ACH) و من العلاقة (2) نستنتج أن المستقيم (QR) يوازي المستوي (ACH). و علما أنه يتوازى مستويان إذا و فقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين كل منهما يوازي المستوي الآخر فإن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.

3. المستوي (ABC) يقطع المستويين المتوازيين (PQR) و (ACH) وفق مستقيمين متوازيين (AC) و (QI) و منه فإن النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ و $\overrightarrow{QI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. لدينا كذلك:

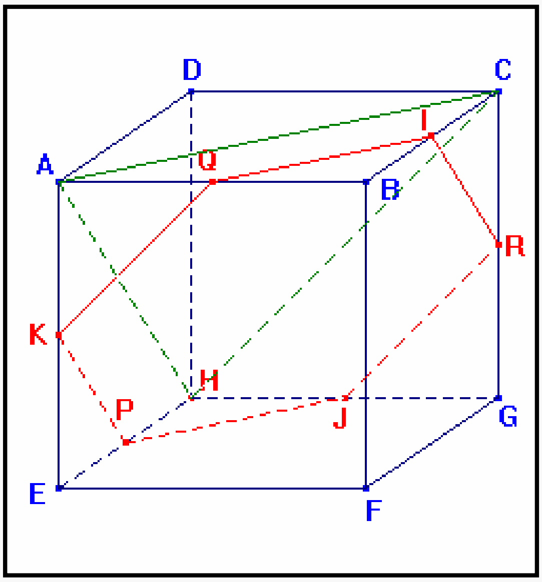
J منتصف $[GH]$ و K منتصف $[AE]$ حيث:

$\overrightarrow{JR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.

و بما أن أقطار أوجه المكعب متقايسة فإن:

$QI=IR=RJ=JP=PK=KQ$

لدينا كذلك $QJ=IP=KR$ (متوسطات للمكعب). نستنتج مما سبق أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو السداسي المنتظم $QIRJPK$.

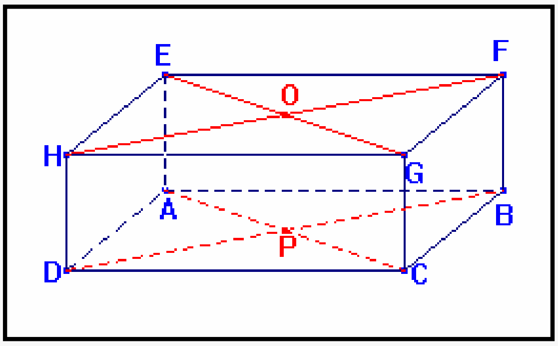


$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. O مركز الوجه $EFGH$ و P مركز الوجه $ABCD$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{OP}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{GB}$.
2. نهتم فيما يلي بالهرم الذي رأسه O و قاعدته $ABCD$ و لتكن النقط Q، K، L و M حيث:

Q مركز ثقل المثلث (ODC)، K منتصف $[AB]$، M منتصف $[CD]$ و $\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$.

- **أثبت أن النقط O، K، M، P، Q و L تنتمي على نفس المستوي.**
- **أثبت أن** $5\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقط Q، K و L ؟



1. لدينا: $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EA}$ و منه $GCAE$ متوازي أضلاع

إذن $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ أي $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{PC}$ و منه $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GC}$.

لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}$

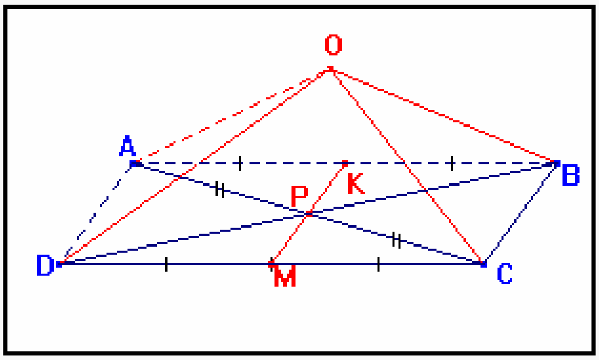
و بما أن: $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}$ فإن:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ED}$$

نجد هكذا $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{ED}\right)$

2.

- لإثبات أن النقط O، K، M، P، Q و L من نفس المستوي يكفي مثلا إثبات أن النقط P، Q و L تنتمي إلى المستوي (OKM).



لدينا: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$

و منه: $(KM)//(AD)//(BC)$.

يمر إذن المستقيم (KM) من النقطة P. $\left(\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

نستنتج أن النقطة P تنتمي إلى المستوي (OKM).

لدينا: النقطة Q تنتمي إلى المستقيم (OM) $\left[\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}\right]$ و منه فالنقطة Q تنتمي إلى المستوي (OKM).

لدينا: النقطة L تنتمي إلى المستقيم (OP) $\left[\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}\right]$ و بما أن المستقيم (OP) محتوى في المستوي (OKM) فإن النقطة L تنتمي إلى المستوي (OKM).

- نثبت باستعمال علاقة شال انطلاقا من العلاقة $\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$ و العلاقة $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ أن:

$\overrightarrow{KL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{KM}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{KQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ و منه: $5\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$.

نستنتج هكذا أن النقط Q، K و L في استقامية.

إنشاء مقطع مكعب بمستو

$ABCDA'B'C'D'$ مكعب. H منتصف القطعة $[AA']$ و I منتصف القطعة $[A'B']$.

<u>الهدف هو:</u>

تعيين مقطع المكعب $ABCDA'B'C'D'$ بالمستوي (HIC).

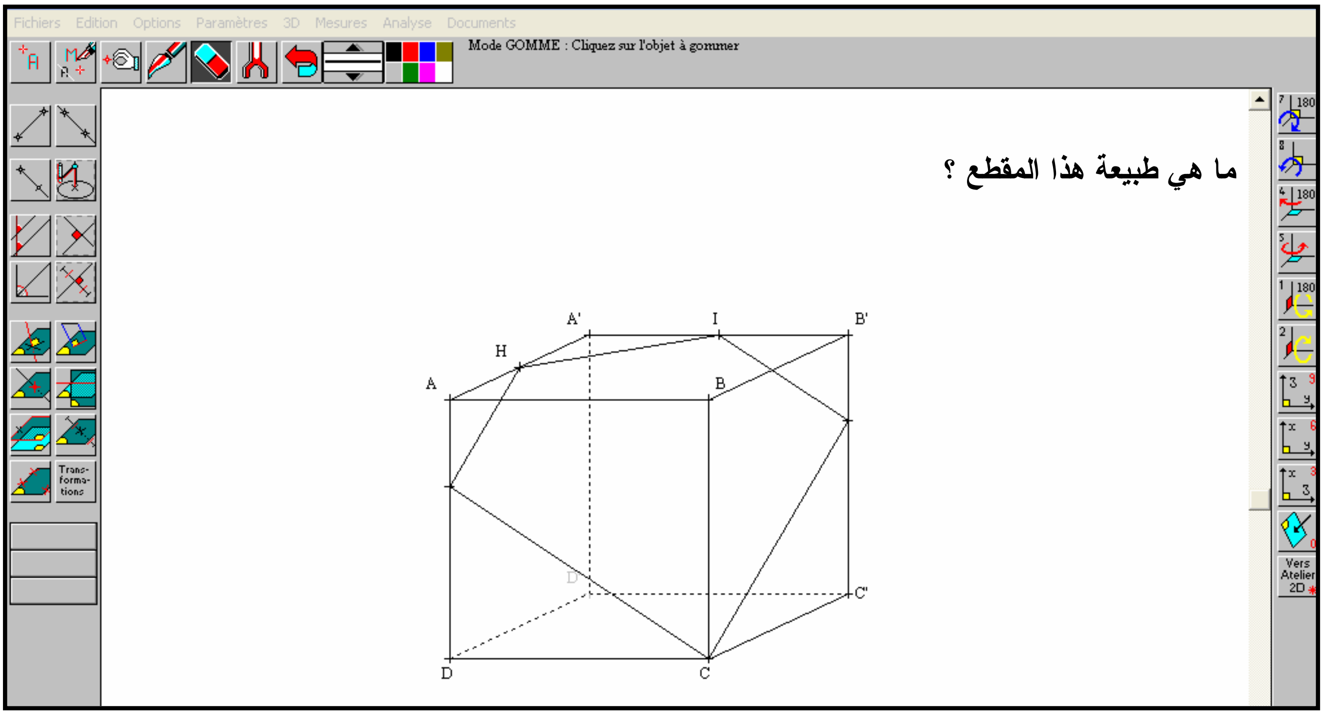
1. التخمين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية

<u>خطوات الانجاز باستعمال برمجية آتوليي</u> (Atelier 3D)

بعد فتح (Atelier 3D) يظهر لك مكعب و بعد تسمية رؤوسه باستعمال الزر أضغط على الزر ثم الزر لإنشاء المنتصفين H و I بعد تحديد القطعتين المستقيمتين المناسبتين.

لتعيين المستوي (HIC) نقوم في البداية بإنشاء مثلا القطعة المستقيمة $[HI]$ باستعمال الزر و بعد النقر على القطعة المستقيمة $[HI]$ نسحب نحو النقطة C دون تحرير زر الفأرة.

لإنشاء مقطع المكعب $ABCDA'B'C'D'$ بالمستوي (HIC) ننقر على فئة section par un plan ضمن فئة $3D$ في القائمة العلوية للبرمجية ثم ننقر على المستوي (HIC). بعد ذلك نقوم بإخفاء المستوي (HIC) باستعمال الزر الأيمن للفأرة. نتحصل هكذا على الشكل الموالي.



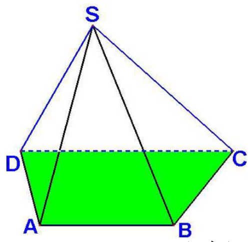
<u>أنجز برهانا لهذا التخمين</u>

<u>تطبيق</u>: باتباع نفس الخطوات أنجز مقطع رباعي وجوه بمستو مختار.

الهندسة في الفضاء

بالنسبة للتمارين من **1** الى **3** أصحيح أم خطئ ؟

1 $ABCD$ شبه منحرف فيه (AB) يوازي (CD). النقطة S هي نقطة لا تنتمي إلى المستوي (ABC)



1) المستويان (SAB) و (SCB) يتقاطعان عند نقطة واحدة وهي S.

2) المستويان (SAB) و (SCB) يتقاطعان وفق مستقيم يشمل S ويوازي المستوي (SAB).

3) المستويان (SAB) و (SCB) يتقاطعان وفق مستقيم يشمل S و يقطع المستوي عند نقطة أخرى ثابتة.

2 (D) و (D') مستقيمان من الفضاء .

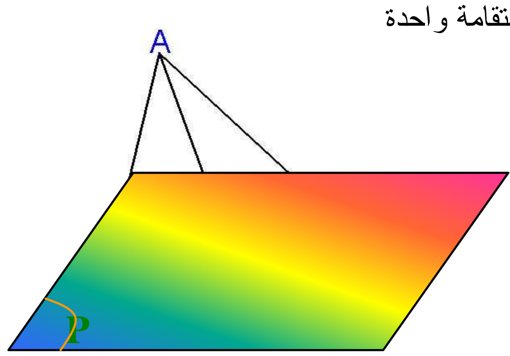
1) إذا كان (D) و (D') ليس لهما أيّة نقطة مشتركة ، فإنهما متوازيان.

2) إذا كان (D) و (D') ليس لهما أيّة نقطة مشتركة فيوجد إذن مستوي يشملهما .

3) إذا كان (D) و (D') ليس لهما أيّة نقطة مشتركة وهما من نفس المستوي فإنهما إذن متوازيان .

3 ليكن P مستويا و (D) مستقيما عموديا على P في النقطة H.

لتكن A نقطة من (D) تختلف عن H و لتكن B و C نقطتين من المستوي بحيث H ، B ، C ، ليست على استقامة واحدة



1) (D) ليس عموديا على (BC)

2) إذا كان (BC) عموديا على (HB) فإن (BC) عمودي على (AB) .

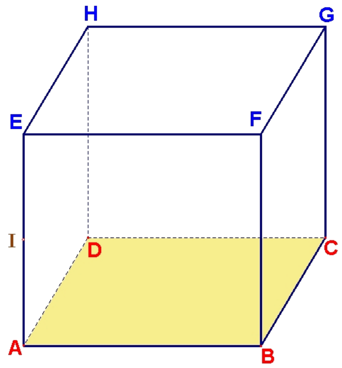
3) إذا كان (Δ) مستقيما من المستوي P لا يشمل النقط H ، B ، C فإن (D) لا يكون عموديا على (Δ).

أسئلة متعدّدة الخيارات

أختر الجواب الصحيح:

4

ليكن $ABCDEFGH$ مكعّبا و ليكن I منتصف الحرف $[AE]$.



1) المستقيم (GI) يقطع (AB) عند نقطة ثابتة .

2) المستقيم (GI) يقطع المستوي (ABC) عند نقطة ثابتة .

3) المستقيم (GI) يوازي المستوي (ABC)

5

في معلم متعامد ومتجانس (O,I,J,K) نعتبر النقطة M ترتيبها 1 وراقمها 1 حيث $OM = 11$.

– كم توجد من نقطة M من الفضاء تحقق الشروط .

أ) لا توجد أيّة نقطة

ب) توجد نقطة وحيدة

توجد نقطتان.

تمارين

6

لتكن النقط $A\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ و $B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

و $C\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ في معلم متعامد ومتجانس .

المثلث ABC هو :

أ) قائم

ب) متقايس الأضلاع

ت) الضلع AB هو نصف الضلع AC .

تقاطع مستقيمات و مستويات

7

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه .

نسمي I ، J و K منتصفات $[BC]$ ، $[DC]$

و $[AB]$ على الترتيب .

عيّن كل من المستويين : (AID) و (ABJ) و

(ADI) و (CDK) و (ABJ) .

8

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع ولتكن S نقطة خارج المستوي (ABC) .

عين تقاطع المستويين (SAB) و (SCD) ثم تقاطع المستويين (SAC) و (SBD) .

9

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعين في النقطة 0 ، و S نقطة لا تنتمي إلى مستوي المستقيمين (D) و (D')

عيّن تقاطع المستويين (S,D) و (S,D') .

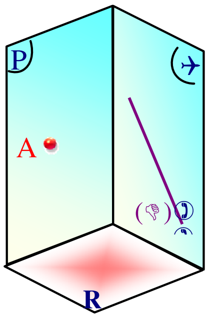
10

ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه $[AB]$ يوازي $[DC]$

لتكن S نقطة لا تنتمي إلى مستوي شبه المنحرف $ABCD$

عيّن تقاطع المستويين (SAD) و (SBC) ثم تقاطع المستويين (SAB) و (SCD).

11



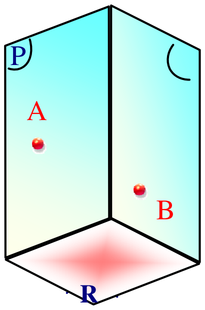
ليكن $(P),(Q),(R)$ ثلاث مستويات متقاطعة مثنى مثنى

لتكن A نقطة من المستوي P

و (D) مستقيما محتوى في (Q).

أنشئ مستقيمات تقاطع المستوي المعيّن بالنقطة A والمستقيم (D) مع المستويات $(P),(Q),(R)$.

12



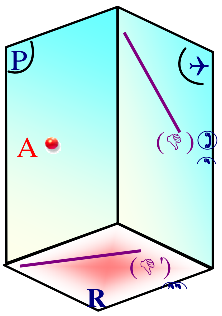
ليكن $(P),(Q),(R)$ ثلاث مستويات متقاطعة مثنى مثنى

لتكن A نقطة من المستوي (P)

و B نقطة من (Q)

أنشئ نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (R).

13



ليكن $(P),(Q),(R)$ ثلاث مستويات متقاطعة مثنى مثنى

لتكن A نقطة من المستوي P

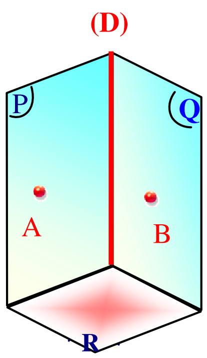
و (D) مستقيما من (Q).

و (D') مستقيما من (R).

عيّن المستقيم (Δ) الذي يشمل A ويقطع (D) و (D').

14

$(P),(Q),(R)$ هي ثلاث مستويات متقاطعة مثنى مثنى.



لتكن النقطة A تنتمي إلى المستوي (P) و B نقطة من (Q).

نسمي (D) مستقيم تقاطع (P) مع (Q)

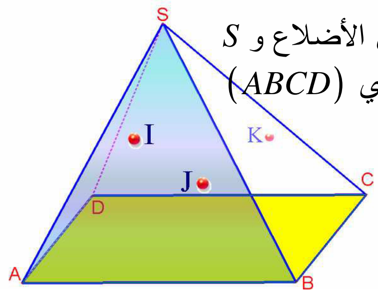
أ) أنشئ تقاطع (P) مع المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) والمستقيم الموازي لـ (D) ويشمل A .

ب) استنتج تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (R).

15

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و ليكن P المستوي الذي يشمل المنتصف I للقطعة $[AE]$ و يوازي المستوي (ABC)
عيّن تقاطع المستوي P مع المستوي (EBG).

16



ليكن $(ABCD)$ متوازي الأضلاع و S نقطة لا تنتمي إلى المستوي $(ABCD)$
لتكن I و J نقطتان متمايزتان من المستوي (SAB)، و K نقطة من المستوي (SDC)
عيّن تقاطع المستوي (IJK) مع كل من المستويات (SBC)، (SAB)، (SAD)، (SDC) و $(ABCD)$ على الترتيب.

17

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعين
لتكن A و A' نقطتين متمايزتين من (D)
B و B' نقطتين متمايزتين من (D')
برهن أن المستقيمين (AA') و (BB') هما إما متقاطعين و إما متوازيان.

18

لتكن B و C نقطتين من مستو (P) . لتكن A نقطة لا تنتمي إلى المستوي (P) .
ــ برهن أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة
ــ استنتج أن النقط C، B ، A تنتمي إلى مستو نرمز إليه بــ (Q)
ــ لتكن D نقطة من (Q) تختلف عن C، B ، A
نفرض أن المستقيم (AD) يقطع المستوي (P) في E.
برهن أن النقط B، C، E على استقامة واحدة.

19

ليكن $ABCD$ رباعي وجوهه .
لتكن النقط M، N ، P تنتمي على الترتيب إلى الأحرف (AB)، (AC) و (AD)، نفرض أن المستقيمات (MN) ، (PN) ، (MP)، تقطع المستوي (BCD) في P' ، M' N' .
برهن أن النقط P',M',N' تنتمي إلى المستقيمات (BC)، (CD) و (BD) على الترتيب.

20

ليكن المستقيمين (D) و (D') من مستو (P) و (Δ) مستقيما يقطع المستوي (P) في I
أ) نفرض أن (D) يوازي (D') ، عيّن المستقيم (D'') الذي يقطع (D)، (D') و (Δ) معا .
ب) نفرض أن (D) لا يوازي (D') ،
عيّن المستقيمات التي تقطع (D)، (D') و (Δ) معا.

21

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعين في النقطة O.
ولتكن A نقطة لا تنتمي إلى (D) و (D') .
كيف يمكن اختيار A بحيث يكون المستويان (A,D) و (A,D') متقاطعين؟ عيّن في حالة تقاطعهما مستقيم التقاطع.

22

ليكن (P) مستويا و (D) مستقيما من (P) .
لتكن A نقطة من (P) لا تنتمي إلى (D) و B نقطة لا تنتمي إلى المستوي (P) .
برهن أن المستقيمين (D) و (AB) ليس من نفس المستوي.

التـعـامـد

23

ليكن (P) مستويا و (D) مستقيما عموديا على (P) في النقطة H و (Δ) مستقيما من (P) لا يشمل H .
A نقطة من (D) تختلف عن H
برهن أن من أجل كل نقطة M من (Δ) يكون (HM) عموديا على (Δ) إذا وفقط إذا كان (AM) عموديا على (Δ).

24

ليكن $ABCD$ رباعي وجهوه منتظم و ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) .
أ) برهن أن المستقيم (BH) هو محور الضلع $[CD]$ في المثلث BCD.
ب) برهن أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

25

ليكن P مستويا و A و B نقطتين خارج المستوي P.

مجموعة النقط M من P متساوية المسافتين عن A و B.

ـ ملاحظة : المستوي العمودي على القطعة $[AB]$ في منتصفها يسمى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

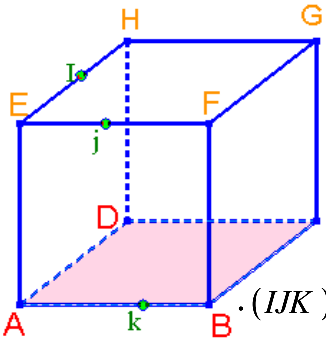
المقـــاطع المستويـــة

26

لتكن $ABCDEFGH$ مكعبا.

لتكن I ، J ، K نقط تنتمي على الترتيب إلى الأحرف $[AB]$ ، $[EF]$ ، $[EH]$ كما هو موضح في الشكل

أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK).



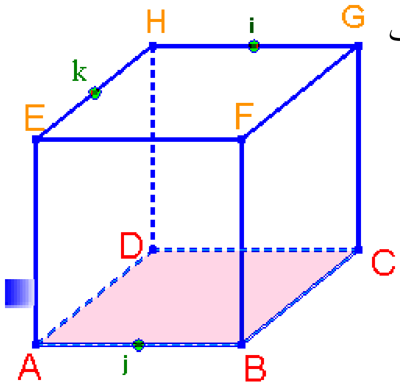
27

$ABCDEFGH$ هو مكعب.

ليكن I منتصف الحرف $[HG]$ و J منتصف الحرف $[AB]$

و النقطة K تنتمي إلى الحرف $[EH]$ بحيث

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$$

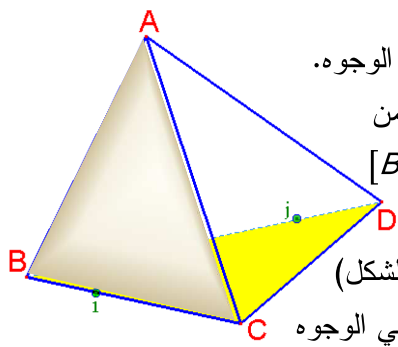


أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK).

28

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه.

لتكن I و J نقطتين من الحرفين $[BC]$ و $[BD]$ على الترتيب ، (كما هو مطروح في الشكل)



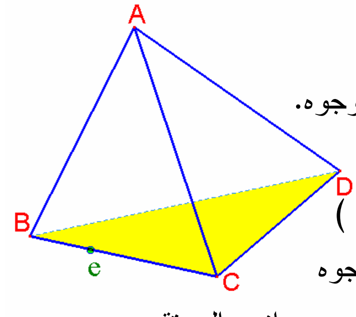
أنشئ مقطع هذا الرباعي الوجوه بالمستوي (P) الذي يشمل نقطتين I و J ويوازي المستقيم (AB).

29

ليكن $ABCD$ هو رباعي الوجوه.

e نقطة من الحرف $[BC]$

(كما هو موضّح في الشكل)



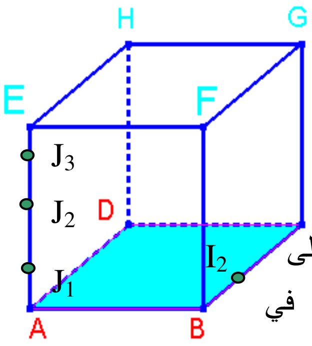
أنشئ مقطع هذا الرباعي الوجوه بالمستوي (P) الذي يشمل e ويوازي المستقيمين (AB) و (AD).

30

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا.

النقطتان I_1 و I_2 تنتميان إلى الحرفين $[GC]$ و $[BC]$.

النقط J_1 ، J_2 ، J_3 تنتمي إلى الحرف $[AE]$ (كما هو موضّح في الشكل)



أ) أرسم تقاطع المستقيم (I_1I_2) مع المستوي $(ABFE)$.

ب) استنتج مقطع المكعب بمستوي القطع المعّن بـــ :

❖ I_1 ، I_2 ، J_1

❖ I_1 ، I_2 ، J_2

❖ I_1 ، I_2 ، J_3

المعلم في الفضاء

30

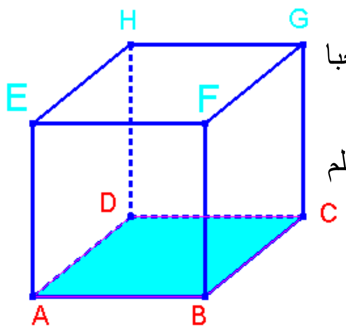
ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا

هل الرباعيات النقطية تعيّن معلما للفضاء؟ هل هذا المعلم متعامد ومتجانس؟

أ) (A, C, F, G)

ب) (A, C, D, F)

ج) (E, F, C, K)



تمارين

32

ليكن المكعبين $ABEFGHKL$ و $BCDEHIJK$

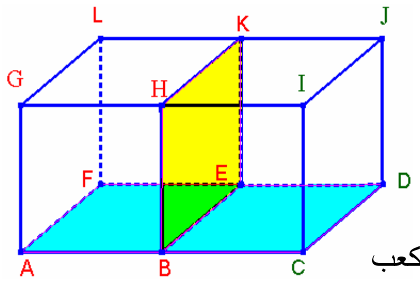
هل الرباعيات النقطية تعيّن معلما للفضاء؟

هل هذا المعلم متعامد ومتجانس؟

أ) (A,C,F,G)

ب) (A,C,D,F)

ج) (E,F,C,K)

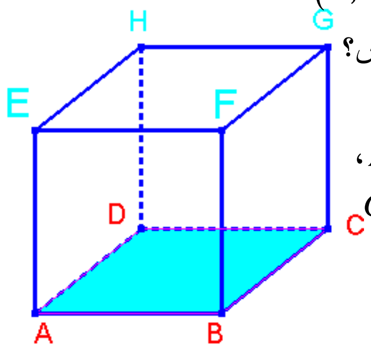


33

$ABCDEFGH$ مكعب

أ) أذكر لماذا $(A,\ B,\ D,\ E)$ هو معلم متعامد و متجانس؟

ب) عيّن في هذا المعلم إحداثيات كل من النقط A، B، C، D، E، F، G و H.



34

نعتبر نفس المكعّب المذكور في التمرين 33 .

أ) اذكر لماذا $(D,\ A,\ C,\ H)$ هو معلم متعامد ومتجانس ؟

ب) عيّن في هذا المعلم إحداثيات كل من النقط B, A, C, D, E, F, G و H.

ت) عيّن إحداثي المركز O للمكعّب.

35

ليكن I و J مركزي المربعين $ABCD$ و $EFGH$ على الترتيب .

أ) هل الرباعية (I,A,B,J) هي معلم للفضاء

ب) عيّن في هذا المعلم إحداثيات النقط B ، C ، E ، F ، G و H .

36

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$. لتكن النقط $A(2,3,1)$ ، $B(1,2,0)$ ، $C(3,0,-2)$. احسب أطوال القطع $[AB]$،$[AC]$و$[BC]$.

37

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

نعتبر النقط $A(-1,-2,1)$، $B(-2,-4,6)$، $C(1,2,3)$

احسب أطوال القطع $[AB]$ ، $[AC]$ و $[BC]$.

38

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

نعتبر النقطتين $A(-2,3,1)$ و $B(3,1,m)$

عيّن العدد الحقيقي m بحيث $AB=\sqrt{38}$.

39

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

نعتبر النقط $A(1,2,3)$ ، $B(-2,0,2)$ و $C(2,-1,1)$

احسب أطوال القطع $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[BC]$

استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين.

40

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

لتكن النقط $A(3,0,1)$ ، $B(2,1,-2)$ و $C(4,3,m)$

أ) عيّن العدد الحقيقي m بحيث المثلث ABC يكون متساوي الساقين.

ب) هل توجد قيمة لـ m التي من أجلها المثلث متقايس الأضلاع.

41

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

نعتبر النقط $A(1,1,2)$ ، $B(5,7,2)$ ، $C(6,6,2)$ و $D(0,2,2)$.

أ) إلى أي مستو يوازي مستو من مستويات الإحداثيات تنتمي إليه هذه النقط ؟

ب) أثبت أن هذه النقط تنتمي على نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

42

مجموعة النقط M من الفضاء متساوية المسافتين عن النقطتين المتمايزتين A و B تسمى المستوي المحوري للقطعة$[AB]$.

لتكن النقطتين $A(1,2,3)$ و $B(2,-1,1)$.

برهن أن $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان : $x-3y-2z+4=0$

هذه المعادلة تسمى معادلة المستوي المحوري.

43

لتكن النقطتين $A(1,3,2)$ و $B(2,-2,-1)$

عيّن معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

44

عيّن معادلة لسطح الكرة التي مركزها O و تشمل النقطة A

في الحالات التالية :

أ) $A(3,5,2)$

ب) $A(-2,0,-3)$

ج) $A(-1,-2,1)$

45

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

ليكن S سطح الكرة مركزها O و يشمل النقطة $A(2,-1,2)$ و P مستو معادلته $z=-2$.

أ) برهن أن المستوي P يقطع سطح الكرة.

ب) عيّن معادلة لسطح الكرة S ثم استنتج معادلة لتقاطع P و S

46

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

عيّن معادلة لسطح الأسطوانة الذي محوره (zz') ويشمل النقطة $A(-3,0,2)$.

47

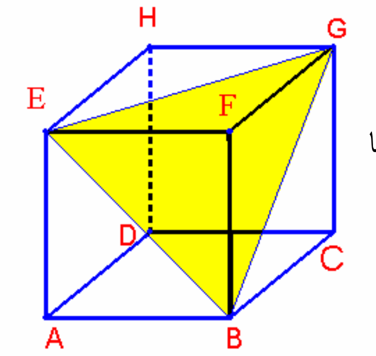
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

عيّن معادلة لسطح المخروطي الذي رأسه O و محوره (xx') و يشمل النقطة $A(1,1,2)$.

48

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\ I,\ J,\ K)$

عيّن معادلة لسطح المخروطي الذي رأسه O و محوره (yy') و يشمل النقطة $A(-1,-2,2)$.



49

ليكن $ABCDEFGH$ مكعّبا

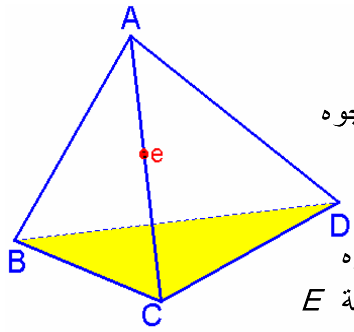
برهن أن المثلث EBG هو مثلث متقايس الأضلاع.

50

في المستوي (P) نعتبر المثلث ABC . لتكن D نقطة لا تنتمي إلى المستوي (P).

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (DBC).

برهن أن H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث DBC

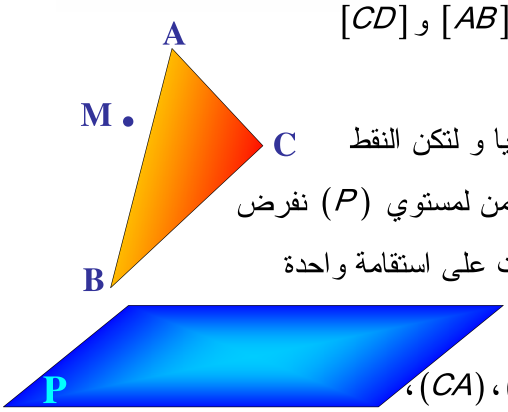


51

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه

لتكن E نقطة من الحرف $[AC]$

أنشئ مقطع الرباعي الوجوه $ABCD$ الذي يشمل النقطة E ويوازي الحرفين $[AB]$ و $[CD]$



52

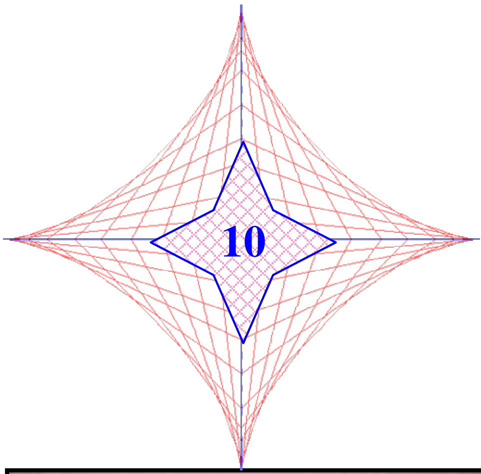
ليكن (P) مستويا و لتكن النقط A,B,C ليست من لمستوي (P) نفرض أن A,B,C ليست على استقامة واحدة

لتكن A',B',C' نقط تقاطع (BC)، (CA)، (AB) مع المستوي (P) على الترتيب.

1) برهن أن A',B',C' هي على استقامة واحدة

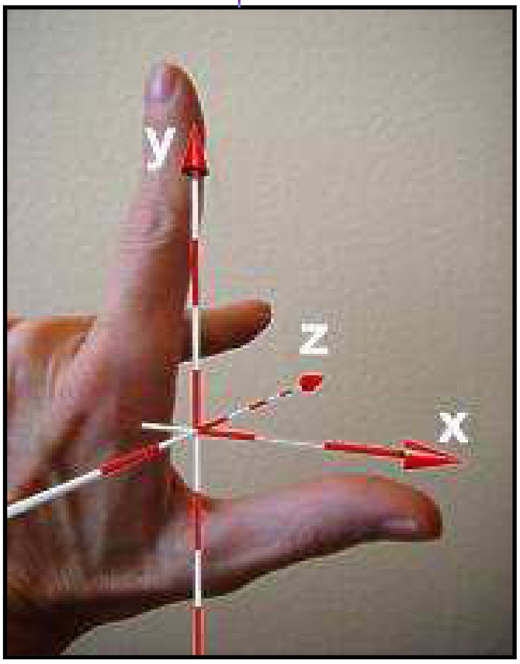
2) لتكن M نقطة من الفضاء حيث المستقيمات (MA)، (MB)، (MC) تقطع المستوي (P) في A_1,B_1,C_1 على الترتيب

برهن أن المستقيمات (A_1,B_1)،(B_1,C_1) ، (C_1,A_1) تمرّ كل منها بنقطة ثابتة.



التعليم في الفضاء

الكفاءات المستهدفة



- تعليم نقط أعطيت إحداثياتها.
- تعيين معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات.
- تعيين معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له.
- إثبات أن أشعة معطاة تنتمي إلى نفس المستوي.
- استعمال مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين نقطتين.
- استعمال دستور المسافة بين نقطتين لتعيين مجموعة نقط تحقق خاصية ما.

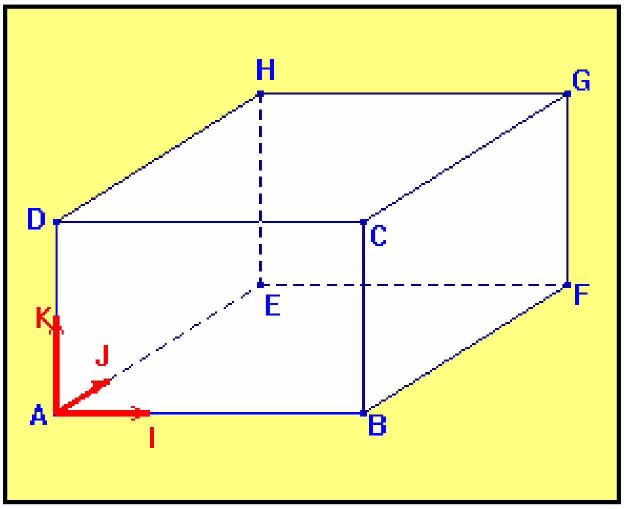
ميشال شال 1793 / 1880

ولد ميشال شال (Michel Chasles) سنة 1793 بمدينة ابيرنان بفرنسا. وبعد ما تفوق في التعليم الثانوي التحق سنة 1812 بالمدرسة المتعددة التقنيات و بعد تخرجه رفض منصبا هاما في الدولة و عاد إلى مسقط رأسه لدراسة تاريخ الرياضيات.

أصدر شال أولى أعماله سنة 1827 و كانت عبارة عن لمحة تاريخية حول الطرائق في الهندسة. عمل سنة 1841 أستاذا بالمدرسة المتعددة التقنيات ثم بجامعة السوربون ابتداء من سنة 1846. نشر بعد ذلك كتابين مهمين في الهندسة و قد اشتهر بالعلاقة التي تحمل اسمه.

توفي ميشال شال سنة 1880 بمدينة باريس.

نشاط أول



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث:

$AB=3$ ، $AD=2$ و $AE=4$.

لتكن I ، J و K نقط الأحرف $[AB]$ ، $[AE]$ و $[AD]$ على الترتيب و التي تحقق: $AI=AJ=AK=1$.

للذهاب مثلا إلى النقطة G انطلاقا من النقطة A يمكننا التنقل بثلاث وحدات طول على الحرف $[AB]$ في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AI}$ ثم بأربع وحدات على الحرف $[BF]$ في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AJ}$ و أخيرا بوحدتين على الحرف $[FG]$ في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AK}$.

قمنا هكذا بتعليم وضعية النقطة G في متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ بثلاثية الأعداد $(3;4;2)$.

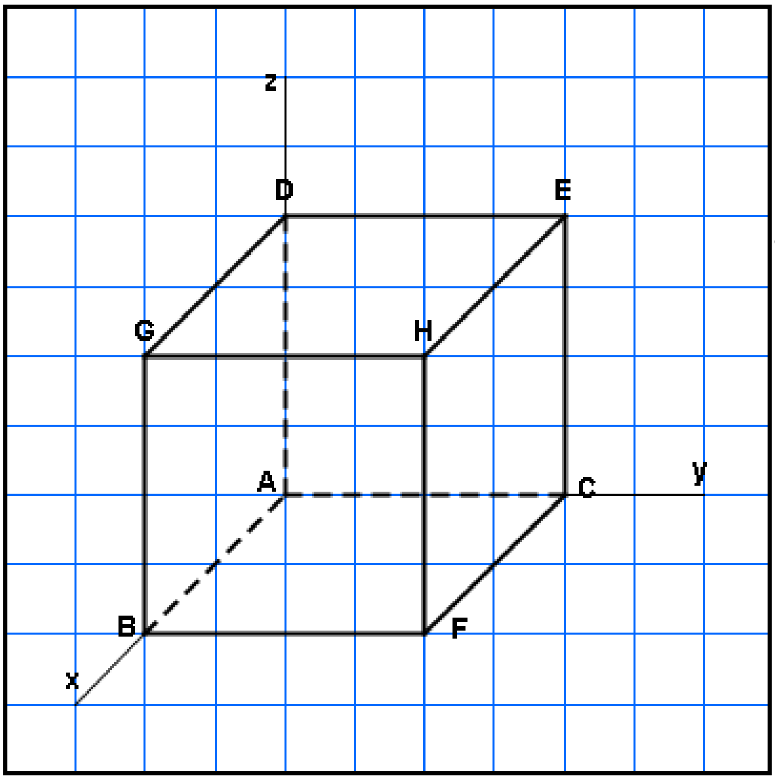
نقول أن: $(3;4;2)$ هي إحداثيات النقطة G في المعلم $(A;I;J;K)$.

1.عين إحداثيات بقية رؤوس متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ في المعلم $(A;I;J;K)$.

2.عين إحداثيات النقط I ، J و K في المعلم $(A;I;J;K)$. ماذا تمثل النقطة A بالنسبة لهذا المعلم ؟

3.عين، في المعلم $(A;I;J;K)$ ، إحداثيات النقطتين L و M حيث L منتصف الحرف $[CG]$ و $\overrightarrow{HM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$.

نشاط ثان



$ABFCDGHE$ مكعب.

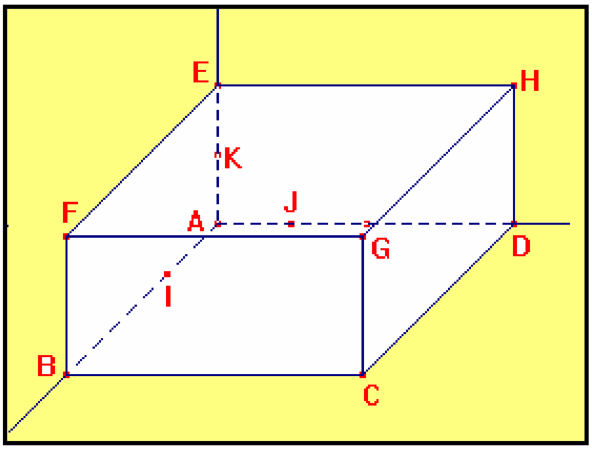
1. عين إحداثيات رؤوس هذا المكعب في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

2. عين الشروط اللازمة و الكافية التي يجب أن تحققها (x,y,z) إحداثيات نقطة M حتى تنتمي إلى:

- المستوي GDE
- المستوي ABC
- المستوي EHF
- المستقيم (AB)
- المستقيم (AC)
- المستقيم (AD)
- المستقيم (HE)

3. عين إحداثيات منتصفات أحرف المكعب $ABFCDGHE$.

نشاط ثالث



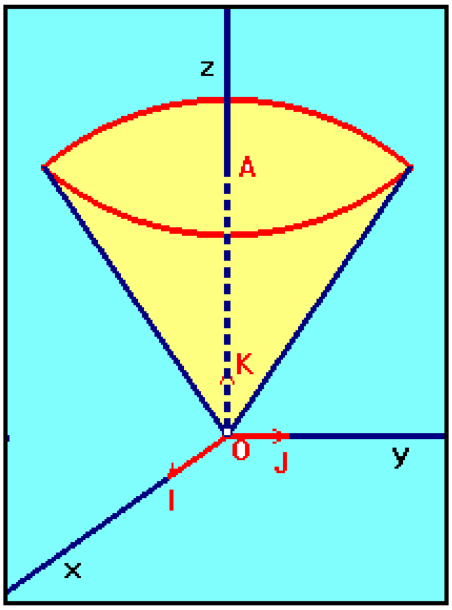
$(A;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث:

$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AK}$.

1. عين إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات.
2. باستعمال مثلثين قائمين و غير متقايسين بين أن: $AG^2=AC^2+AE^2$ و $AG^2=AB^2+AD^2+AE^2$
3. أحسب AG^2 ثم استنتج المسافة AG.
4. إذا رمزنا بـ (x_G,y_G,z_G) إلى إحداثيات النقطة G و بـ (x_A,y_A,z_A) إلى إحداثيات النقطة A أحسب العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{(x_G-x_A)^2+(y_G-y_A)^2+(z_G-z_A)^2}$. ماذا تلاحظ ؟
5. باستعمال طريقتين مختلفتين أحسب المسافة MN حيث M منتصف $[EH]$ و N منتصف $[GH]$

نشاط رابع



$(O;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

ليكن (Γ) المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة O، محوره (Oz) و قاعدته الدائرة التي مركزها النقطة $A(0,0,4)$ و نصف قطرها 3.

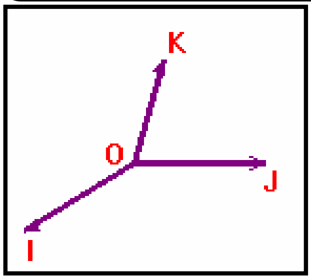
1. لتكن النقطة $C(0,0,c)$ حيث c عنصر من $[0;4]$ و ليكن (P) المستوي الذي يشمل النقطة C و يوازي المستوي (OIJ).
   - حدد طبيعة المجموعة (Σ) تقاطع المستوي (P) و المخروط الدوراني (Γ).
   - عين معادلة (Σ) بدلالة c في المعلم $(C;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
   - بين أن معادلة (Γ) هي $x^2+y^2-\frac{9}{16}z^2=0$ مع $0\le z\le 4$.
2. لتكن النقطة $B(0,b,0)$ حيث b عنصر من $[-3;3]$ و ليكن (Q) المستوي الذي يشمل النقطة B و يوازي المستوي (OIK).
   - عين معادلة المستوي (Q).
   - عين في المعلم $(B;\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OI})$ معادلة لـ (Σ') تقاطع المستوي (Q) و المخروط الدوراني (Γ).
   - بين أنه يمكن كتابة معادلة (Σ') على الشكل: $x=\frac{4}{3}\sqrt{z^2-\frac{16}{9}b^2}$ حيث $0\le z\le 4$.
   - مثل على شاشة آلة حاسبة بيانية المجموعة (Σ') من أجل $b=1$.

التعليم في الفضاء

1. المعلم الديكارتي

تعريف: نسمي معلما للفضاء مبدؤه النقطة O كل رباعية نقط $(O;I,J,K)$ ليست من نفس المستوي.

إذا وضعنا: $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ نرمز إلى المعلم السابق بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



ملاحظات:

- تشكل النقط O، I، J و K رباعي وجوه.
- الأشعة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ليست من نفس المستوي.
- يسمى المستقيم (OI) محور الفواصل و المستقيم (OJ) محور التراتيب

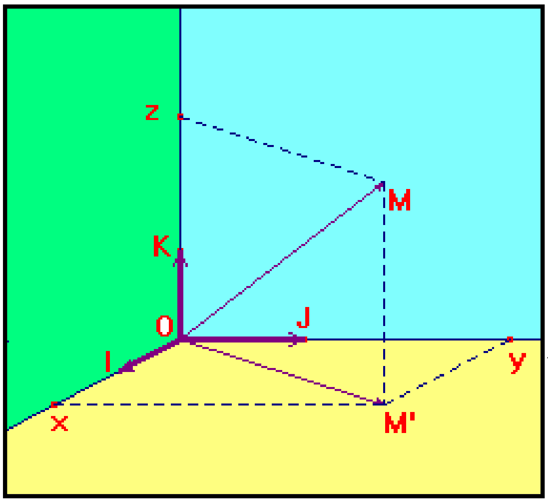
بينما يسمى المستقيم (OK) محور الرواقم.

- إذا كانت المستقيمات (OI)، (OJ) و (OK) متعامدة مثنى مثنى نقول أن المعلم $(O;I,J,K)$ متعامد.
- إذا كان $(O;I,J,K)$ معلما متعامدا و كان $OI=OJ=OK=1$ نقول أن $(O;I,J,K)$ متعامد و متجانس.
- نرمز إلى المستوي (OIJ) بـ $P(O;\vec{i},\vec{j})$ و إلى المستوي (OJK) بـ $P(O;\vec{j},\vec{k})$، ...

2. إحداثيات نقطة

مبرهنة: إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء و كانت M نقطة من الفضاء فإنه توجد ثلاثية أعداد حقيقية وحيدة (x,y,z) بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

برهان: نضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$



النقط O، I، J و K ليست من نفس المستوي و منه المستوي (OIJ) لا يوازي المستقيم الذي يمر من M و حيث $\vec{k}$ شعاع توجيه له فهما إذن متقاطعان ولتكن M' نقطة تقاطعهما.

النقطة M' تنتمي إلى $(O;\vec{i},\vec{j})$ و منه يوجد عددان حقيقيان x و y وحيدين بحيث: $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

الشعاعان $\overrightarrow{M'M}$ و $\vec{k}$ مرتبطان خطيا و منه يوجد عدد حقيقي وحيد z بحيث: $\overrightarrow{M'M}=z\vec{k}$. لدينا حسب علاقة شال:

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$ ومنه: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

3. إحداثيات شعاع

تعريف: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. $\vec{u}$ شعاع و لتكن M النقطة الوحيدة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

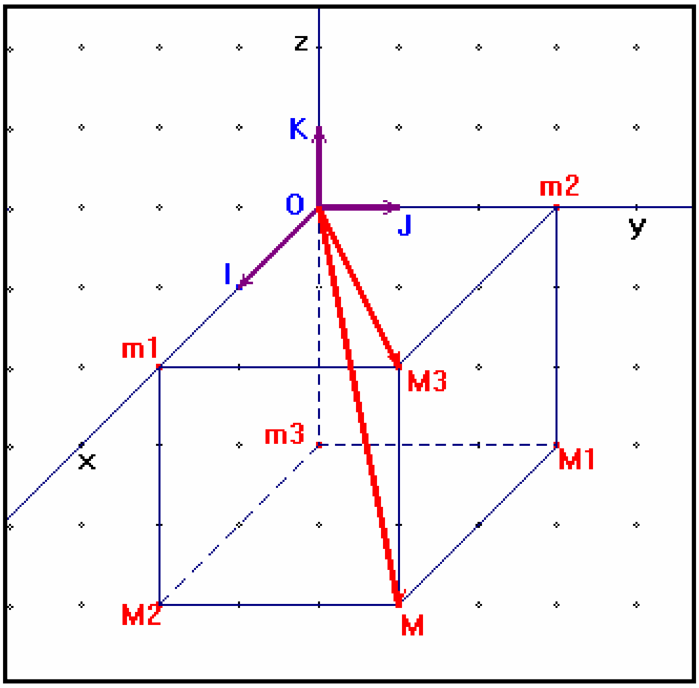
إحداثيات الشعاع $\vec{u}$ هي (x,y,z) إحداثيات النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ويمكن أن نكتب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

و هكذا كل شعاع $\vec{u}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

تمرين محلول 1

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد للفضاء حيث: $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$.

علم النقطة M ذات الإحداثيات $(2,3,-3)$.



طريقة:

لتعليم نقطة M علمت إحداثياتها (x,y,z)

في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

يمكننا تعليم النقط m_1، m_2، m_3، M_1، M_2

و M_3 ثم رسم متوازي المستطيلات

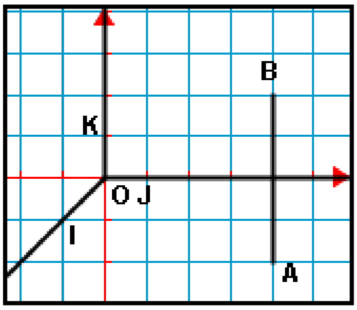
$m_1 0 m_2 M_3 M_2 m_3 M_1 M$

حيث:

$m_1(x,0,0)$، $m_2(0,y,0)$، $m_3(0,0,z)$

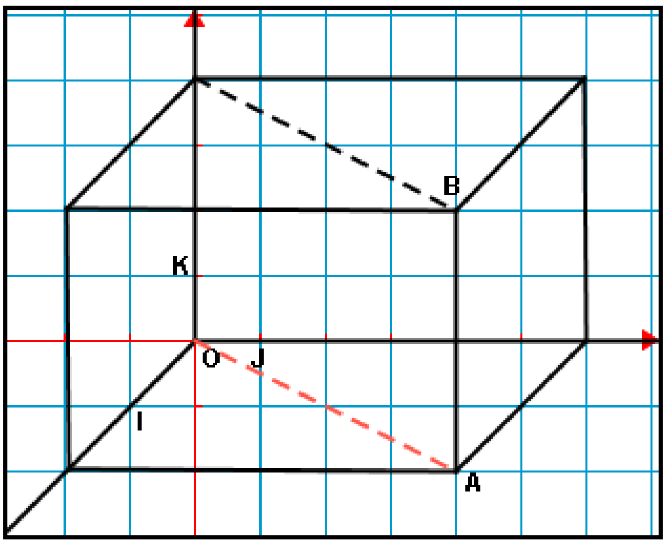
$M_1(0,y,z)$، $M_2(x,0,z)$، $M_3(x,y,0)$

تمرين محلول 2



$(O;I,J,K)$ معلم للفضاء.

بعد إعادة رسم الشكل المقابل، عين بيانيا إحداثيات النقطتين A و B علما أن النقطة A تنتمي إلى المستوي (OIJ) و أن المستقيمين (AB) و (OK) متوازيان.



إحداثيات النقطة A هي $(2,6,0)$

إحداثيات النقطة B هي $(2,6,4)$

الحساب على الإحداثيات

1. خواص الإحداثيات

يتم تمديد كل النتائج الخاصة بالإحداثيات في المستوي إلى الفضاء.

نتائج: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

1. إذا كان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ شعاعين من الفضاء و كان α عددا حقيقيا فإن:
   1. $\vec{u}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=0$
   2. $\vec{u}=\vec{v}$ يعني $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$
   3. إحداثيات $(\vec{u}+\vec{v})$ هي $(x+x',y+y',z+z')$ و إحداثيات $\alpha\vec{u}$ هي $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$
2. إذا كانت $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ نقطتين من الفضاء فإن:
   1. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$
   2. إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

2. الأشعة من نفس المستوي

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. $\vec{u}(a,b,c)$، $\vec{v}(a',b',c')$ و $\vec{w}(a'',b'',c'')$ ثلاثة أشعة من الفضاء.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y بحيث $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

و هذا يعني أن الجملة $\begin{cases} ax+a'y=a'' \\ bx+b'y=b'' \\ cx+c'y=c'' \end{cases}$ تقبل حلا (x,y) في $\mathbb{R}^2$.

3. معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه له.

$M(x,y,z)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ أي $x-x_A=\alpha a$ و $y-y_A=\alpha b$ و $z-z_A=\alpha c$

و هذا يعني إذا كان $abc\neq 0$ أن $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ أي أن مثلا: $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ c(x-x_A)-a(z-z_A)=0 \end{cases}$

أما إذا كان أحد الأعداد a، b أو c معدوما فإن مثلا في حالة $c=0$: $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ z=z_A \end{cases}$

أما إذا انعدم عددان من الأعداد a، b و c فإن مثلا في حالة $a=b=0$: $\begin{cases} x=x_A \\ y=y_A \end{cases}$ و يبقى z كيفي.

حالات خاصة: نرمز إلى محور الفواصل بـ (Ox)، إلى محور التراتيب بـ (Oy) وإلى محور الرواقم بـ (Oz) الجدول التالي يحدد الشروط الكافية و اللازمة التي يجب أن تحققها (x,y,z) إحداثيات نقطة M لكي تنتمي إلى المحور المعني:

المحور	(Ox)	(Oy)	(Oz)
مميزاته	$y=z=0$	$z=x=0$	$x=y=0$

تمرين محلول3

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء. نعتبر النقط $A\left(2,1,-3\right)$، $B\left(2,5,1\right)$، $C\left(4,0,-2\right)$ و $H\left(5,-\frac{15}{2},-\frac{17}{2}\right)$.

1. عين إحداثيات النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

2. بين أن النقط I، D و H في استقامية علما أن النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

حـــل:

1. القول أن $ABCD$ متوازي أضلاع يعني (مثلا) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $\left(2,-5,-3\right)$

إذا فرضنا أن إحداثيات النقطة D هي $\left(x,y,z\right)$ فإن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هي $\left(x-2,y-1,z+3\right)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ يعني $x-2=2$ و $y-1=-5$ و $z+3=-3$ أي $x=4$ و $y=-4$ و $z=-6$

إحداثيات النقطة D هي إذن $\left(4,-4,-6\right)$

2. إحداثيات النقطة I هي $\left(2,3,-1\right)$، إحداثيات $\overrightarrow{IH}$ هي $\left(3,-\frac{21}{2},-\frac{15}{2}\right)$ و إحداثيات $\overrightarrow{ID}$ هي $\left(2,-7,-5\right)$.

لدينا: $\overrightarrow{IH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{ID}$ و منه النقط I، D و H في استقامية.

تمرين محلول 4

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء. نعتبر النقط $A\left(1,-2,2\right)$، $B\left(2,-1,\frac{3}{2}\right)$ و $C\left(-1,-4,3\right)$.

1. عين معادلات للمستقيم $\left(AC\right)$.

2. هل تنتمي النقط O، A، B و C إلى نفس المستوي ؟

حـــل:

1. من الواضح أن الشعاع $\overrightarrow{AC}\left(-2,-2,1\right)$ شعاع توجيه للمستقيم $\left(AC\right)$.

القول أن النقطة $M\left(x,y,z\right)$ تنتمي إلى المستقيم $\left(AC\right)$ يعني وجود عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AC}$

أي أن $x-1=-2\alpha$ و $y+2=-2\alpha$ و $z-2=\alpha$ أي $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-2}=z-2$

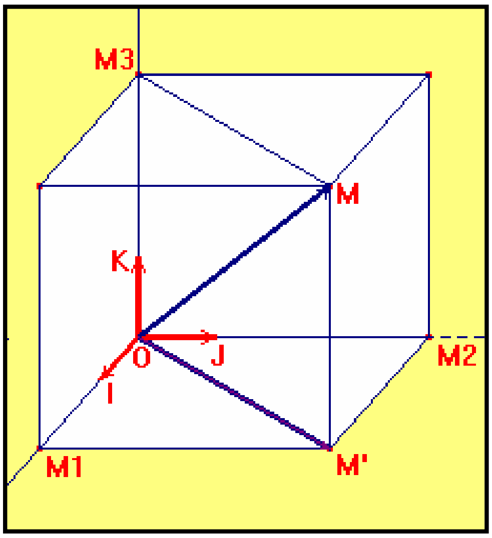
لينا مثلا: $\begin{cases}x-y-3=0\\x+2z-5=0\end{cases}$ معادلات للمستقيم $\left(AC\right)$.

2. القول أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن الأشعة $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ من نفس المستوي.

هل يوجد إذن عددان حقيقيان x و y يحققان مثلا: $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ ؟ أي: $\begin{cases}x+2y=-1\\-2x-y=-4\\2x+\frac{3}{2}y=3\end{cases}$

نجد بعد حل الجملة: $x=3$ و $y=-2$. نستنتج أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي.

المسافة بين نقطتين



1. العبارة التحليلية لطويلة شعاع

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. نعتبر الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ و لتكن M النقطة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. نعلم أن $\|\vec{u}\|=OM$.

نعتبر M_1، M_2، M_3 و M' النقط المعرفة كما يلي:

$\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$، $\overrightarrow{OM_2}=y\vec{j}$، $\overrightarrow{OM_3}=z\vec{k}$ و $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OMM' نحصل على:

$OM^2=OM'^2+MM'^2$ و بما أن $MM'^2=OM_3^2$ فإن:

$$OM^2=OM'^2+OM_3^2$$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OM_1M' نحصل على: $OM'^2=OM_1^2+M_1M'^2$ و بما أن: $M_1M'^2=OM_2^2$ فإن: $OM'^2=OM_1^2+OM_2^2$ نجد هكذا أن: $OM^2=OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2$ و منه: $OM^2=x^2+y^2+z^2$ أي $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب طويلة الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ بــ: $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مثال: طويلة الشعاع $\vec{u}(-2,1,3)$ هي $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}$ و منه $\|\vec{u}\|=\sqrt{14}$.

2. المسافة بين نقطتين

علما أن $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$ و بتطبيق المبرهنة السابقة على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب المسافة بين النقطتين $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ بــ:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

مثال: المسافة بين النقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(0,-2,3)$ هي $AB=\sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$

ملاحظة: عند إجراء الحسابات غالبا ما يفضل مربع المسافة على المسافة.

3. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. α عدد حقيقي موجب تماما. (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α. لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من الفضاء.

$M\in(S)$ يعني $OM=\alpha$ أي $OM^2=\alpha^2$ و هذا يعني $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

إذن $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ هي معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها O و نصف قطرها α.

تمرين محلول 5

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(8,5,2\right)$، $B\left(4,8,2\right)$ و $C\left(5,1,2\right)$.

1. احسب المسافات AB، AC و BC.
2. بين أن المثلث ABC قائم و متقايس الساقين.

حـــل:

1. لدينا: $AB=\sqrt{\left(4-8\right)^2+\left(8-5\right)^2+\left(2-2\right)^2}$ و منه $AB=5$

بإتباع نفس الطريقة نجد: $AC=5$ و $BC=\sqrt{50}$

2. لدينا من جهة: $AB=AC$ و منه المثلث ABC متقايس الساقين.

لدينا من جهة ثانية: $AC^2+AB^2=BC^2$ $\left(5^2+5^2=\left(\sqrt{50}\right)^2\right)$ و منه المثلث ABC قائم في النقطة A.

نستنتج مما سبق أن المثلث ABC قائم في النقطة A و متساوي الساقين.

تمرين محلول 6

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.نعتبر النقط $A\left(3,-2,2\sqrt{3}\right)$، $B\left(4,3,0\right)$ و $C\left(1,5,2\right)$.

1. عين معادلة لسطح الكرة $\left(S\right)$ التي مركزها النقطة O و تشمل النقطة A.
2. هل تنتمي النقطتان B و C إلى سطح الكرة $\left(S\right)$ ؟
3. عين إحداثيات نقط تقاطع سطح الكرة $\left(S\right)$ مع محور الرواقم $\left(Oz\right)$.

حـــل:

1. من الواضح أن نصف قطر سطح الكرة $\left(S\right)$ هي المسافة OA و لدينا: $OA=5$.

سطح الكرة $\left(S\right)$ هي مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ التي تحقق $OM=OA$ أي $OM^2=OA^2$

و منه معادلة سطح الكرة $\left(S\right)$ هي: $x^2+y^2+z^2=25$

2. بما أن: $OB^2=4^2+3^2+0=25$ فإن النقطة B تنتمي إلى سطح الكرة $\left(S\right)$.

لدينا: $1^2+5^2+2^2=30$ و $30\neq 25$. و بما أن إحداثيات النقط C لا تحقق معادلة سطح الكرة $\left(S\right)$ نستنتج أن النقطة C لا تنتمي إلى سطح الكرة $\left(S\right)$.

3. نعلم أن معادلة المحور $\left(Oz\right)$ هي: $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

و بالتالي القول أن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة مشتركة بين $\left(S\right)$ و $\left(Oz\right)$ يعني: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=0\\y=0\end{cases}$

تقبل هذه الجملة حلين هما $\left(0,0,5\right)$ و $\left(0,0,-5\right)$.

و هكذا يتقاطع سطح الكرة $\left(S\right)$ مع محور الرواقم $\left(Oz\right)$ في النقطتين $E\left(0,0,5\right)$ و $F\left(0,0,-5\right)$.

أعمال موجهة

معادلات المستويات الموازية لأحد مستويات الإحداثيات

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم ديكارتي للفضاء.

يدل $P(O;\vec{i},\vec{j})$ على مستوي الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ و يدل $P(O;\vec{j},\vec{k})$ على مستوي الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{j},\vec{k})$ بينما يدل $P(O;\vec{k},\vec{i})$ على مستوي الإحداثيات المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{k},\vec{i})$.

1. معادلات مستويات الإحداثيات

❖ **معادلة مستوي الإحداثيات** $P(O;\vec{i},\vec{j})$

- بين أنه إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من $P(O;\vec{i},\vec{j})$ فإن $z=0$.
- عكسيا بين أن كل نقطة $M(x,y,z)$ حيث $z=0$ هي نقطة من $P(O;\vec{i},\vec{j})$.

نقول أن $z=0$ هي معادلة $P(O;\vec{i},\vec{j})$

❖ **أنقل ثم أكمل الجدول التالي**

المستوي	$P(O;\vec{i},\vec{j})$	$P(O;\vec{j},\vec{k})$	$P(O;\vec{k},\vec{i})$
معادلته	$z=0$		

2. معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

❖ **معادلة المستوي الموازي لـ** $P(O;\vec{i},\vec{j})$

a عدد حقيقي معطى، (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $z=a$ و A النقطة ذات الإحداثيات $(0,0,a)$.

- إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من (Γ) عين إحداثيات $\overrightarrow{AM}$ ثم بين أن M تنتمي إلى $P(A;\vec{i},\vec{j})$.
- إذا كانت M نقطة من $P(A;\vec{i},\vec{j})$، بين باستعمال العلاقة $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$، أن M تنتمي إلى (Γ).

نستنتج مما سبق أن $(\Gamma)=P(A;\vec{i},\vec{j})$

- تحقق أن المستويين (Γ) و $P(O;\vec{i},\vec{j})$ متوازيان.

الخلاصة: مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $z=a$ هي المستوي الذي يشمل النقطة $A(0,0,a)$ و يوازي مستوي الإحداثيات $P(O;\vec{i},\vec{j})$. نقول أن $z=a$ هي معادلة له.

3. تطبيقات

❖ عين معادلة للمستوي (P_1) الموازي لـِ $P(O;\vec{i},\vec{j})$ و الذي يشمل النقطة $A(1,0,-3)$.

❖ عين معادلة للمستوي (P_2) الموازي لـِ $P(O;\vec{j},\vec{k})$ و الذي يشمل النقطة $B(2,2,-1)$.

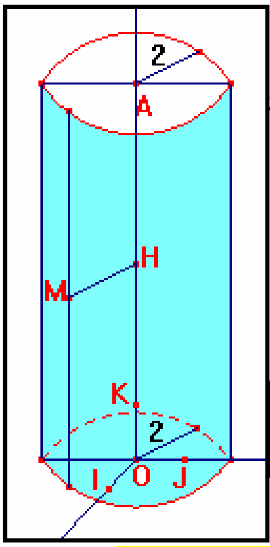
❖ عين معادلة للمستوي (P_3) الموازي لـِ $P(O;\vec{k},\vec{i})$ و الذي يشمل النقطة $C(0,3,0)$.

❖ حدد مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $y=3$ (x و z كيفيان).

أعمال موجهة

معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الإحداثيات

1. **دراسة مثال:** $(O;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. لتكن (C) الأسطوانة التي محورها (Oz) و قاعدتاهاالدائرتان اللتان نصف قطراهما 2 و مركزاهما O و $A(0,0,5)$.



•لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (C) و لتكن النقطة H مسقطها العمودي على (Oz). بعد تعيين إحداثيات H بين أن إحداثيات M تحقق: $x^2+y^2=4$ مع $0\le z\le 5$.

•عكسيا لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء تحقق: $x^2+y^2=4$ مع $0\le z\le 5$. بين أن: $MH=2$ ثم استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الأسطوانة (C).

الخلاصة: معادلة الأسطوانة (C) هي إذن: $x^2+y^2=4$ مع $0\le z\le 5$.

الحالة العامة: معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها (Oz) ونصف قطر الدائرة، مقطعها بمستو عمودي عل المحور (Oz)، R هي: $x^2+y^2=R^2$ مع z كيفي.

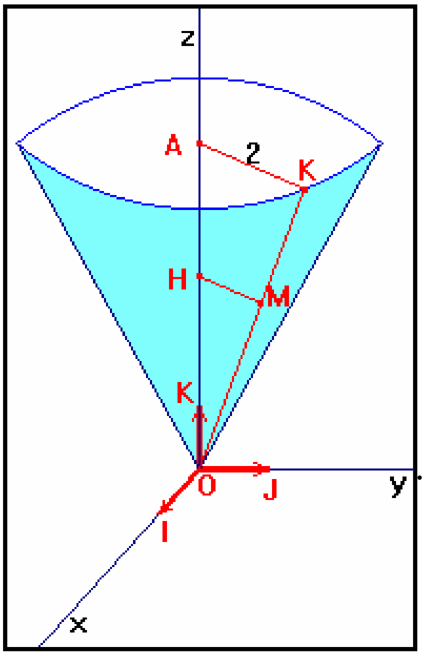
ملاحظة: مقطع أسطوانة دورانية محورها (Oz) بمستو معادلته $z=a$ هي دائرة معادلتها: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=a \end{cases}$

تطبيقات: • عين معادلة الأسطوانة الدورانية التي محورها (Oy) و نصف قطر مقطعها بالمستوي ذو المعادلة $y=0$ هو $\sqrt{3}$.

•ما هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $z^2+y^2=25$ مع $-2\le x\le 3$.

معادلة سطح المخروط الدوراني الذي محوره أحد محاور الإحداثيات ورأسه O

1. **دراسة مثال:** $(O;I,J,K)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. ليكن (C) المخروط الذي محوره (Oz)، رأسه O و قاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,0,4)$ ونصف قطرها 2.



• لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (C) $(M\neq O)$ و لتكن H مسقطها العمودي على (Oz). بين أن $HM^2=\frac{1}{4}OH^2$ ثم استنتج أن إحداثيات M تحقق: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=0$ مع $0<z\le 4$. ماذا يمثل $\frac{1}{4}$ بالنسبة للزاوية $\widehat{AOK}$ ؟

•عكسيا لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء تحقق: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=0$ مع $0\le z\le 4$. بين أن M تنتمي إلى المخروط (C).

الخلاصة: معادلة المخروط (C) هي إذن: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=0$ مع $0\le z\le 4$.

الحالة العامة: معادلة المخروط الذي محوره (Oz)، رأسه O و قيس نصف زاويته رأسه α هي: $x^2+y^2-\tan^2\alpha\times z^2=0$

تطبيق: عين معادلة المخروط الدوراني الذي محوره (Oy)، رأسه O، ارتفاعه 5 و نصف قطر قاعدته 3.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين $A\left(3,0,-3\right)$ و $B\left(2,0,-2\right)$.

1. عين إحداثيات النقطة G بحيث $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقطتين A و B ؟

2. نرفق بكل نقطة $M\left(x,y,z\right)$ العدد الحقيقي $f\left(M\right)$ المعرف بـِ: $f\left(M\right)=-2MA^2+3MB^2$

و لتكن $\left(\Gamma_k\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $f\left(M\right)=k$ حيث k عدد حقيقي.

- عبر عن $f\left(M\right)$ بدلالة x، y و z ثم عين المجموعتين $\left(\Gamma_4\right)$ و $\left(\Gamma_{-12}\right)$.
- ناقش حسب قيم k طبيعة المجموعة $\left(\Gamma_k\right)$.

1. يمكن إتباع عدة طرق. نقترح فيما يلي الطريقة التالية: نفرض أن إحداثيات G هي $\left(x,y,z\right)$.

إحداثيات الشعاع $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$ هي إذن $\left(-x,-y,-z\right)$ و منه $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=o$

إذن: $G\left(0,0,0\right)$ النقطة G هي إذن النقطة O مبدأ المعلم.

النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\left\{\left(A;-2\right),\left(B;3\right)\right\}$.

2. • لدينا: $MA^2=\left(x-3\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z+3\right)^2$ و $MB^2=\left(x-2\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z+2\right)^2$

و منه: $MA^2=x^2+y^2+z^2-6x+6z+18$ و $MB^2=x^2+y^2+z^2-4x+4z+8$

نجد هكذا: $f\left(M\right)=x^2+y^2+z^2-12$

$\left(\Gamma_4\right)$ هي مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ من الفضاء التي تحقق: $f\left(M\right)=4$ أي: $x^2+y^2+z^2-12=4$

و هذا يعني أن: $x^2+y^2+z^2=16$ و هي معادلة سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 4.

$\left(\Gamma_{-12}\right)$ هي مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ من الفضاء التي تحقق: $f\left(M\right)=-12$ أي: $x^2+y^2+z^2-12=-12$

و هذا يعني أن: $x^2+y^2+z^2=0$ أي $x=y=z=o$ ومنه $\left(\Gamma_{-12}\right)=\left\{O\right\}$

• $f\left(M\right)=k$ يعني $x^2+y^2+z^2-12=k$ أي $x^2+y^2+z^2=k+12$

بما أن $x^2+y^2+z^2\geq 0$ نقوم بدراسة إشارة $\left(k+12\right)$

k	$-\infty$	-12	$+\infty$
إشارة $k+12$	$-$	0	$+$

نميز إذن ثلاث حالات:

الحالة1: $k<-12$

المجموعة $\left(\Gamma_k\right)$ هي مجموعة خالية.

الحالة2: $k=-12$

المجموعة $\left(\Gamma_k\right)$ هي المجموعة $\left\{O\right\}$.

الحالة3: $k>-12$

المجموعة $\left(\Gamma_k\right)$ هي سطح الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها $\sqrt{k+12}$

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $E\left(0,0,-1\right)$، $A\left(0,0,2\right)$، $B\left(0,0,-4\right)$، $C\left(\sqrt{5},0,1\right)$ و $D\left(\sqrt{5},0,-3\right)$. ليكن $\left(S\right)$ سطح الكرة التي مركزها E ونصف قطرها 3.

1. هل تنتمي النقط A، B، C و D إلى نفس المستوي ؟

2. ما هي معادلة $\left(S\right)$ ؟ تحقق أن A، B، C و D تنتمي إلى $\left(S\right)$.عين نقط تقاطع $\left(S\right)$ مع محاور الإحداثيات.

3. أدرس حسب قيم العدد الحقيقي a الأوضاع النسبية للسطح $\left(S\right)$ و المستوي $\left(P_a\right)$ ذو المعادلة $z=a$.

4. عين مركز و نصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة $\left(S\right)$ بالمستوي $\left(P_{-2}\right)$.

1. تنتمي النقط A، B، C و D إلى نفس المستوي إذا و فقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (مثلا) من نفس المستوي. لدينا $\overrightarrow{AB}\left(0,0,-6\right)$، $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{5},0,-1\right)$ و $\overrightarrow{AD}\left(\sqrt{5},0,-5\right)$.

هل يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث: $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ ؟

$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ يعني $\begin{cases}x\sqrt{5}+y\sqrt{5}=0\\-x-5y=-6\end{cases}$. نجد بعد حل الجملة السابقة: $x=-\dfrac{3}{2}$ و $y=\dfrac{3}{2}$.

نستنتج أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

2. معادلة $\left(S\right)$ هي: $x^2+y^2+\left(z+1\right)^2=9$

لدينا(مثلا): $EA^2=EB^2=EC^2=ED^2=9$ و منه النقط A، B، C و D تنتمي إلى $\left(S\right)$.

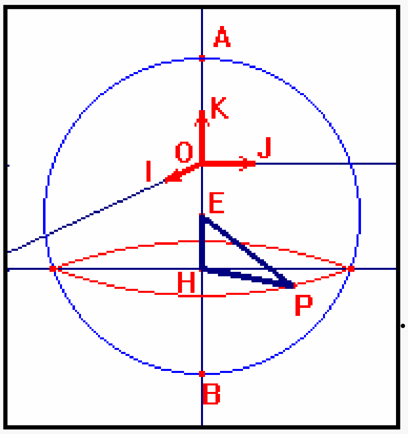
تكون $M\left(x,y,z\right)$ نقطة مشتركة بين $\left(S\right)$ و المحور $\left(Ox\right)$ يعني $\begin{cases}x^2+y^2+\left(z+1\right)^2=9\\y=z=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x^2=8\\y=z=0\end{cases}$

نجد بعد حل هذه الجملة نقطتين مشتركتين إحداثياتهما $\left(2\sqrt{2},0,0\right)$ و $\left(-2\sqrt{2},0,0\right)$.

يتقاطع السطح $\left(S\right)$ مع $\left(Oy\right)$ في النقطتين $\left(0,2\sqrt{2},0\right)$ و $\left(0,-2\sqrt{2},0\right)$ و يتقاطع مع $\left(Oz\right)$ في النقطتين A و B.

3. نلاحظ أن المستوي $\left(P_a\right)$ يوازي مستوي الإحداثيات $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نميز إذن ثلاث حالات:

- إذا كان $a\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ يكون السطح $\left(S\right)$ و المستوي $\left(P_a\right)$ منفصلين.
- إذا كان $a\in\left\{-4;2\right\}$ يكون المستوي $\left(P_a\right)$ مماسا للسطح $\left(S\right)$ في النقطتين A و B.
- إذا كان $a\in\left]-4;2\right[$ فإن المستوي $\left(P_a\right)$ يقطع سطح الكرة $\left(P_a\right)$ وفق دائرة مركزها ينتمي إلى المحور $\left(Oz\right)$.



4. $\left(-2\right)$ ينتمي إلى $\left]-4;2\right[$ و منه المستوي $\left(P_{-2}\right)$ يقطع سطح الكرة $\left(S\right)$ و ذلك وفق دائرة نرمز إلى مركزها بـ H.

بما أن النقطة تنتمي إلى كل من المحور $\left(Oz\right)$ و المستوي $\left(P_{-2}\right)$: $z=-2$ فإن إحداثيات النقطة H هي $\left(0,0,-2\right)$.

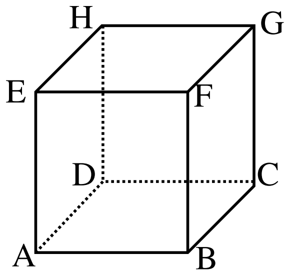
النقطة P تنتمي إلى السطح $\left(S\right)$ و منه $EP=3$. بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث EHP يكون لدينا: $EP^2=EH^2+HP^2$. نجد بعد الحساب $HP=2\sqrt{2}$.

مقطع $\left(S\right)$ بالمستوي $\left(P_{-2}\right)$ هي الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $2\sqrt{2}$

أشعة الفضاء

أصحيح أم خطأ

أجب بصحيح أم خطأ عن أسئلة التمارين من 1 إلى 7 وفي كل منها نعتبر نفس المكعب $ABCDEFGH$.



1 أ) $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE}$ هي أشعة من نفس المستوي.

ب) $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{EF}$ هي أشعة متساوية .

ج) $\overrightarrow{AH}$ ، $\overrightarrow{HC}$ ، $\overrightarrow{EH}$ هي أشعة من نفس المستوي.

2 أ) $\overrightarrow{AH}$ ، $\overrightarrow{BG}$ ، $\overrightarrow{HG}$ هي أشعة متوازية .

ب) $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{CD}$ هي أشعة متوازية .

ج) $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{HG}$ هي أشعة متوازية .

3 أ) المستقيمان (EG) و (CA) متوازيان .

ب) المستقيمان (HF) و (AC) متوازيان .

ج) المستقيمان (AB) و (HD) متوازيان .

4 أ) المستقيم (HD) عمودي على المستوي (BCF)

ب) المستقيم (HD) عمودي على المستوي (ABC)

ج) المستقيم (HD) عمودي على المستوي (HCG).

5 أ) المستقيمات (HF) ، (BD) ، (EA) هي من نفس المستوي .

ب) المستقيم (AE) يوازي المستوي $(BDHF)$.

ج) المستقيم (BH) يقطع المستقيم (AE) .

6 في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;3;2)$ ؛ $B(-1;2;1)$ ؛ $C(-3;1;0)$ ؛ $D(3;3;2)$.

أ) المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان .

ب) الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان .

ج) المستقيم (AB) يوازي المستقيم (CD) .

7 مجموعة النقط M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\|$ هي المستقيم (BD) .

أسئلة متعددة الاختيارات

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة في التمارين من 8 إلى 14 ، وفي كل منها نعتبر نفس المكعب $ABCDEFGH$.

8 الشعاع $\overrightarrow{BH}$ هو المجموع :

أ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$.

ب) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BG}$.

ج) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BG}$.

9 I و J منتصفا $[AB]$ و $[DC]$ على الترتيب . النقط التالية هي من نفس المستوي .

أ) B ، C ، G ، H .

ب) I ، E ، J ، H .

ج) F ، G ، H ، I .

10 الأشعة التالية هي من نفس المستوي .

أ) $\overrightarrow{BG}$ ، $\overrightarrow{FH}$ و $\overrightarrow{FG}$.

ب) $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$.

ج) $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{GC}$.

11 الشعاعان التاليان متساويان :

أ) $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BH}$.

ب) $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DH}$.

ج) $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{HF}$.

12 المستقيم (HD) عمودي على المستقيم :

أ) (FB)

ب) (AC)

ج) (HC)

13 في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;1;3)$ ؛ $B(-3;1;5)$ ؛ $C(1;3;2)$.

يكون الشعاع $\vec{u}(4\,;2;-3)$ مساويا للشعاع :

أ) $\overrightarrow{AB}$ ب) $\overrightarrow{BC}$ ج) $\overrightarrow{AC}$

14 في المعلم $(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DH})$ للمستوي (EFG) معادلة من الشكل :

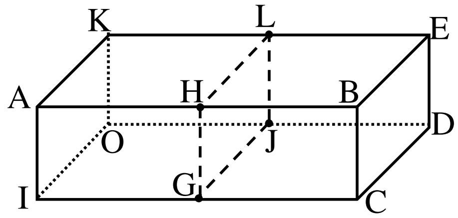
أ) $x=1$. ب) $y=1$. ج) $z=1$.

تمارين تطبيقية

الأشعة المتساوية

بالنسبة للتمرينين 15 و 16 ، نعتبر النقط O ، I ، J ، K حيث K هي خارج المستوي (OIJ) .

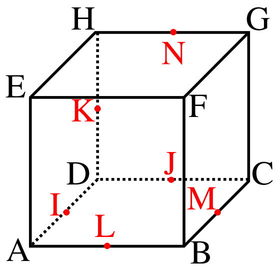
ننشئ متوازي المستطيلات $ICDOABEK$ و H ، G ، J ، L هي منتصفات $[AB]$ ، $[IC]$ ، $[OD]$ و $[KE]$ على الترتيب .



15 عين الأشعة التي تساوي $\overrightarrow{IK}$ ، $\overrightarrow{LA}$ ، $\overrightarrow{ID}$ ، $\overrightarrow{LB}$.

16 عين الأشعة التي تساوي $\overrightarrow{IL}$ ، $\overrightarrow{LC}$ ، $\overrightarrow{HD}$.

17 ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و I ، L ، M ، J ، K ، N هي منتصفات $[AD]$ ، $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[DC]$ ، $[DH]$ ، $[HG]$ على الترتيب .



عين الأشعة التي تساوي $\overrightarrow{MD}$ ، $\overrightarrow{LN}$.

18 نعتبر نفس المكعب السابق ، عين الأشعة التي تساوي $\overrightarrow{LC}$ ، $\overrightarrow{IL}$.

مجموع الأشعة

19 ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و L ، M ، J ، I ، K ، P ، R ، Q هي منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[DC]$ ، $[AD]$ ، $[EF]$ ، $[FG]$ ، $[GH]$ و $[EH]$ على الترتيب . O هو مركز الوجه $ABCD$ ، و O' هو مركز الوجه $EFGH$.

عين الأشعة المعرفة بالمجاميع الشعاعية التالية :

أ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. ب) $\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BF}$.

ج) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. د) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

20 نعتبر نفس المكعب السابق ، عين الأشعة المعرفة بالمجاميع الشعاعية التالية :

أ) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LO}$.

ب) $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LF}+\overrightarrow{FE}$.

ج) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}$.

بالنسبة للتمارين 21 ، 22 ، 23 ، لتكن O ، I ، J ، K أربع نقط متمايزة حيث K تقع خارج المستوي (OIJ) .

21 أنشئ شعاعا مبدؤه O ممثّلا للشعاع المعرف بالحالات المقترحة التالية :

أ) $2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$.

ب) $2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OK}$.

ج) $\frac{5}{2}\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$.

22 أنشئ شعاعا مبدؤه O ممثّلا للشعاع المعرف بالحالات المقترحة التالية :

أ) $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$.

ب) $\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$.

ج) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$.

23 أنشئ شعاعا مبدؤه O ممثّلا للشعاع المعرف بالحالات المقترحة التالية :

أ) $\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}$.

ب) $\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$.

ج) $2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OK}$.

24 ليكن $ABCD$ رباعي وجوه عين الأشعة المعرفة بالمجاميع الشعاعية التالية :

أ) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

ب) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

ج) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

بالنسبة للتمرينين 25 ، 26 ، نعتبر $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O ، و S نقطة خارج المستوي (ABC) .

25 عين الشعاع المعرف بالمجاميع الشعاعية التالية :

أ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. ب) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SD}$.

ج) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

تمارين تطبيقية

26 عين الشعاع المعرف بالمجاميع الشعاعية التالية :

أ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$. ب) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{AB}$.

ج) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BS}$.

27 ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ، أنشئ ممثلاً مبدأه B لكل من الأشعة المعرفة بـــ :

أ) $2\overrightarrow{BC}$. ب) $\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

ج) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

28 ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ، عين الشعاع المعرفة بالمجاميع المقترحة التالية :

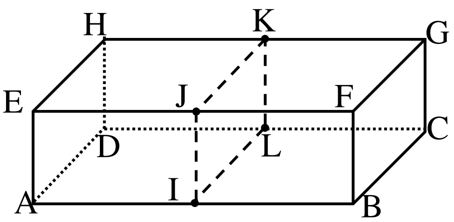
أ) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$.

ب) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}$.

ج) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.

أشعة من نفس المستوي

29 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات و I ، J ، K ، L هي منتصفات $[AB]$ ، $[EF]$ ، $[HG]$ و $[DC]$ على الترتيب .



في كل حالة من الحالات المقترحة التالية ، هل الأشعة هي من نفس المستوي ؟

أ) $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DI}$.

ب) $\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{KL}$.

ج) $\overrightarrow{DI}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{HK}$.

30 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و S نقطة خارج المستوي (ABC) . في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، هل الأشعة هي من نفس المستوي ؟

أ) $\overrightarrow{SA}$ ، $\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SD}$.

ب) $\overrightarrow{SA}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{SC}$.

ج) $\overrightarrow{SA}$ ، $\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{CD}$.

31 ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا .

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، هل الأشعة هي من نفس المستوي ؟

أ) $\overrightarrow{FE}$ ، $\overrightarrow{FG}$ ، $\overrightarrow{BF}$.

ب) $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{FD}$ ، $\overrightarrow{CG}$.

ج) $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{EG}$.

32 ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ، ولتكن النقطة E بحيث $\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{BD}$.

برهن أن الأشعة $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ هي من نفس المستوي.

بالنسبة للتمارين 33 ، 34 ، 35 ، المطلوب البرهان أن الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ هي من نفس المستوي .

33 أ) $\vec{u}=2\vec{v}+3\vec{w}$.

ب) $\vec{u}-3\vec{v}=\vec{0}$ و $2\vec{u}-5\vec{w}=\vec{0}$

34 أ) $\vec{u}=2\vec{v}$ و $\vec{w}=\vec{u}+3\vec{v}$.

ب) $\vec{u}=\vec{0}$ و $2\vec{v}-3\vec{w}=\vec{0}$.

35 أ) $3\vec{u}-5\vec{v}=\vec{0}$ و $\vec{w}=\vec{0}$.

ب) $\vec{u}\neq\vec{0}$ ، $\vec{v}=\vec{0}$ و $\vec{w}=\vec{0}$.

في التمارين من 36 إلى 41 ، لتكن الأشعة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ ليست من نفس المستوي .

المطلوب هل الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ هي من نفس المستوي؟

36 $\vec{u}=\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{w}=2\vec{j}$.

37 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{w}=\vec{j}+\vec{k}$.

38 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{w}=\vec{j}+\vec{k}$.

39 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}$ ، $\vec{w}=-5\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

40 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ ، $\vec{v}=\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{w}=\vec{j}+\vec{k}$.

41 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{w}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

42 ليكن G و G' مركزا الثقل لمثلثين ABC و $A'B'C'$ ، من الفضاء ، على الترتيب .

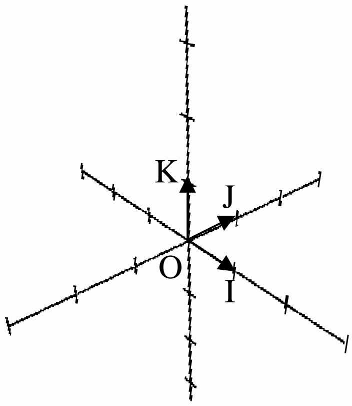
برهن أن : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

تمارين تطبيقية

43 ليكن $ABCD$ و $A'B'C'D'$ متوازيا أضلاع من مستويين متمايزين مركزاهما O و O' على الترتيب .
برهن أن : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=4\overrightarrow{OO'}$.

الهندسة التحليلية ، تعيين نقطة في معلم

في التمارين 44 ، 45 ، 46 نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ ، ولتكن النقط A ، B ، C ، D .



أعط العلاقة الشعاعية التي تعرّف هذه النقط بدلالة أشعة المعلم ، ثم أنشئ هذه النقط .

44 $A(1;1;1)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(2;1;0)$ ، $D(0;0;2)$.

45 $A(1;-1;1)$ ، $B(-1;1;0)$ ، $C(1;0;1)$ ، $D(-1;-1;0)$.

46 $A(2;1;2)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(1;-2;1)$ ، $D(1;1;-2)$.

الأشعة المتوازية

الفضاء منسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

47 برهن أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $\vec{u}(2;1;3)$ و $\vec{v}(4;2;6)$.

ب) $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};1;2\right)$ و $\vec{v}(-1;3;6)$.

48 برهن أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $\vec{u}\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

ب) $\vec{u}\left(\frac{1}{3};-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(-\frac{2}{15};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.

49 برهن أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متوازيين في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $\vec{u}(2;1;3)$ و $\vec{v}(3;-1;2)$.

ب) $\vec{u}(1;-2;3)$ و $\vec{v}(1;1;2)$.

50 برهن أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متوازيين في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $\vec{u}(0;0;6)$ و $\vec{v}(2;0;2)$.

ب) $\vec{u}(-3;3;3)$ و $\vec{v}(3;3;3)$.

في كل من التمارين 51 ، 52 ، 53 ، برهن أن النقط A ، B ، C هي على استقامة واحدة .

51 $A(1;2;3)$ ، $B(3;1;2)$ و $C\left(2;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

52 $A(2;1;3)$ ، $B(-5;2;1)$ و $C\left(\frac{13}{3};\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$.

53 $A(3;2;2)$ ، $B(1;3;3)$ و $C\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

في كل من التمارين 54 ، 55 ، 56 ، برهن أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان .

54 $A(1;0;2)$ ، $B(2;1;0)$ ، $C(1;3;2)$ ، $D(2;4;0)$.

55 $A(2;2;3)$ ، $B(1;3;-1)$ ، $C(-2;2;0)$ ، $D(-3;3;-4)$.

56 $A(2;0;1)$ ، $B(0;1;3)$ ، $C(1;2;0)$ ، $D(3;1;-2)$.

شعاعان متساويان

في كل من التمارين 57 ، 58 ، 59 ، عين إحداثيي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

57 $A(5;2;3)$ ، $B(1;6;3)$.

58 $A(1;3;-2)$ ، $B(3;1;2)$.

59 $A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ ، $B(-3;0;3)$.

تمارين تطبيقية

في التمارين 60 ، 61 ، 62 ، المطلوب البرهان أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

60 $A(2;3;1)$ ؛ $B(1;0;2)$ ؛ $C(3;5;3)$ ؛ $D(4;8;2)$.

61 $A(1;2;-5)$ ؛ $B(0;3;2)$ ؛ $C(1;1;1)$ ؛ $D(2;0;-6)$.

62 $A(1;-1;-1)$ ؛ $B(3;-2;5)$ ؛ $C(7;3;1)$ ؛ $D(5;4;-5)$.

في التمارين 63 ، 64 ، 65 ، المطلوب تعيين إحداثيات النقطة D بحيث النقط A ، B ، C ، D تشكل متوازي أضلاع .

63 $A(3;2;1)$ ، $B(2;5;-3)$ ؛ $C(7;-1;2)$.

64 $A(1;2;3)$ ، $B(3;2;-5)$ ؛ $C(0;-1;-3)$.

65 $A(0;1;0)$ ، $B(1;5;-1)$ ؛ $C(-3;1;2)$.

في التمارين 66 ، 67 ، 68 ، يطلب تعيين إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC .

66 $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;1)$ ؛ $C(1;0;2)$.

67 $A(1;-3;2)$ ، $B(5;2;-1)$ ؛ $C(2;0;3)$.

68 $A\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};1\right)$ ، $B\left(\frac{1}{2};-1;3\right)$ ؛ $C(2;-1;1)$.

في التمارين 69 ، 70 ، 71 ، 72 المطلوب تعيين مركبات الشعاع $\vec{u}$ ثم استنتج أن النقط O ، A ، B ، C هي من نفس المستوي .

69 $A(3;1;2)$ ، $B(-2;-2;-1)$ ؛ $C\left(\frac{1}{3};1;0\right)$ و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$.

70 $A(1;3;2)$ ، $B(-1;2;1)$ ؛ $C(-4;3;1)$ و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

71 $A(2;-1;3)$ ، $B(1;5;-1)$ ؛ $C(1;-17;9)$ و $\vec{u}=-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

72 $A(-5;-3;-2)$ ، $B(1;-2;1)$ ؛ $C(3;7;0)$ و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

المستقيمات في الفضاء

73 ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(2;-1;1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(2;3;-1)$.
مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ ، حيث k عدد يتغير على $\mathbb{R}$ ، هو المستقيم (D) .
أ) أكتب إحداثيات M بدلالة k . هذه الجملة لإحداثيات M بدلالة k تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .
ب) جد معادلتين ، تربط بين إحداثيات النقطة M ، مستقلتين عن العدد الحقيقي k .
هذه الجملة تسمى جملة معادلتي المستقيم (D) .

74 ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;-3;2)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(3;-2;2)$.
أ) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .
ب) جد جملة معادلتي المستقيم (D) .

75 نعتبر النقطتين $A(1;-1;1)$ و $B(1;2;3)$.
جد تمثيلا وسيطيا ، ثم جملة معادلتين للمستقيم (D) .

76 جد تمثيلا وسيطيا ، ثم جملة معادلتين لكل من محاور الإحداثيات (xx') ، (yy') و (zz') .

77 ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;2;1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1;3;1)$.
أ) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .
ب) عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي P ذي المعادلة $z=3$.

78 نعتبر النقطتين $A(2;1;3)$ ، $B(-1;-2;0)$.
أ) عين تمثيلا وسيطيا وجملة معادلتين للمستقيم (AB) .
ب) عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P ذي المعادلة $x=2$.

تمارين تطبيقية

في التمارين 79 ، 80 ، 81 ، 82 المستقيم (D) معرف بجملة معادلتين ، والمطلوب تعيين نقطة يشملها المستقيم (D) وشعاعا يكون شعاع التوجيه للمستقيم (D) .

79 $(D):\begin{cases} x+y-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$.

80 $(D):\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+3y-z+2=0 \end{cases}$.

81 $(D):\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

82 $(D):\begin{cases} x-1=0 \\ z-5=0 \end{cases}$.

سطح الكرة

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

83 عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R ، في كل من الحالتين التاليتين .

أ) $R=3$. ب) $R=\sqrt{2}$.

84 نعتبر سطح الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها 3 ، والمستقيم (D) المعرف بـ $\begin{cases} x-y=1 \\ z=2 \end{cases}$.

عين تقاطع المستقيم (D) مع سطح الكرة S .

85 نعتبر سطح الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{3}$ ، والمستقيم (D) المعرف بـ $\begin{cases} x+y=2 \\ z=x \end{cases}$.

عين تقاطع سطح الكرة S مع المستقيم (D) .

86 نعتبر سطح الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها 5 ، والمستوي P ذي المعادلة $x=3$.

عين تقاطع سطح الكرة S مع المستوي P .

87 نعتبر سطح الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها 7 ، والمستوي P ذي المعادلة $z=\sqrt{13}$.

عين تقاطع سطح الكرة S مع المستوي P .

تمارين

88 ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا ، ولتكن النقطة I من الحرف $[AB]$ بحيث $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

ولتكن النقطة K من الحرف $[AD]$ بحيث $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

والنقطة J هي معرفة بـ $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$.

أ) عبر عن $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{FJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

ب) استنتج أن النقط F ، J ، I ، K هي من نفس المستوي.

89 $ABCD$ هو متوازي أضلاع و S نقطة خارج المستوي ABC .

لتكن النقطتان I و J من $[SA]$ و $[SB]$ على الترتيب ، حيث $\overrightarrow{SI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ ؛ $\overrightarrow{SJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ ، ولتكن النقطة K من $[BC]$ بحيث $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

أ) أنشئ مقطع الهرم $SABCD$ بالمستوي (IJK) .

ب) برهن أن المستوي (IJK) يوازي المستوي (SCD) .

90 A ، B ، C ، D هي أربع نقط من الفضاء ليست كلها من نفس المستوي ، لتكن النقطة E حيث :

$\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{EB}=5\overrightarrow{AD}+5\overrightarrow{DC}$.

برهن أن الأشعة $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي من نفس المستوي .

91 $ABCD$ رباعي وجوه و E نقطة حيث :

$\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{AE}$.

برهن أن الأشعة $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي من نفس المستوي .

92 ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا ، ولتكن النقطتان I و J بحيث $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

برهن أن $\overrightarrow{IJ}$ يوازي $\overrightarrow{EG}$.

93 A ، B ، C ، D هي أربع نقط من الفضاء ليست كلها من نفس المستوي ، لتكن النقطتان I و J حيث :

$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ؛

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

برهن أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (ABC) .

تمارين تطبيقية

94 ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و E نقطة حيث :

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

برهن أن $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CD}$ هي أشعة من نفس المستوي.

95 A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء .

في كل حالة من الحالتين التاليتين ، برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء ، الشعاع $\vec{u}$ مستقل عن M .

أ) $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$.

ب) $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$.

96 A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء .

عين النقطة M بحيث : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

97 A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء .

هل توجد نقطة M بحيث : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ؟

98 A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء . لتكن القطة E منتصف $[AB]$ و F منتصف $[AC]$.

برهن أن المستقيمين (EF) و (BC) متوازيان .

99 لتكن A ، B ، C ، D أربع نقط من الفضاء ، ولتكن النقطتان E و F منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب . لتكن M نقطة كيفية من الفضاء.

أ) عبر بدلالة $\overrightarrow{ME}$ و $\overrightarrow{MF}$ عن المجموع الشعاعي : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

ب) عين النقطة I بحيث $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

في كل ما يلي ، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

100 ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;-1;2)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1;2;1)$ ، وليكن المستقيم (Δ) المعرف بـِ : $\begin{cases} x+y+z-6=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

عين تقاطع (D) مع (Δ) .

101 ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1;2;1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1;-1;2)$ ، وليكن المستقيم (Δ) المعرف بـِ : $\begin{cases} x-y+z-10=0 \\ 2x+y-z+4=0 \end{cases}$.

عين تقاطع (D) مع (Δ) .

102 ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1;2;-1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(2;1;2)$ ، ونعتبر المستقيم (Δ) المعرف بـِ : $\begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$.

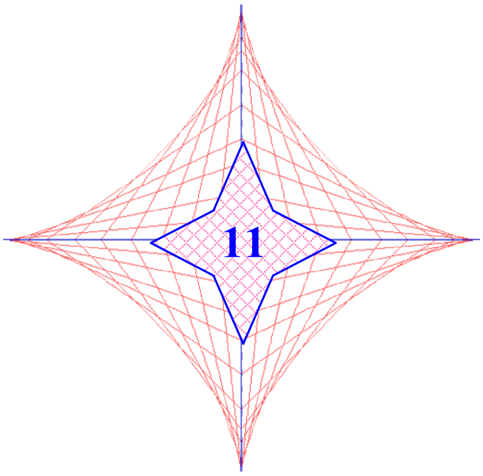
عين تقاطع (D) مع (Δ) .

103 عرف تحليليا بإعطاء معادلة وشرط ، السطح المخروطي الدوراني الذي رأسه O ومحو (yy') علما أن قاعدته هي دائرة نصف قطرها 3 وارتفاعه 6 .

عين حالة السطح يكون غير منتهٍ .

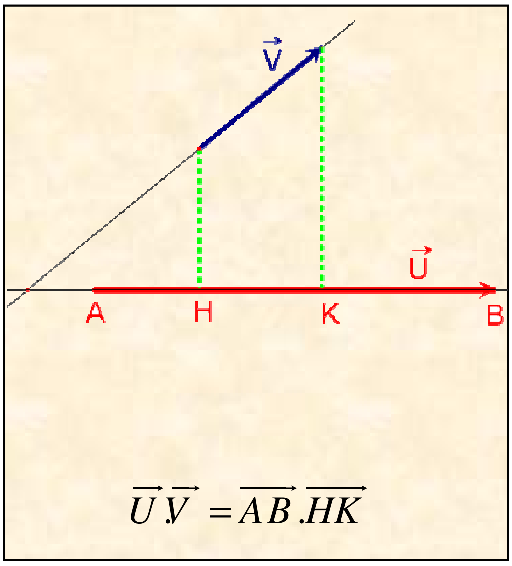
104 عرف تحليليا بإعطاء معادلة وشرط ، السطح الاسطواني الدوراني الذي محوره (xx') والمحصور بين المستويين اللذين معادلتيهما $x=2$ و $x=5$ على الترتيب ، علما أن قاعدته هي دائرة نصف قطرها 3 .

عين الحالة التي يكون فيها السطح غير منتهٍ .



الجداء السلمي في المستوي

الكفاءات المستهدفة



- حساب الجداء السلمي لشعاعين.
- إثبات علاقات تتعلق بالتعامد.
- كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه.
- تعيين معادلة دائرة.
- حساب مسافات و أقياس زوايا.

هو غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشاني و المدعو الكاشي. ولد في أواخر القرن الثامن الهجري في مدينة كاشان (إيران). درس الكاشي النحو و الصرف و الفقه و المنطق، ثم درس الرياضيات و تفوق فيها. و لا غرابة في ذلك فإن والده كان من أكبر علماء الرياضيات و الفلك.
و قد عاش الكاشي معظم حياته في مدينة سمرقند و فيها بنا مرصدا سماه " مرصد سمرقند ".

مؤلفاته: وضع الكاشي مصنفات في علوم مختلفة نذكر منها:

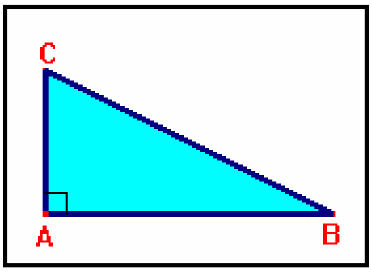
- كتاب " الزيج الخقاني " و فيه ضبط لجداول النجوم.
- "رسالة في الحساب"، "رسالة في الهندسة"، "رسالة الجيب و الوتر" و " رسالة عن إهليجي القمر و عطارد".

و كان كتابه " مفتاح الحساب " منهلا استقى منه علماء الشرق و الغرب على حد سواء و اعتمدوا عليه في تعليم أبنائهم في المدارس و الجامعات عدة قرون، كما استخدموا كثيرا من المبرهنات و القوانين التي أتى بها و برهنها و ابتكرها.

الكاشي 839هـ / 1436 م

نشاط أول

من مميزات المثلثات القائمة "" **مبرهنة فيثاغورس الشهيرة** ""



ABC مثلث قائم في النقطة A يعني $AB^2+AC^2=BC^2$

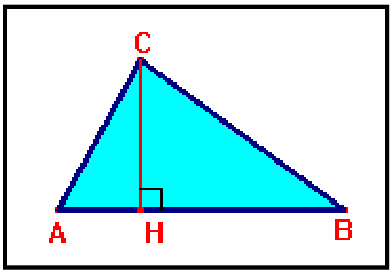
لدينا $AB^2+AC^2=BC^2$ يعني $AB^2+AC^2-BC^2=0$

سوف نهتم بصفة خاصة بالعدد w المعرف بـِ: $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

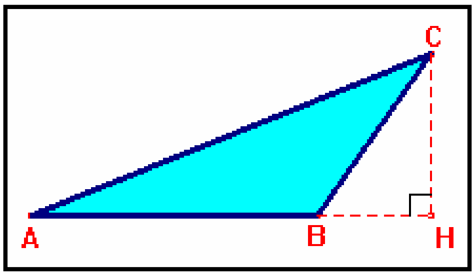
من الواضح أنه إذا كان ABC مثلثا قائما يكون $w=0$. نتساءل إذن عن قيمة العدد w إذا لم يكن المثلث ABC قائما.

من أجل ذلك نعتبر مثلثا كيفيا ABC و لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

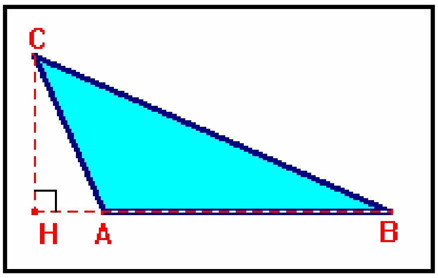
نميز ثلاث حالات حسب وضعية النقط A، B و H.



الوضعية1



الوضعية2

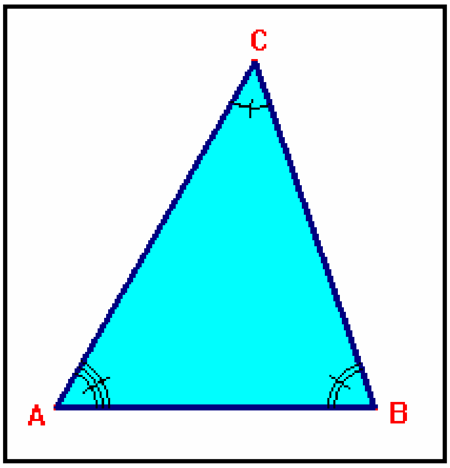


الوضعية3

1. بين أن: $BC^2=HB^2+HC^2$ و أن: $AC^2=HA^2+HC^2$ ثم استنتج أن:
$$w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$$
2.
   - **الوضعية1:** بكتابة $HB=AB-HA$ بين أن: $w=AB\times AH=AB\times AC\cos\widehat{BAC}$
   - **الوضعية2:** بين أن: $w=AB\times AH=AB\times AC\cos\widehat{BAC}$
   - **الوضعية3:** بين أن: $w=-AB\times AH=AB\times AC\cos\widehat{BAC}$
3. بفرض $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ بين أن: $w=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
4. نذكر أنه إذا كان $(O;I,J)$ معلما متعامدا و متجانسا للمستوي و كان $\vec{u}(x,y)$ شعاعا من المستوي فإن:
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$
بفرض $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ بين أن: $w=xx'+yy'$

يسمى العدد w الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

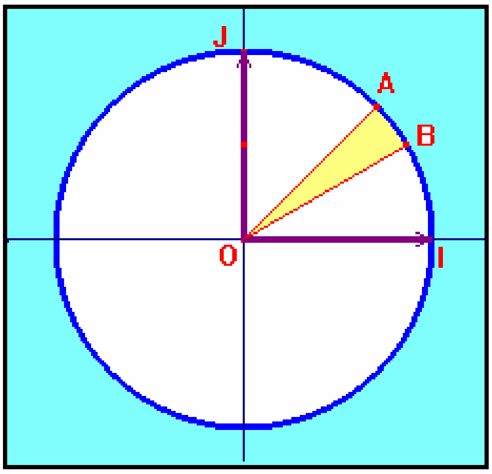
نشاط ثان



ABC مثلث حيث: $AB = 4cm$ ، $AC = 5cm$ و $\widehat{CAB} = 60°$

1. تحقق أن $BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$ ثم أحسب المسافة BC.
2. أحسب القيمة المضبوطة للعدد $\cos\widehat{ABC}$ ثم عين قيمة مقربة إلى 0.01 للزاوية $\widehat{ABC}$.
3. عين قيمة مقربة إلى 0.01 للزاوية $\widehat{BCA}$.

نشاط ثالث



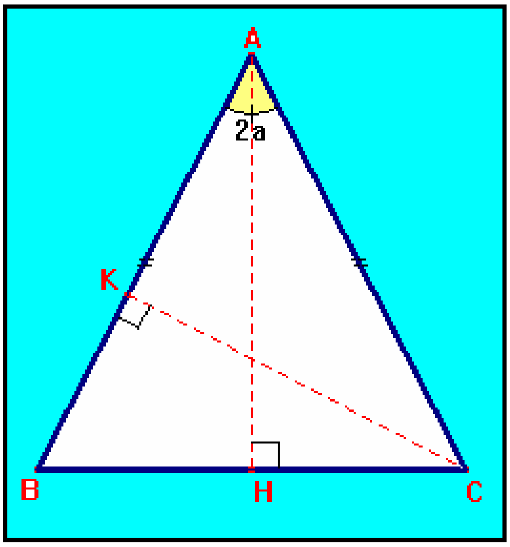
$(O;I,J)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي. نعتبر النقطتين A و B الصورتين على الترتيب للعددين $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ على الدائرة المثلثية التي مركزها النقطة O.

1. عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ ثم بين أن:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\frac{\pi}{12}$$

2. أحسب، بعد تعيين إحداثيات كل من $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
3. استنتج مما سبق القيمة المضبوطة للعدد $\cos\frac{\pi}{12}$.

نشاط رابع



ABC مثلث متساوي الساقين حيث:

$$AB = AC = \alpha \quad \text{و} \quad \widehat{A} = 2a\ rad$$

نسمي S مساحة المثلث ABC، H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) و K المسقط العمودي للنقطة C على (AB).

1. تحقق أن: $S = AH \times BH$ ثم استنتج أن:

$$S = \alpha^2 \sin a \cos a$$

2. أحسب S بدلالة $\sin 2a$ و α
3. استنتج مما سبق عبارة $\sin 2a$ بدلالة $\sin a$ و $\cos a$.

الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف بـِـ:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

حالات خاصة: • إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$

• إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$

• نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـِ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و هكذا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ و بصفة خاصة إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

أنظر البرهان في التمرين رقم 48

2. العبارة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة: إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هيٍ (x',y') فإن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

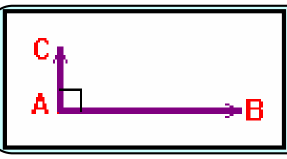
البرهان: إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا و متجانسا و كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ شعاعين فإن:

$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$ ، $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2$ $[\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')]$

بعد التعويض في $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ و بعد إجراء حسابات بسيطة نجد: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

3. الأشعة المتعامدة

تعريف: القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.



ملاحظة: نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة: القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

البرهان: • إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

• إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فالقول أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ يعني $\cos(\vec{u},\vec{v})=0$ أي $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح

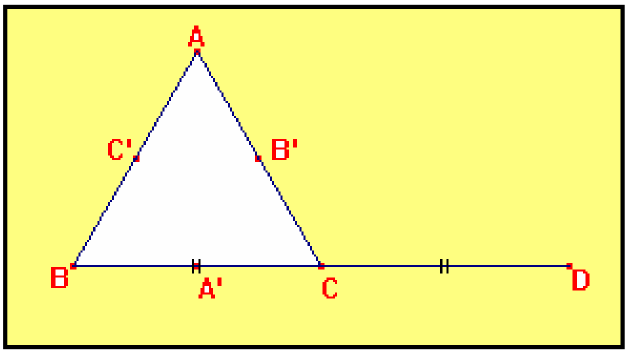
و هذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

تمرين محلول 1

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB = AC = BC = 3$ و لتكن النقط A'، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

أحسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}$.

حــــل:



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{BAC} = 3\times 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ و منه $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA} = CD \times CA \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 3\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$

(CC') هو ارتفاع في المثلث ABC و منه $(CC')\perp(AB)$ و بالتالي فإن $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

نعلم أن $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا و اتجاهاهما متعاكسين و بالتالي فإن:

$$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB} = -A'B' \times AB = -\frac{3}{2}\times 3 = -\frac{9}{2}$$

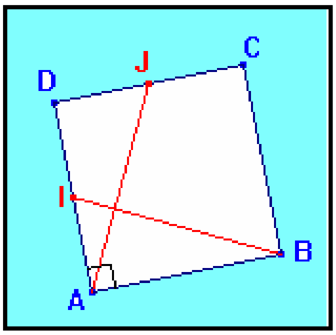
تمرين محلول 2

$ABCD$ مربع. I و J هما منتصفا القطعتين المستقيمتين $[AD]$ و $[DC]$ على الترتيب.

برهن أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدان.

حــــل:

طريقة: لإثبات أن مستقيمين (AB) و (CD) متعامدان يمكن إثبات أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$



لنبين أن $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI} = 0$. و من أجل ذلك نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;B,D)$

لدينا: $A(0,0)$، $J\left(\frac{1}{2},1\right)$، $B(1,0)$ و $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ و منه $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2},1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

و هكذا: $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI} = \left(\frac{1}{2}\right)(-1)+(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

نستنتج إذن أن الشعاعين $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعامدان و منه المستقيمان (AJ) و (BI) متعامدان.

قواعد الحساب

1. خواص الجداء السلمي

مبرهنة: من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (1) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (2) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ (3)

$\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$ (4) $\vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$ (5)

البرهان: نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}\left(x,y\right)$، $\vec{v}\left(x',y'\right)$ و $\vec{w}\left(x'',y''\right)$

1. لدينا $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=x'x+y'y\end{cases}$ و بما أن $xx'=x'x$ و $yy'=y'y$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2. إحداثيات الشعاع $\vec{v}+\vec{w}$ هي $\left(x'+x'',y'+y''\right)$. لدينا إذن:

$\begin{cases}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=x\left(x'+x''\right)+y\left(y'+y''\right)=xx'+xx''+yy'+yy''\\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+xx''+yy''=xx'+xx''+yy'+yy''\end{cases}$ و منه $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3. إحداثيات الشعاع $\lambda\vec{u}$ هي $\left(\lambda x,\lambda y\right)$. لدينا إذن:

$$\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\left(\lambda x\right)x'+\left(\lambda y\right)y'=\lambda\left(xx'+yy'\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

ملاحظة: يتم، بإتباع نفس الطريقة، البرهان على الخاصيتين (3) و (5).

أمثلة:
- $2\vec{u}\cdot\left(-3\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}\right)=\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(-3\vec{v}\right)+\left(2\vec{u}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{w}\right)=-6\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}^2+6\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-3\vec{v}^2=2\vec{u}^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^2$

2. المتطابقات الشهيرة

- لدينا: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- لدينا: $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- لدينا: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ **أو** $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ **أو** $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ **أو** $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

تطبيق: بين أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

تمرين محلول3

1. A ، B و C ثلاث نقط. بين أنه من أجل كل نقطة M : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
2. استنتج أن ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة H.

حـــل:

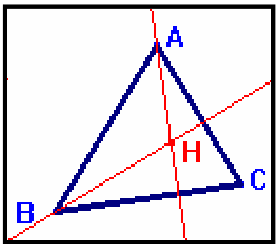
1. نضع: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$ و منه:

$$\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

و بما أن: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ، $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ و $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ فإن $\alpha=0$

2. إذا كان ABC مثلثا فإن (مثلا) ارتفاعيه اللذين يشملان A و B متقاطعان في نقطة H لأنهما عموديان على مستقيمين متقاطعين. لنبين أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.



لدينا حسب السؤال 1 و بأخذ $M=H$: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

و بما أن $(AH)\perp(BC)$ و $(BH)\perp(AC)$ فإن $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

و منه: $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و هذا يعني أن $(CH)\perp(AB)$

نستنتج هكذا أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.

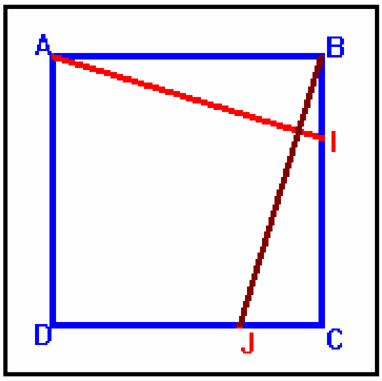
تعريف: تسمى النقطة H **نقطة ارتفاعات** " *orthocentre* " المثلث ABC.

تمرين محلول 4

$ABCD$ مربع طول ضلعه a. I و J هما النقطتان المعرفتان بـــ: $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}$
2. بكتابة $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$. ماذا تستنتج ؟

حـــل:



1. لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$ بينما

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2=\frac{a^2}{3}$$

و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{a^2}{3}$

2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$ و منه

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$$

و بالتالي: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0-\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+0=0$. نستنتج أن $(AI)\perp(BJ)$.

الجداء السلمي و الإسقاط العمودي

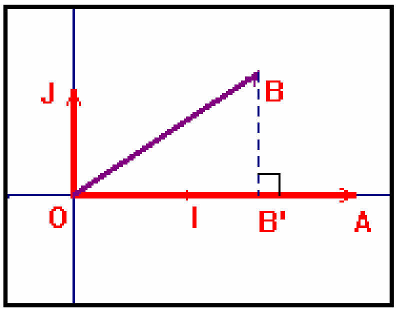
1. المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع

تعريف: $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على محور $(O;\vec{u})$.
يسمى الشعاع $\vec{v'}$ ، المعرف بـ $\vec{v'}=\overrightarrow{C'D'}$ ، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O;\vec{u})$ (أو على الشعاع $\vec{u}$)

2. الجداء السلمي و المسقط العمودي لشعاع

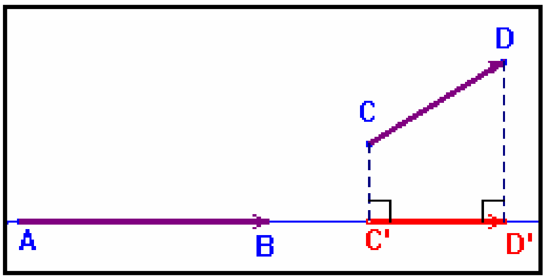
مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$$



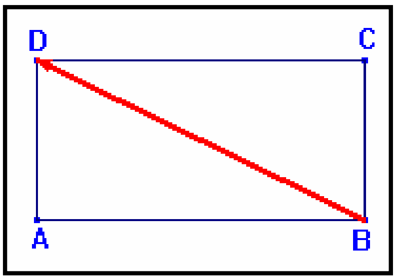
البرهان: نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بحيث يكون الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطيا و يكون لهما نفس الاتجاه.
نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و لتكن B' المسقط العمودي لـ B على (OA).
إذن $\vec{v'}=\overrightarrow{OB'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ على الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$
لدينا هكذا: $O(0,0)$ ، $A(x_A,0)$ ، $B(x_B,y_B)$ و $B'(x_B,0)$ و منه
$\overrightarrow{OA}(x_A,0)$ ، $\overrightarrow{OB}(x_B,y_B)$ و $\overrightarrow{OB'}(x_B,0)$

لدينا: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+0\times y_B=x_Ax_B\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=x_Ax_B+0\times 0=x_Ax_B\end{cases}$ و منه $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$ أي: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$



نتيجة: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين و كانتا C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

حالات خاصة:
- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و من نفس الاتجاه يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\times CD$
- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB\times CD$



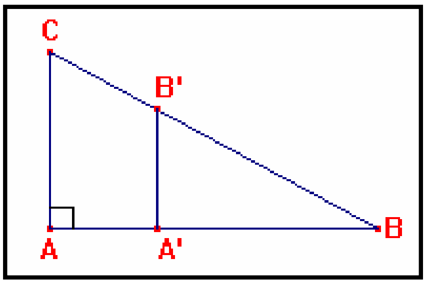
مثال: إذا كان $ABCD$ مستطيلا حيث $AB=5$ و $CB=3$ فإن:
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-25$
لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=3$
لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو $\overrightarrow{BC}$

تمرين محلول5

ABC مثلث قائم في A. A' نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$. المستقيم المار من A' و الموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (BC) في النقطة B'.

قارن بين العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$.

حـــل:



المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ و منه

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}=AB\times AA'$$

لأن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ نفس الاتجاه.

المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{A'C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{A'A}$ و منه

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}=-AB\times AA'$$

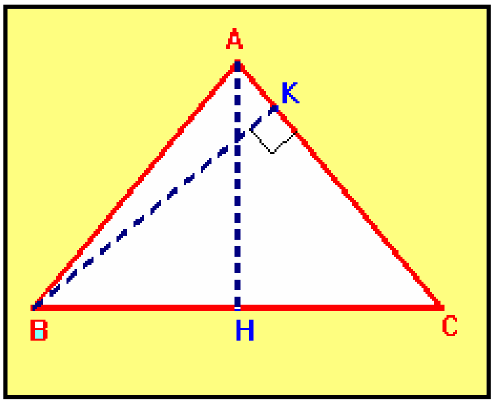
لأن اتجاهي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$

تمرين محلول6

ABC مثلث متساوي الساقين حيث $AB=AC=4$ و $BC=5$. و لتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$، $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. لتكن K المسقط العمودي للنقطة B على (AC). أحسب المسافة CK.



حـــل:

1. • بما أن المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CA}$ على $\overrightarrow{CB}$ هو $\overrightarrow{CH}$ فإن:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}=CH\times CB=\frac{5}{2}\times 5=\frac{25}{2}$$

• بما أن $(HA)\perp(CB)$ فإن: $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

• بما أن المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{AB}$ على $\overrightarrow{CB}$ هو $\overrightarrow{HB}$ فإن:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=-HB\times BC=-\frac{5}{2}\times 5=-\frac{25}{2}$$

2. بما أن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{CB}$ على $\overrightarrow{CA}$ هو $\overrightarrow{CK}$ فإن: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CK}$

لدينا من جهة ثانية حسب السؤال1 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{25}{2}$

لدينا هكذا: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CK}=\frac{25}{2}$ أي $CA\times CK=\frac{25}{2}$ و علما أن $CA=4$

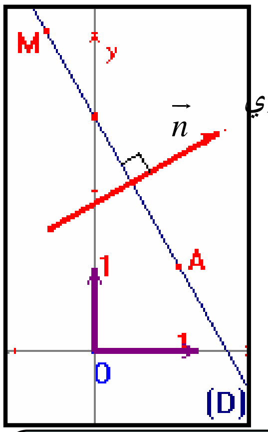
نجد في الأخير: $CK=\frac{25}{8}$

تطبيقات الجداء السلمي

1. الشعاع الناظمي لمستقيم

تعريف: القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ (D)

2. معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه



$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. $\vec{n}(a,b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي و ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له. (D) هي إذن مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. إذا فرضنا $M(x,y)$ يكون لدينا $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$ و بالتالي $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)$

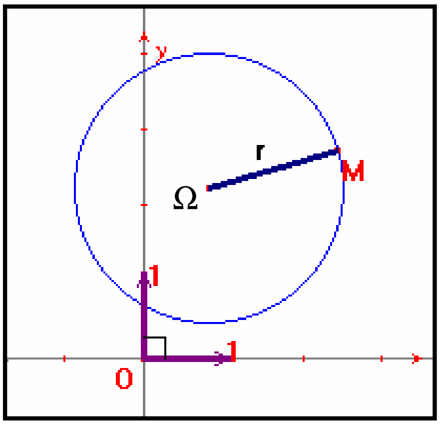
إذن تكون $M(x,y)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

أي $ax+by-(ax_0+by_0)=0$ أو $ax+by+c=0$ بوضع $c=-(ax_0+by_0)$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي له معادلة من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

ملاحظة: إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b,a)$ شعاع توجيه له و منه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D) لأن فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان مادام $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.

3. معادلة دائرة



المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❖ **معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها**

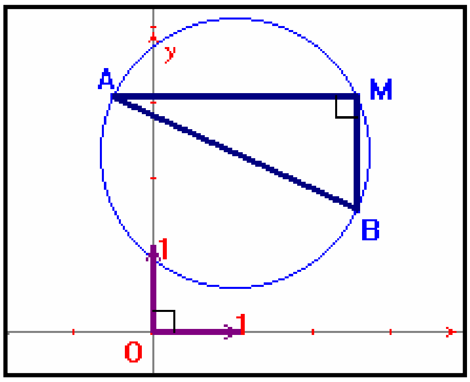
لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$.

(C) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $\Omega M=r$ أي $\Omega M^2=r^2$

و هذا يعني أن: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$ هي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



❖ **معادلة دائرة علم قطر لها**

لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا كذلك $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B.

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

تمرين محلول7

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A\left(1,1\right)$، $B\left(-2,3\right)$ و $C\left(3,2\right)$.
أكتب معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $\left[BC\right]$

حـــل: ليكن $\left(D\right)$ الارتفاع المتعلق بالضلع $\left[BC\right]$ في المثلث ABC. إذنٍ $\left(D\right)$ هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له. و بما أن إحداثيات $\overrightarrow{BC}$ هي $\left(5,-1\right)$ فإن معادلة $\left(D\right)$ هي من الشكل:

$$5x-y+c=0$$

و بما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم $\left(D\right)$ فإن: $5\left(1\right)-1+c=0$ و منه $c=-4$

إذن $5x-y-4=0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $\left[BC\right]$.

تمرين محلول8

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس.

1. عين معادلة $\left(C\right)$ الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-2,1\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. عين معادلة $\left(C'\right)$ الدائرة التي قطرها $\left[AB\right]$ علما أن $A\left(-2,-1\right)$ و $B\left(-3,2\right)$.
3. بين أن مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ حيث $x^2+y^2-2x-3=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
4. هل $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة ؟

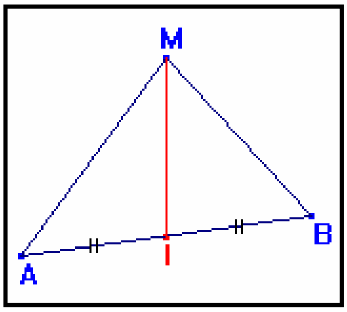
حـــل:

1. معادلة $\left(C\right)$ هي $\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2=\sqrt{3}^2$ أي: $x^2+y^2+4x-2y+2=0$
2. $M\left(x,y\right)\in\left(C'\right)$ يعني أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ أي: $\left(-2-x\right)\left(-3-x\right)+\left(-1-y\right)\left(2-y\right)=0$
و منه معادلة $\left(C'\right)$ هي $x^2+y^2+5x-y+4=0$
3. لتكن $\left(C''\right)$ مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ التي تحقق $x^2+y^2-2x-3=0$ $(*)$
لدينا $x^2-2x=\left(x-1\right)^2-1$ و منه تكتب $(*)$ على الشكل: $\left(x-1\right)^2-1+y^2-3=0$
لدينا إذن $\left(x-1\right)^2+y^2=2^2$. $\left(C''\right)$ هي إذن الدائرة التي مركزها النقطة $I\left(1,0\right)$ و نصف قطرها 2.
4. نكتب $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ على الشكل $\left(x^2+2x\right)+\left(y^2-4y\right)+8=0$
و بما أن $x^2+2x=\left(x+1\right)^2-1$ و $y^2-4y=\left(y-2\right)^2-4$ يكون لدينا: $\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=-3$
الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب و بالتالي لا توجد نقط $M\left(x,y\right)$ إحداثياها تحقق هذه المساواة.
المجموعة $\left(\Gamma\right)$ هي إذن مجموعة خالية.

ملاحظة: لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة

حساب أطوال و أقياس زوايا

4. مبرهنة المتوسط



A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. M نقطة كيفية من المستوي.

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

و منه: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

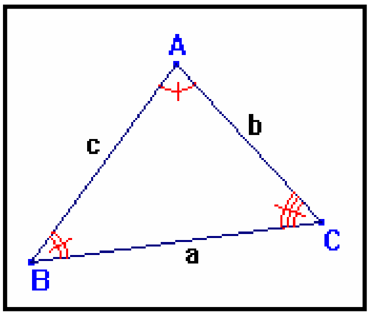
و بما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

5. العلاقات المترية في مثلث



ABC مثلث. نضع $AB=c$ ،$AC=b$ ،$BC=a$ ،$\widehat{BAC}=\widehat{A}$ ،$\widehat{CBA}=\widehat{B}$، $\widehat{ACB}=\widehat{C}$ و لتكن S مساحة المثلث ABC.

❖ مبرهنة الكاشي

لدينا: $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

و بما أن: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AB\cos\widehat{A}$ ،$\overrightarrow{AC}^2=b^2$ و $\overrightarrow{AB}^2=c^2$ فإن: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$ ،$AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$(1)\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$ $\quad(2)\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$ $\quad(3)\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

❖ قاعدة المساحة (بالنسبة للبرهان أنظر التمرين رقم 105 الصفحة 306)

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$ ،$AC=b$ ،$BC=a$ و S مساحة المثلث ABC. لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

❖ قانون الجيوب(بالنسبة للبرهان أنظر التمرين رقم 105 الصفحة 306)

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$ ،$AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

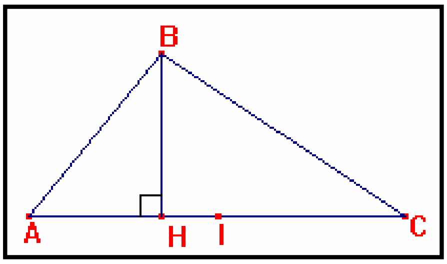
تمرين محلول9

ABC مثلث حيث: $AB=5$ ، $AC=8$ و $BC=7$.

1. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2+MC^2=38$
2. أحسب $\widehat{A}$ و عين قيمة مقربة إلى 0.1 لكل من $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$.
3. أحسب المسافة BH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

حـــل:

1. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:
$MA^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}AC^2$. إذن القول أن M نقطة من (Γ) يعني أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AC^2=38$
أي $2MI^2+32=38$ أو $MI^2=3$. و بالتالي فإن (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة I و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. بتطبيق مبرهنة الكاشي في المثلث ABC يكون لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{A}$
أي $49=64+25-2\times5\times8\times\cos\widehat{A}$ و منه $\cos\widehat{A}=\frac{1}{2}$. و بما أن $0<\widehat{A}<180^\circ$ فإن: $\widehat{A}=60^\circ$.
بتطبيق مبرهنة الكاشي و بعد الحساب نجد: $\cos\widehat{B}=\frac{1}{7}$ و باستعمال آلة حاسبة نقرأ: $\widehat{B}\approx81.2^\circ$.
نعلم أن $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ و منه $\widehat{C}\approx38.8^\circ$.
3. لدينا من جهة $S=\frac{1}{2}AC\times BH$
و لدينا حسب قاعدة المساحة $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\widehat{A}$
و منه $AH=AB\sin\widehat{A}$ إي $AH=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$



تمرين محلول10

ABC مثلث حيث: $BC=8$ ، $\widehat{B}=50^\circ$ و $\widehat{C}=70^\circ$.

1. أحسب $\widehat{A}$.
2. أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}.

حـــل:

1. من $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ نجد $\widehat{A}=60^\circ$.
2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا: $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}$
و منه $AB=\frac{BC\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}=\frac{8\sin70^\circ}{\sin60^\circ}$ و $AC=\frac{BC\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}=\frac{8\sin50^\circ}{\sin60^\circ}$
نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08.

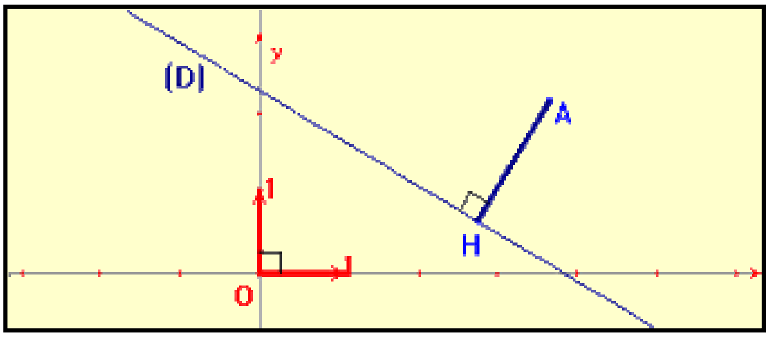
أعمال موجهة

المسافة بين نقطة و مستقيم

تعريف: المسافة بين نقطة A و مستقيم (D) هي المسافة AH بين A و النقطة H مسقطها العمودي على (D).

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I,J)$ نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيما (D) معادلته $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$.

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) وليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي إحداثيتاه هما (a,b).



الهدف: حساب المسافة AH بدلالة a، b، c، x_0 و y_0.

1. بين أن $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\left\|\vec{n}\right\|\times AH$ ثم استنتج أن $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH \quad (1)$
2. علما أن النقطة H تنتمي إلى المستقيم (D) و بفرض أن إحداثيتيها هي (x,y) بين أن:
$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\left|ax_0+by_0+c\right| \quad (2)$$
3. استنتج من (1) و (2) أن: $AH=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي:
$$\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

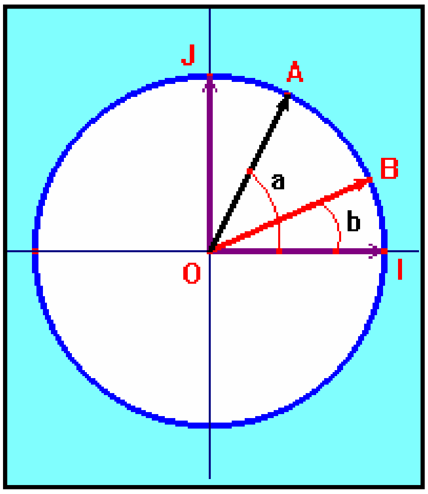
تطبيقات:

- ❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعدلة: $y=2x+1$
- ❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم (D) ذو المعادلة: $x+y-2=0$
- ❖ لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$
  - بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
  - هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

أعمال موجهة

دساتير الجمع

1. **حساب** $\cos(a-b)$ ، $\cos(a+b)$ ، $\sin(a-b)$ و $\sin(a+b)$



$(O;I,J)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي. نعتبر النقطتين A و B

من الدائرة المثلثية التي مركزها النقطة O بحيث:

$$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=a \quad \text{و} \quad \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=b$$

☒ عين إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ثم باستعمال العبارة التحليلية للجداء السلمي أحسب: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$

☒ لدينا حسب علاقة شال: $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)-\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$. بين، باستعمال التعريف المناسب للجداء السلمي، أن: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos(a-b)$

نستنتج مما سبق أن: $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\quad(1)$

☒ باستبدال العدد b بـ $(-b)$ في النتيجة (1) بين أن:

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\quad(2)$

☒ علما أن $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ بين أن:

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ $\quad(3)$ ثم استنتج أن: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\quad(4)$

أكتب النتائج السابقة على شكل مبرهنة

تطبيق: • تحق أن $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ ثم أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

• استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

2. **عبارة** $\cos 2a$ و $\sin 2a$

☒ بين، باستعمال النتائج السابقة، أن: $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\sin 2a=2\sin a\cos a$

☒ بين أن: $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

أكتب النتائج السابقة على شكل مبرهنة

تطبيق: • أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

• بين أن: $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

مسائل محلولة

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $B(1,1)$ و $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.

1. عين معادلة للمستقيم (D) ثم بين أنه إذا كانت $M(x,y)$ نقطة من (D) فإن إحداثيها تحقق:
$x=-k+1$ و $y=2k+1$ حيث k عدد حقيقي كيفي.
2. عين القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(k)=5k^2-10k+10$
3. لتكن النقطة $A(2;4)$. أحسب AM^2 بدلالة k ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (D).

1. معادلة المستقيم (D) هي من الشكل: $2x+y+c=0$ لأن $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.
بما أن النقطة $B(1,1)$ تنتمي إلى (D) فإن إحداثيها تحقق معادلة (D) أي: $2(1)+1+c=0$ و منه: $c=-3$
نستنتج أن $2x+y-3=0$ هي معادلة للمستقيم (D).
القول أن النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى المستقيم (D) يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D). نأخذ مثلا $\vec{u}(-1,2)$.
$\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا يعني أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ أي $\begin{cases}x-1=-k\\ y-1=2k\end{cases}$
نجد هكذا أن إحداثيات النقطة $M(x,y)$ تحقق $\begin{cases}x=-k+1\\ y=2k+1\end{cases}$
2. لدينا: $f(k)=5k^2-10k+10$ و منه: $f'(k)=10(k-1)$
لدينا:

k	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $f'(k)$	$-$	0	$+$

بما أن f' تنعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 1 فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 هي $f(1)$
لدينا: $f(1)=5(1)^2-10(1)+10=5$. إذن القيمة الحدية الصغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ هي 5.
3. لدينا: $AM^2=(x-2)^2+(y-4)^2$
و منه بعد تعويض x بـ $-k+1$ و تعويض y بـ $2k+1$
يكون لدينا: $AM^2=(-k-1)^2+(2k-3)^2$ أي $AM^2=5k^2-10k+10$

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

نلاحظ أن $AM^2=f(k)$ و منه أصغر قيمة تأخذها AM^2 هي 5
نستنتج هكذا أن المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) هي: $\sqrt{5}$.

مسائل محلولة

ABC مثلث. نضع $AB=c$ ،$AC=b$ ،$BC=a$ ،$\widehat{BAC}=\widehat{A}$ ،$\widehat{CBA}=\widehat{B}$ ،$\widehat{ACB}=\widehat{C}$.

نرمز بالرمز S إلى مساحة المثلث ABC و بالرمز p إلى نصف محيطه.

1. بين أن $1+\cos\widehat{A}=\dfrac{2p(p-a)}{bc}$ و أن $1-\cos\widehat{A}=\dfrac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

2. استنتج $\sin\widehat{A}$ بدلالة p ، a ، b و c ثم بين أن: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3. نفرض: $a=15\ cm$ ، $b=9\ cm$ و $c=11\ cm$

- أحسب بـِ cm^2 المساحة S ثم عين قيمة مقربة لها إلى **0.01**
- عين قيمة مقربة لـِ $\widehat{A}$ إلى **0.01**

---

1. لدينا بتطبيق مبرهنة الكاشي: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$ و منه $\cos\widehat{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

و بالتالي:
$$\begin{cases}1+\cos\widehat{A}=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\\[2mm] 1-\cos\widehat{A}=\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\end{cases}$$

لدينا $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ و منه:
$$\begin{cases}p(p-a)=\dfrac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)=\dfrac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]\\[2mm] (p-b)(p-c)=\dfrac{1}{4}\left[a-(b-c)\right]\left[a+(b-c)\right]=\dfrac{1}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right]\end{cases}$$

نجد بعد التعويض: $1+\cos\widehat{A}=\dfrac{2p(p-a)}{bc}$ و $1-\cos\widehat{A}=\dfrac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

2. نعلم أن $\cos^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{A}=1$ و منه $\sin^2\widehat{A}=1-\cos^2\widehat{A}=\left(1-\cos\widehat{A}\right)\left(1+\cos\widehat{A}\right)$

نجد هكذا $\sin^2\widehat{A}=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$

نعلم أن $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ و منه $S^2=\dfrac{1}{4}b^2c^2\sin^2\widehat{A}$ أي $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

و بما أن الأعداد p ، $p-a$ ، $p-b$ و $p-c$ موجبة فإن $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

تسمى النتيجة السابقة " قاعدة هيرون – *Héron* –

3. • لدينا: $p=\dfrac{35}{2}$ و منه بتطبيق قاعدة هيرون يكون لدينا: $S=\sqrt{\dfrac{35\times5\times17\times13}{16}}=\dfrac{\sqrt{38675}}{4}cm^2$

نجد هكذا: $S\approx 49{,}16cm^2$

• نعلم حسب مبرهنة الكاشي أن $\cos\widehat{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ و منه $\cos\widehat{A}=-\dfrac{23}{198}$

باستعمال آلة حاسبة نجد: $\widehat{A}\approx 96{,}67°$

تعيين مجموعات نقط

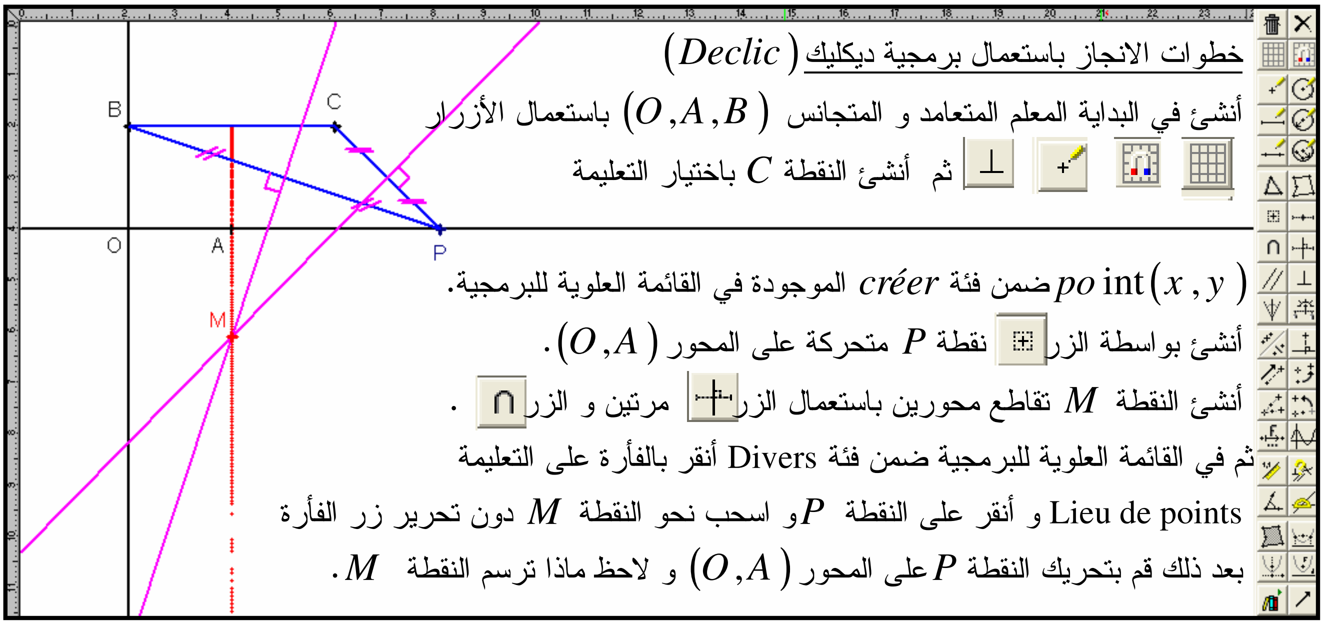
نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,A,B) النقطة $C(2;1)$ و لتكن P نقطة متغيرة على محور الفواصل (O,A).

الهدف هو:

1. تعيين (E_1) المحل الهندسي للنقطة M مركزالدائرة المحيطة بالمثلث PBC لما تمسح P المحور (O,A)
2. تعيين (E_2) المحل الهندسي للنقطة H نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث PBC لما تمسح P المحور (O,A)

1. تعيين المجموعة (E_1)

❖ التخمين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية:



❖ برهان التخمين:

- إذا رمزنا بـ a إلى فاصلة النقطة P عين معادلة لمحور $[BC]$ و معادلة لمحور $[BP]$ بدلالة a.
- عين، بدلالة a، إحداثيي النقطة M (x,y). بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $y-1\leq 0$.

2. تعيين المجموعة (E_2)

❖ التخمين:

- بعد إنشاء المعلم المتعامد و المتجانس (O,A,B) أنشئ النقط C، P و H باستعمال الأزرة المناسبة.
- بإتباع نفس الخطوات السابقة قم بتحريك النقطة P على المحور (O,A) و لاحظ ماذا ترسم النقطة H.
- بتخمين عين بيانيا طبيعة المجموعة (E_2).

❖ برهان التخمين:

- ماذا تلاحظ بالنسبة لفاصلتي النقطتين P و H ؟
- إذا رمزنا بـ a إلى فاصلة النقطة P عين معادلة لارتفاع المثلث PBC المتعلق بالضلع $[PC]$.
- عين ترتيب النقطة H بدلالة a.

تعيين مجموعة نقط

(C) دائرة مركزها O و نصف قطرها R. A نقطة ثابتة داخل الدائرة (C) و P نقطة متغيرة على الدائرة (C).
المستقيم العمودي على (AP) في النقطة A يقطع الدائرة (C) في نقطة Q. نسمي M منتصف القطعة $[PQ]$.

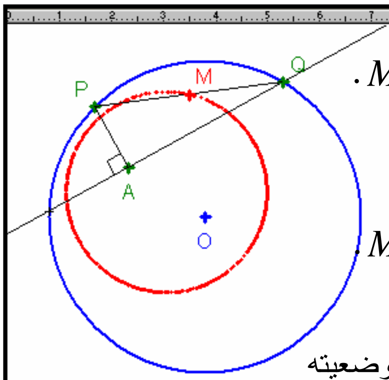
الهدف هو:

تعيين (E) المحل الهندسي للنقطة M منتصف $[PQ]$ لما تمسح النقطة P الدائرة (C).

تعيين المجموعة (E)

❖ التخمين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية:

خطوات الانجاز باستعمال برمجية ديكليك $(Declic)$



باستعمال الأزرة المناسبة أنشئ كلا من الدائرة (C) و النقط A، P، Q و M.
في القائمة العلوية للبرمجية ضمن فئة Divers أنقر بالفأرة على التعليمة Lieu de points و أنقر على النقطة P و اسحب نحو النقطة M دون تحرير زر الفأرة. بعد ذلك قم بتحريك النقطة P على (C) و لاحظ ماذا ترسم النقطة M
يظهر جليا أن المحل الهندسي للنقطة M منتصف $[PQ]$ لما تمسح النقطة P الدائرة (C) هي دائرة (C'). إلا أن مركز الدائرة (C') غير معلوم.لتخمين وضعيته نعتبر ثلاث نقط من الدائرة (C') ثم ننشئ محوري قطعتين مستقيمتين. نقطة تقاطعهما O' هي مركز الدائرة (C').
ما هو تخمينك بالنسبة لوضعية المركز O' ؟

❖ برهان التخمين (يرتكز البرهان أساسا على مبرهنة المتوسط)

1. أثبت أن المثلث OMP قائم في M و أن $MA = MP$ ثم بين أن $MA^2 + MO^2 = R^2$. استنتج أن:
$O'M = r$ حيث $r^2 = \dfrac{2R^2 - OA^2}{4}$ $(r > 0)$.

2. دراسة المسألة العكسية:

نعتبر نقطة M تحقق $O'M = r$ مع $r^2 = \dfrac{2R^2 - OA^2}{4}$

- بين أن $MA^2 + MO^2 = R^2$ ثم استنتج أن النقطة M تقع داخل الدائرة (C).
- المستقيم العمودي على (OM) يقطع الدائرة (C) في نقطتين P و Q. بين أن M منتصف $[PQ]$ و أن المثلث APQ قائم في النقطة A. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة (C').

تمارين

أصحيح أم خاطئ .

1 الجداء السلمي لشعاعين هو عدد حقيقي موجب .

2 إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شاعين مرتبطين خطيا فإن :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

3 من أجل كل شعاع $\vec{u}$ ، $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ إذن $\vec{u} = \|\vec{u}\|$

4 إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$ فإن $\vec{u} = 0$ أو $\vec{v} = 0$.

5 إذا كان $\|\vec{u}\| = 1$ ، $\|\vec{u}\| = 2$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ فإن

$$\vec{u}.\vec{v} = -1$$

6 إذا كان $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ ، $\|\vec{u}\| = 1$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$

فإن $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4$

7 من أجل كل الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ،

$$(2\vec{u} - \vec{v}).\vec{w} = 2(\vec{u}.\vec{w}) - \vec{v}.\vec{w}$$

8 من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ،

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

9 إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ فإن $\vec{v} = \vec{w}$.

10 إذا علمنا أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2$ فإن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A .

11 A نقطة و $\vec{u}$ شعاع غير معدوم. مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ هي مستقيم .

12 في معلم متعامد ومتجانس ، معادلة الدائرة ذات المركز $A(1;2)$ ونصف القطر 2 هي

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

13 $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right)$.

14 من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$.

15 إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ فإن $\|\vec{u}\| = 3$.

16 إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = -5$.

17 ن $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ فإن $\vec{u} \perp \vec{v}$

أسئلة متعددة الاختيارات

اختر الأجوبة الصحيحة من بين الاقتراحات .

18 $ABCD$ مربع مركزه O وطول ضلعه 1 .

الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$ هو :

أ) 0 ب) $\frac{1}{2}$ ج) $-\frac{1}{2}$.

19 نفس المربع للتمرين السابق لدينا $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$ يساوي :

أ) 1 ب) $\sqrt{2}$ ج) 0

20 ABC مثلث حيث $AC = 1$ ، $BC = 2$

و $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ لدينا : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ يساوي :

أ) $-\frac{1}{2}$ ب) 1 ج) $\sqrt{3}$.

21 في معلم متعامد ومتجانس لدينا $\vec{u}(1\,;-2)$ ، $\vec{v}(2\,;-3)$ ؛ $\vec{u}.\vec{v}$ يساوي :

أ) -8 ب) 8 ج) 4

22 في معلم متعامد ومتجانس إذا كان من أجل كل عدد حقيقي θ ؛ $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ فإن :

أ) $\|\vec{u}\| = 1$ ب) $\|\vec{u}\| = |\cos 2\theta|$

ج) $\|\vec{u}\| = |\sin 2\theta|$.

23 القول $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ يعني القول :

أ) $\vec{u} = \vec{v}$ ب) $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$

ج) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{u}$ أو $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

24 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$ معناه :

أ) $\vec{u} // \vec{v}$ ب) $\vec{u} \perp \vec{v}$ ج) $\vec{u} = \vec{v}$.

25 $\vec{u}(-2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستقيم ذي المعادلة :

أ) $-3x + 2y + 2 = 0$ ب) $-2x + 3y - 1 = 0$

ج) $3x + 2y + 1 = 0$

26 A و B نقطتان من المستوي . مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ هي :

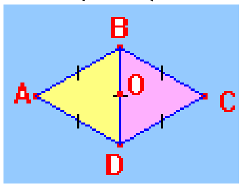
أ) محور القطعة $[AB]$.

ب) الدائرة ذات القطر $[AB]$.

المستقيم (AB) .

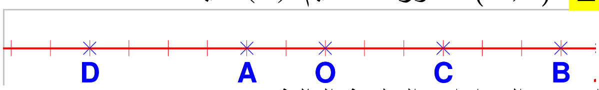
الجداء السلمي لشعاعين

27 ABD و BCD مثلثان متقايسا الأضلاع حيث $BD=4$. احسب الجداءات السلمية التالية:



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ،
$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

28 $(O;I)$ محور للمستقيم (d) حيث $OI=1$



احسب الجداءات السلمية التالية

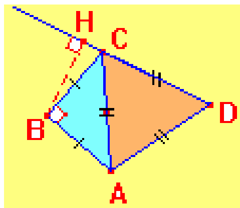
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OI}$ ، $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DB}$

29 $ABCD$ مربع حيث $AB=6$ و I نقطة تقاطع قطريه.احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ ، $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI}$

30 ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع. علما أن $AC=6$

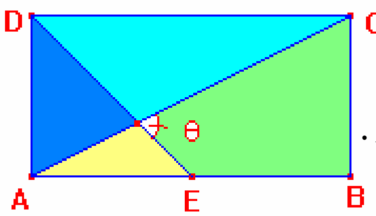


1) احسب الجداءات السلمية التالية $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ ،
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$ ، $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

2) احسب DH حيث H هو المسقط العمودي لـــ B على المستقيم (DC) .

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$ و استنتج قيمة $\cos\widehat{DCB}$

31 $ABCD$ مستطيل حيث $AD=3$ و $AB=5$.



E منتصف $[AB]$.

(انظر الشكل المقابل)

1) احسب AC و DE.

2) عبر عن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

– احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.

3) استنتج قيمة الزاوية $\theta=\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)$ بالدرجات بتقريب $0{,}01$.

32 ABC مثلث متساوي الساقين في A حيث $AB=3cm$ ، $BC=4cm$. O منتصف القطعة $[BC]$

1) احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}$

2) I المسقط العمودي لـ B على (AC)

احسب المسافة CI .

33 ABC مثلث حيث $AB=2$ و $AC=3$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$.

هل هذا المثلث قائم في A ؟ علل.

34 ABC مثلث حيث $AB=2$ ، $AC=3$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$

1) بين أن المثلث ABC قائم في B .

2) احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ثم قيساً للزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ (بالدرجات و بتقريب إلى 10^{-1}).

35 نعتبر معين $ABCD$ الاتجاه المباشر مركزه O حيث $AC=10$ و $BD=6$.

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2) ليكن P المسقط العمودي للنقطة D على (AB) . احسب AP .

36 ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $5cm$ و I منتصف $[BC]$.

احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.

37 $ABCD$ متوازي أضلاع حيث $AB=4$ ، $AD=5$ و $AC=7$.

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. استنتج BD .

38 A و B نقطتان حيث $AB=4$. d هو المستقيم العمودي على (AB) في B

1) بين أنه إذا كانت M نقطة كيفية من d فإن $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=16$

2) بين أنه إذا كانت N نقطة حيث $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=16$ فإن N نقطة من المستقيم d .

39 $ABCD$ مربع طول ضلعه a . I و J منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب .

K نقطة تقاطع $[AJ]$ و $[CI]$

تمارين

1) عبر بطريقتين عن الجداء السلمي $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CI}$

2) عين قيسا للزاوية $\widehat{JKI}$ (أعط قيمة مقربة إلى 0,1)

40 ABC مثلث حيث $AB=10$ ، $BC=8$ و $AC=12$

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) استنتج الزاوية $\widehat{BAC}$ مدورة إلى الوحدة.

41 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}.\vec{v}=-3$

احسب $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)^2$ و $\left(4\vec{u}-3\vec{v}\right)\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)$

42 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}.\vec{v}=5$

احسب $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$ ، $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ ، $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

43 في معلم متعامد و متجانس نعتبر الشعاعين $\vec{u}(3;-2)$ $\vec{v}(2;4)$.

احسب $\vec{u}.\vec{v}$ ، $\|\vec{v}\|$ ، $\vec{u}^2$

44 ABC مثلث حيث $AB=2$ ، $BC=1,5$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{11}{8}$

احسب $cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

45 ABC مثلث حيث $AB=2$ ، $AC=3$ و $BC=1,5$

احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ثم $cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ و قيمة مقربة إلى الوحدة لـــ $\widehat{BAC}$

46 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان. نرمز بـــ $\alpha=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ (بالراديان)

احسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ في الحالات التالية:

1) $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2) $\|\vec{u}\|=\frac{5}{7}$ و $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$

3) $\|\vec{u}\|=5$ و $\|\vec{v}\|=\frac{3}{2}$ و $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

4) $\|\vec{u}\|=2$ و $\|\vec{v}\|=7$ و $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

47 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ ، $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{5\pi}{6}$ و $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

احسب $\|\vec{u}\|$.

48 ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين .

نضع $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\theta$

1) عبر عن $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)$ بدلالة θ.

استنتج أن: $\vec{u}.\left(-\vec{v}\right)=-\left(\vec{u}.\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}\right).\vec{v}$

2) بين العلاقة : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

3) تطبيق: يعطى $AB=\sqrt{3}$ ، $AC=\frac{3}{2}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{9}{4}$

عين الزاوية $\widehat{BAC}$ و الطول BC

49 في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ يعطى :

أ) $\vec{u}\left(\frac{1}{2},-2\right)$ ، $\vec{v}(4,-1)$. احسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

ب) $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ ، $\vec{u}.\vec{v}=-1$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

احسب مركبتي الشعاع $\vec{v}$

جـ) $\vec{u}\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ و $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$

احسب $\vec{u}.\vec{v}$ و الزاوية $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

50 في معلم متعامد و متجانس، النقط A ، B و C احداثياتها على الترتيب $(5;2)$ ، $(3;4)$ و $(0;1)$

1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) احسب الطولين AB و AC .

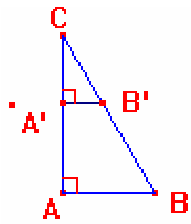
3) استنتج قيمة للزاوية $\widehat{BAC}$ مدورة إلى الوحدة .

51 في معلم متعامد و متجانس، النقط A ، B و C احداثياتها على الترتيب $(1;1)$ ، $(3;4)$ و $(3-k;-1)$ حيث k عدد حقيقي .

1) عين العدد الحقيقي k حتى يكون المثلث ABC قائما في A .

2) برهن أن المثلث ABC متساوي الساقين في A .

52 ABC مثلث قائم في A. A' نقطة من $[AC]$. الموازي للمستقيم (AB) و الذي يشمل A' يقطع (BC) في B'
قارن بين $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}$
نأخذ السنتيمتر كوحدة.



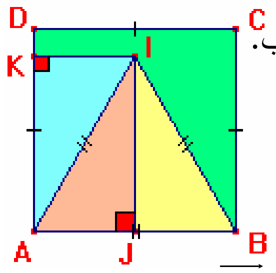
53 أنشئ مثلثا ABC حيث :

أ) $AB=3$ ، $AC=6$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=9$

ب) $AB=4$ ، $AC=5$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-12$

جـ) $AB=3$ ، $AC=4$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

54 $ABCD$ مربع طول ضلعه 4 و ABI مثلث متقايس الأضلاع .نسمي J و K المسقطين العموديين لـ I على (AB) و (AD) على الترتيب.



1) احسب الجداءات السلمية
$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$ ،
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC}$.

2) أ) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}$

ب) احسب DI في المثلث DKI

استنتج من النتائج السابقة قيم $cos15^0$ و $cos75^0$

(لاحظ أن المثلث ADI متساوي الساقين)

في كل حالة اختر طريقة مناسبة لحساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

55 O نقطة من المستوى ، $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعان طويلتاهما تساوي 1. A و B نقطتان معرفتان بـ : $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. نرمز إلى $\widehat{AOB}=\alpha$.

نضع $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$

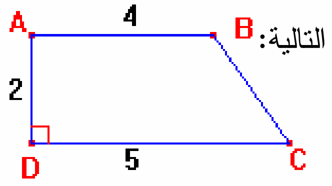
C و D نقطتان معرفتان بـ : $\overrightarrow{OC}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{OD}=\vec{v}$

1) احسب $\vec{u}^2$ ، $\vec{v}^2$ و $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة α

2) عين قيمة مقربة إلى $\frac{1}{10}$ لقياس الزاوية $\widehat{COD}$ بالراديان في كل من الحالتين التاليتين:

أ) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ب) $\alpha=\frac{\pi}{2}$

56 $ABCD$ شبه منحرف حيث $AB=4$ ، $AD=2$ و $DC=5$

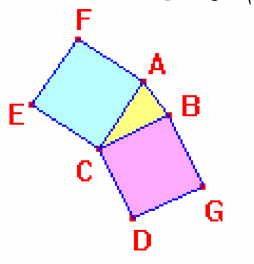


1) احسب الجداءات السلمية التالية:
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ،
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

2) احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

3) استنتج قيمة مقربة لقيس الزاوية $\widehat{ACB}$

57 خارج مثلث ABC ، نرسم مربعين $ACEF$ و $BCDG$.



1) بين أن $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$

2) احسب $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$. ماذا تستنتج؟

3) بعد المقارنة بين $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$ ، بين أن $BE=AD$

58 $ABCD$ مربع مركزه O حيث $AB=4$.
احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ باستعمال:

1) تعريف الجداء السلمي.

2) $5\ cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

3) الإحداثيات في المعلم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

4) العلاقة $\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$

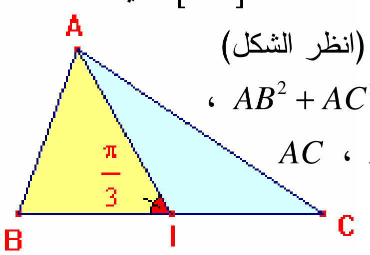
59 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي.

1) بين أن: $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=4\vec{u}.\vec{v}$
و $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=2\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

2) بين أن $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

- استنتج أن قطرا متوازي أضلاع يكونا متعامدين إذا وفقط إذا كانت أضلاعه متقايسة.

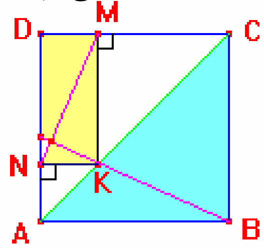
60 ABC مثلث و I منتصف $[BC]$ حيث $BI=2$ و $AI=3$ (انظر الشكل)



احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، AB^2+AC^2 ، AB^2-AC^2 ، AB ، AC

تطبيقات على الجداء السلمي

61 $ABCD$ مربع طول ضلعه 1 . K نطة كيفية من $[AC]$. M و N المقطان العموديان لـــ K على (DC) و (DA) على الترتيب .



1) بين أن المستقيمين (MN) و (BK) متعامدان

نأخذ $K(x;x)$ في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

2) هل المستقيمان (BM) و (CN) متعامدين؟علل.

62 في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقطتين $A(-2;-2)$ و $B(1;1)$.

1) عين النقط M من $\left(O;\vec{i}\right)$ حيث يكون المستقيمان (AM) و (BM) متعامدان.

2) عين النقط N من $\left(O;\vec{j}\right)$ حيث يكون المثلث ABN قائما في N .

3) نرمز بـ M_1 و N_1 إلى النقطتين المحصلتين عليهما سابقاً .بين أن الرباعي AM_1BN_1 مربع.

63 $ABCD$ مربع طول ضلعه 4. نعرف النقطتين I و J كما يلي: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

نضع $\vec{u}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1) بين أن المعلم $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ متعامد ومتجانس وعين احداثيي النقط A ، B ، C ، D و J .

2) لتكن M نقطة . المستقيم (CD) معرف بـــ :

$\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DC}$

أ) عين إحداثيي النقطة M في المعلم $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$.

ب) عين وضعية النقطة M بحيث يكون المستقيم (BM) عمودي على المستقيم (IJ)

بالنسبة للتمارين من **60** إلى **76** المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

64 نعتبر النقط $A(-2;0)$ ، $B(2;1)$ و $C(-3;3)$

1) عين معادلة الارتفاع المار بـ A في المثلث ABC .

2) عين معادلة لمحور القطعة $[BC]$

65 عين معادلة ديكارتية للمستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية:

أ) (D) يشمل $A(2;-1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له.

ب) (D) يشمل $A(-\sqrt{2};1)$ و عمودي على المستقيم (BC) حيث $B(-2;1)$ و $C(5;2)$

جـ) (D) يشمل O و عمودي على المستقيم الذي معادله $2x+3y-6=0$

66 D_1 و D_2 مستقيمان معادلتاهما على الترتيب:

$y=2x+1$ و $y=-\frac{x+3}{2}$

1)عين شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ لـ D_1 و شعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ لـ D_2

2) احسب $\vec{n_2}$. $\vec{n_1}$.

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين D_1 و D_2 ؟

67 ABC مثلث حيث $A(5;-2)$ ، $B(2;-1)$ و $C(1;3)$.

1) عين معادلة للارتفاع المار بـ A .

2) عين معادلة للارتفاع المار بـ B .

3) عين إحداثيي نقطة تقاطع الارتفاعات.

68 A و B نقطتان إحداثييهما على الترتيب $(-1;1)$ و $(3;-1)$.

1) ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ ؟

2) عين معادلة لهذه المجموعة.

69 A و B نقطتان احداثييهما على الترتيب $(-3;2)$ و $(2;0)$.

1) عين معادلة الدائرة التي قطرها $[AB]$.

2) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في النقطة B

70 لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$.

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) عين معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC.

3) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A.

71 (D) المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ و A النقطة التي احداثييها $(2;3)$.

نرمز بــ H إلى المسقط العمودي للنقطة A على (D).

1) ماذا يمكن القول عن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ ؟

2) عين احداثيي النقطة H.

3) احسب المسافة AH.

72 لتكن النقط $A\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ ، $B(-1;3)$ و $C(5;-1)$

H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

1) عين شعاع $\vec{n}$ ناظميا على (BC).

2) احسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ بطريقتين.

3) استنتج المسافة AH

73 لتكن $A\left(0;\frac{9}{2}\right)$ و (D) المستقيم الذي معادلته $4x+3y-1=0$.

1) عين معادلة المستقيم Δ العمودي على (D) و الذي يشمل A.

2) عين احداثيي نقطة تقاطع Δ و (D).

3) استنتج المسافة بين A و (D).

74 لتكن $\Omega(3;-2)$ و (D) المستقيم الذي معادلته $x-3y+1=0$.

1) عين المسافة بين Ω و (D).

2) استنتج معادلة للدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D)

75 عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة للدائرة (C)

أ) (C) مركزها $A(-1;2)$ و نصف قطرها $R=3$.

ب) (C) تشمل النقط $A(4;1)$ ومركزها $B(2;3)$.

جـ) (C) قطرها $[AB]$ حيث $A(2;1)$ و $B(4;-1)$

76 (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-10x+4y+23=0$

ما هي طبيعة المجموعة (E)؟ أعط عناصرها المميزة

77 الهدف من هذا التمرين هو البرهان باستعمال الجداء السلمي أن الارتفاعات في مثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

ليكن ABC مثلثا. A' ، B' و C' المسا قط العمودية للنقط A ، B و C على (BC) ، (AC) و (AB) على الترتيب. H نقطة تقاطع (BB') و (CC').

1) ما هي قيمة الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$.

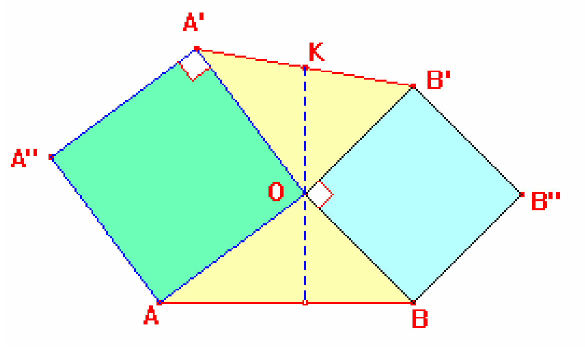
2) احسب $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$. استنتج

78 $ABCD$ مستطيل و M نقطة كيفية من المستوى.

بين أن: $MD^2MC^2=MA^2+MB^2$.

79 في معلم متعامد و متجانس مركزه O نعتبر مثلثا OAB في الاتجاه المباشر. نرسم خارج هذا المثلث المربعين $OAA''A'$ و $OBB''B'$

لتكن K منتصف $[A'B']$ (انظر الشكل المقابل)



1) برهن أن الزاويتين $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ و $(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA'})$ متكاملتان.

2) بين أن $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB}$.

3) احسب $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}$.

استنتج أن المتوسط الذي يشمل O في المثلث $OA'B'$ هو الارتفاع الذي يشمل O في المثلث OAB.

4) برهن أن المستقيمين (AB') و $(A'B)$ متعامدان

80 $ABCD$ مستطيل طوله L و عرضه l. لتكن H و K المسقطان العموديان لــ B و D على (AC) على الترتيب.

1) احسب HK بدلالة L و l .

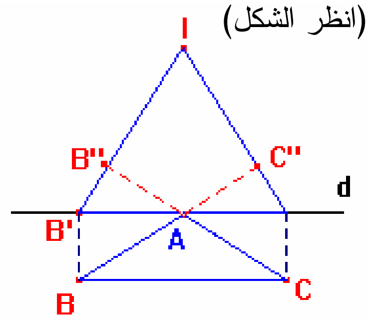
(يمكن استعمال الجداء السلمي $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$)

2) كيف نختار L و l حتى يكون $AC=2HK$ ؟

عبر إذن عن مساحة متوازي الأضلاع $BHDK$ بدلالة مساحة المستطيل $ABCD$

81 ABC مثلث و d مستقيم يشمل A . B' المسقط العمودي لــ B على d . C' المسقط العمودي لــ C على d . $B"$ المسقط العمودي لــ B' على (AC) $C"$ المسقط العمودي لــ C' على (AB)

نفرض أن المستقيمين $(B'B")$ و $(C'C")$ يتقاطعان في I . (انظر الشكل)



1) بين أن :

أ) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}$

ب) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'}$

2) استنتج أن المستقيمين (AI) و (BC) متعامدان

82 في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ (C) هي الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

T نقطة احداثياها $(3;4)$

1) أ) عين احداثيي النقطة Ω مركز الدائرة (C) و نصف قطرها .

ب) ارسم الدائرة (C) . مثل T .

2) نرسم من T المماسين للدائرة (C) و نسمي A_1 و A_2 نقطتي التماس.

أ) بين أن A_1 و A_2 تنتميان إلى الدائرة (C') ذات القطر $[\Omega T]$.

ب) أعط معادلة للدائرة (C').

جـ) عين احداثيي A_1 و A_2 .

د) عين معادلة لكل مماس.

83 ABC مثلث I ، J و K منتصفات القطع $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب .

بين أن :

$$AI^2+BJ^2+CK^2=\frac{3}{4}\left(AB^2+AC^2+BC^2\right)$$

المحل الهندسي

84 ABC مثلث. ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ؟

85 A و B نقطتان من المستوي حيث $AB=4$.

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث $MA^2+MB^2=16$ ؟

A و B نقطتان متمايزتان من المستوي.

86 ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:

أ) $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ ؟

ب) $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ ؟

87 A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$

1) بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون:

$$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$$

2) نفرض أن $AB=1$

– عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$$MA^2-MB^2=2$$

88 لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي و G مرجح $(A;3)$ و $(B;2)$ حيث $AB=5$.

1) أ) اكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$$

– بين أن $G\in(E)$

– برهن أن (E) هي المستقيم العمودي على (AB) في G.

2) حدد (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$MA^2+MB^2=7$$

89 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي .

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$$ ؟

90 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث $AB=1$. ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}$ ؟

91 EFG مثلث قائم في E حيث $EF=3$ و $EG=4$

1) أنشئ D مرجح $(F;4)$ و $(G;3)$ و H مرجح $(F;4)$ و $(G;-3)$.

2) ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(4\overrightarrow{MF}+3\overrightarrow{MG}\right).\left(4\overrightarrow{MF}-3\overrightarrow{MG}\right)=0$ ؟

3) بين أن النقطة E تنتمي إلى هذه المجموعة.

92 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث $AB=2$. لتكن G مرجح $(A;3)$ و $(B;1)$

1) أنشئ G ثم احسب AG و GB

2) بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي :

$$3MA^2+MB^2=4MG^2+3$$

3) عين المجموعة (E)، مجموعة النقط ا M من المستوي حيث $3MA^2+MB^2=4$

4) تحقق أن A تنتمي إلى (E)

93 A و B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث $AB=2$. نريد أن نبحث عن المحل الهندسي (E) للنقط M حيث $\frac{MA}{MB}=3$

أ) بين أن $M\in(E)$ يكافئ $MA^2-9MB^2=0$

ب) لتكن G مرجح $(A;1)$ و $(B;3)$ و K مرجح $(A;1)$ و $(B;-3)$

بين أن G و K تنتميان إلى (E) .

جـ) عبر عن MA^2-9MB^2 بدلالة $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{MK}$.

د) استنتج طبيعة المحل الهندسي (E)

نرمز إلى المستوي بالرمز (P) و نعتبر في معلم متعامد و متجانس النقط $A(0;2)$ ، $B(-1;0)$ و $C(0;-3)$

نعتبر المجموعتين:

$D=\left\{M\in(P)/MA^2-MB^2=k\right\}$ حيث $k\in\mathbb{R}$

و $D'=\left\{M\in(P)/MA^2-2MB^2=k'\right\}$ حيث $k'\in\mathbb{R}$

بين أن (D) و (D') مستقيمان متعامدان .

94 في معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $A(0;1)$ $B(1;0)$ ، $C(-1;2)$ و $D\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ و نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $MB=2MA$

1) بين أن $M\in(\Gamma)$ يكافئ $3x^2+3y^2+2x-8y+3=0$

2) بين انه من أجل كل M من (Γ)، المثلث MCD قائم في الزاوية M

95 ABC مثلث قائم في A حيث $AB=3$ و $AC=4$. الهدف من هذا التمرين هو تعيين المجموعة ع ، مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$MA^2-2MB^2+3MC^2=K$ حيث $k\in\mathbb{R}$

I) باستعمال الأشعة:

1) ليكن G مرجح $(A;1)$، $(B;-2)$ و $(C;3)$

أ) ارسم شكلا و مثل النقطة G.

ب) احسب GA^2 ، GB^2 و GC^2

2) بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي :

$$MA^2-2MB^2+3MC^2=2MG^2+GA^2-2GB^2+3GC^2$$

3) عين المجموعة ع من أجل القيم التالية لـــ k

أ) $k=14$ ، ب) $k=-60$ جـ) $k=-100$

4) عين طبيعة المجموعة ع تبعا لقيم k

II) باستعمال الإحداثيات

نضع $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) ما هي احداثيات النقط A ، B و C ؟

2) نرمز بـــ$(x;y)$ إلى احداثيي النقطة M

اكتب $MA^2-2MB^2+3MC^2$ بدلالة x و y .

3) عين المجموعة من أجل القيم التالية لـــ k

أ) $k=14$ ، ب) $k=-60$ جـ) $k=-100$

العلاقـــات المترية

96 ABC مثلث حيث : $AB=6$ ، $BC=5$
و $AC=7$.
أحسب أطوال متوسطات هذا المثلث .

97 ABC مثلث حيث : $AB=7$ ، $BC=8$
و $AC=5$. J نقطة معرفة بــ : $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.
أ) أحسب المسافة AJ .
ب) أحسب $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JC}$.
ج) عين قيمة مقربة إلى درجة واحدة للزاوية $\widehat{AJC}$.

98 ABC مثلث ، I ، J ، K منتصفات القطع
$[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$.
أثبت أن

$$AI^2+BJ^2+CK^2=\frac{3}{4}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

99 $ABCD$ مستطيل مركزه I .
برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوى لدينا :
$MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.

100 لتكن A و B نقطتين من المستوى حيث $AB=5$
عين ومثل مجموعة النقط M التي تحقق :

$$MA^2-MB^2=-15$$

101 ABC مثلث متساوي الساقين رأسه C .
1) عين ومثل المجموعة (D) للنقط M من المستوى
حيث : $MA^2-MB^2=0$.
2) عين ومثل المجموعة (D') للنقط N من المستوى
حيث : $NC^2-NB^2=AC^2$
3) تحقق من أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (D') .

102 ABC مثلث حيث :
$AB=2cm$ ، $AC=6cm$ و $\widehat{A}=45°$.
أحسب الطول BC .

103 ABC مثلث علم AB و AC والزاوية $\widehat{A}$ مقدرة بالراديان . في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه أحسب الطول BC .

$AB=2$ ، $AC=6$ و $\widehat{A}=\frac{2\pi}{3}$.
$AB=2\sqrt{2}$ ، $AC=3$ و $\widehat{A}=\frac{\pi}{4}$.

104 ABC مثلث حيث : $AB=2$ ،
$BC=2(1+\sqrt{3})$ و $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$.
1) أحسب الطول AC .
2) عين الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ للمثلث ABC .
3) استنتج قيمة لــ $\cos\frac{\pi}{12}$.

105 ABC مثلث حيث : $AB=7$ ، $BC=8$
و $AC=10$.
1) أحسب زوايا المثلث ABC . (تعطى النتائج مدورة إلى العشر) .
2) أحسب مساحة المثلث ABC .

في التمارين الآتية ، ليكن ABC مثلث ونستعمل مبرهنة الكاشي .

105 1) برهن أن المساحة S للمثلث ABC تكتب على الشكل : $S=\frac{1}{2}AC\times AB\times\sin\widehat{A}$.
2) استنتج العلاقتان المماثلة للسابقة واستنتج القاعدة المتعلقة بالجيوب :

$$\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=\frac{AB\times AC\times BC}{2S}$$

3) تطبيقات :
أ) يعطى $BC=6$ ، $\widehat{B}=45°$ و $\widehat{C}=75°$.
عين القيمة الحقيقية لكل من AB و AC باستعمال العلاقة $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{A}$.
ب) نضع $AB=x$ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية $(10,5)^2=x^2+12^2-(10,5)\times12$
ج) إذا كان $AB=10,5$ ، $AC=12$ و $\widehat{C}=60°$ فما هو عدد المثلثات الممكنة لهذه الحالة ؟ وهل هي متقايسة ؟

106 المسافة بين النقطتين A و B هي $10\,km$
ويعطى $\widehat{CAB}=39,6°$ و $\widehat{ABC}=65,7°$
أحسب الطول AC

107 1) يعطى $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ،
برهن أن $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
2) الزوايا معطاة بالرديان أملأ الجدول التالي باستعمال القيم المضبوطة ثم أنشئ المثلث ABC المناسب .

			$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
			$\dfrac{\pi}{3}$		
				$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$			

دساتير التحويل في حساب المثلثات

108 بملاحظة $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$ أحسب القيم المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.
استنتج $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.
أحسب $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

109 أكتب بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ كل من العبارات الآتية:
$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ، $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ، $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ ، $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

110 برهن باستعمال دساتير الجمع أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ ؛ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

111 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :
$$\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$$
المضبوطتين لكل من $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

112 برهن أنه من أجل كل عددين حقيقيين α و β لدينا:
أ) $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$
. $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$
ب) $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$
. $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

113 برهن أنه من أجل كل عددين حقيقيين α و β لدينا:
أ) $2\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha-\sin 2\beta$
ب) $2\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\cos 2\beta-\cos 2\alpha$

114 x عدد حقيقي حيث $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ و $\cos x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
أحسب $\cos 2x$ ثم استنتج قيمة للعدد x .

115 أكتب بدلالة $\sin 2x$ كل من العبارتين التاليتين :
$(\cos x+\sin x)^2$ ؛ $(\cos x-\sin x)^2$.

116 x عدد حقيقي يختلف عن الأعداد من الشكل $k\dfrac{\pi}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. برهن أن : $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}-\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$.

117 α و β عددان حقيقيان من المجال $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ حيث:
$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ و $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$.
أ) أحسب كل من $\sin\alpha$ و $\sin\beta$.
ب) أحسب كلا من $\cos(2\alpha-\beta)$ و $\sin(2\alpha-\beta)$.

118 أ) عبر عن كل من $\cos^2\alpha$ و $\sin^2\alpha$ بدلالة $\cos 2\alpha$
ب) عبر بدلالة $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ، عن العبارة :
$$\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$$
ج) عبر بدلالة $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ، عن العبارة :
$$\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\ .$$

119 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :
أ) $\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x=0$.
ب) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$.
ج) $\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x=1$.

مسـائـل

120 ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A .
O منتصف القطعة $[BC]$ ، و H المسقط العمودي للنقطة O على $[AC]$. I منتصف $[OH]$.
برهن أن المستقيمين (AI) و (BH) متعامدان .

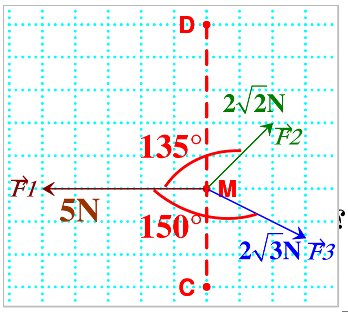
121 $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 6 ومركزها I .
نريد تعيين المجموعة Γ للنقط M من المستوي حيث $MB = 2MA$.

1) برهن أنه توجد نقطتين R و S من المستقيم (AB) تحققان العلاقة $MB = 2MA$ وعرّفهما كمرجح للنقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) برهن أن $MB = 2MA$ تكافئ :
$(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA})=0$.

3) باستعمال النقطتين R و S ، عيّن المجموعة Γ ثم أنشئها .

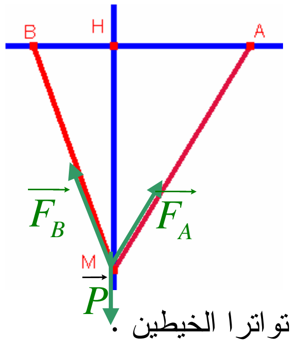
122 نقول عن جسم أنه في توازن إذا كان مجموع القوى معدوما .



1) جسم M متعرض إلى ثلاث قوى كما هو مبين في الشكل .

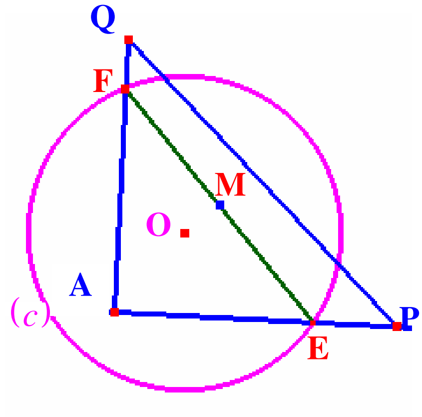
أ) هل الجسم في توازن ؟

ب) عين العمل لمحصلة القوى $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$ إذا كان الجسم يتحرك من D إلى C ، حيث $DC = 4\,cm$



2) جسم M كتلته m مثبت بخيطين معلقين في عريضة أفقية في A و B . الجملة في توازن أي : $\vec{P}+\vec{F_A}+\vec{F_B}=\vec{0}$ ، حيث $\vec{P}$ هو ثقل الجسم ، $\vec{F_A}$ $\vec{F_B}$ توابرا الخيطين .
يعطى $\|\vec{P}\|=50$ ، $\|\vec{F_A}\|=35$ و $\|\vec{F_B}\|=40$.
عين زوايا المثلث ABM .

123 (c) دائرة مركزها O ونصف قطرها 8 .
A نقطة ثابتة داخل الدائرة (c) حيث $OA = 5$.
رأس الزاوية القائمة لكوس APQ ، مثبت في النقطة A ويدور حولها . المستقيمان (AP) و (AQ) يقطعان الدائرة (c) في النقطتين E و F على الترتيب .
M منتصف القطعة $[EF]$.



نريد البحث عن المحل الهندسي للنقطة M .

1) باستعمال مبرهنة المتوسط في المثلث OEF ، بيّن أن النقطة M تحقق العلاقة $OM^2+AM^2=64$.

2) عين إذن مجموعة النقط M المطلوبة .

124 في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$ نعتبر الدائرتين (C_1) و (C_2) المعرفتين بمعادلتيهما الدكارتيتين التاليتين :

$$(C_1): x^2+y^2+4x-y-2=0$$

$$(C_2): x^2+y^2-6x-6y-7=0$$

1) عين مركز ونصف قطر لكل من الدائرتين (C_1) و (C_2) .

2) برهن أن الدائرتين (C_1) و (C_2) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب إحداثيي كل منهما.

3) برهن أنه في كل نقطة من النقطتين A و B المماسين للدائرتين (C_1) و (C_2) هما مستقيمان متعامدان .

125

في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعرف النقطة $A(-2\,;5)$ و المستقيم (d) ذي المعادلة $y=-3x+1$

الهدف هو حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (d) باستعمال طريقتين .

الطرقة الأولى :

نعين النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (d) .

أ) عين معادلتين تربط بين إحداثيي النقطة H . ثم أحسب إحداثيي النقطة H .

ب) عين المسافة AH .

الطريقة الثانية :

أ) أثبت أن النقطة $B(1\,;-2)$ تنتمي إلى المستقيم (d)

ب) نضع $\vec{u}(1\,;-3)$ ، تحقق أن $\vec{u}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (d) .

اشرح لماذا القول أن M تنتمي إلى (d) راجع إلى إيجاد عدد حقيقي k حيث : $\overrightarrow{BM}=k.\vec{u}$.

ج) جد القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(k)=10k^2+48k+58$. أحسب AM^2 .

د) استنتج .

126 في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر المستقيم (D) ذي المعادلة $3x-2y+1=0$ النقطة $A(2\,;1)$.

أ) أرسم المستقيم (D) و علم النقطة A

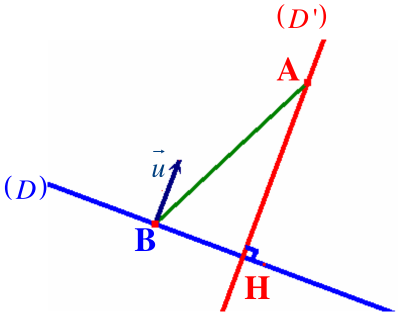
ب) أكتب معادلة للمستقيم (D') العمودي على (D) والذي يشمل النقطة A .

ج) أحسب إحداثيي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

د) استنتج المسافة AH (تسمى المسافة بين النقطة A والمستقيم (D))

I) الحالة العامة :

(D) هو المستقيم المار بالنقطة B ويقبل $\vec{u}$ كشعاع ناظمي له . ولتكن A نقطة كيفية من المستوي نريد تعيين المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) ، أي لمسافة AH حيث H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .



أ) برر المساواة $\overrightarrow{BA}.\vec{u}=\overrightarrow{HA}.\vec{u}$.

ب) برهن إذن المسافة المطلوبة معطاة بالمساواة التالية:

$$AH=\frac{|\overrightarrow{BA}.\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}\ .$$

تطبيق عددي :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

أ) أحسب المسافة بين النقطة $A(6\,;4)$ و المستقيم (D) ذي المعادلة $y=2x-3$.

ب) تعطى النقط $E(2;0)$ ، $F(-1;1)$ و $G(3;4)$ ولتكن H المسقط العمودي للنقطة E على (FG) .

أحسب المسافة EH ، استنتج أن EFG هو عبارة عن مثلث يطلب حساب مساحته .

II) العبارة التحليلية:

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة $ax+by+c=0$ حيث a و b غير معدومين معا ، و $B(x_B\,;y_B)$ نقطة من (D) .

نضع $\vec{u}(a;b)$ كشعاع ناظمي للمستقيم (D) ، و $A(x_A\,;y_A)$ نقطة من المستوي.

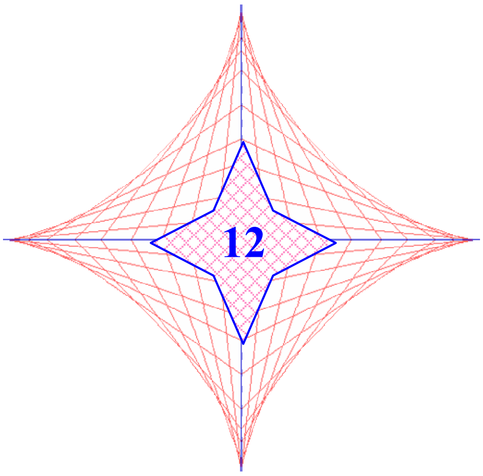
أ) أحسب $\|\vec{u}\|$ بدلالة العددين a و b .

ب) برهن أن $|\overrightarrow{BA}.\vec{u}|=|ax_A+by_A+c|$.

ج) استنتج العلاقة : $d=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ حيث d هي المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) .

تطبيق عددي :

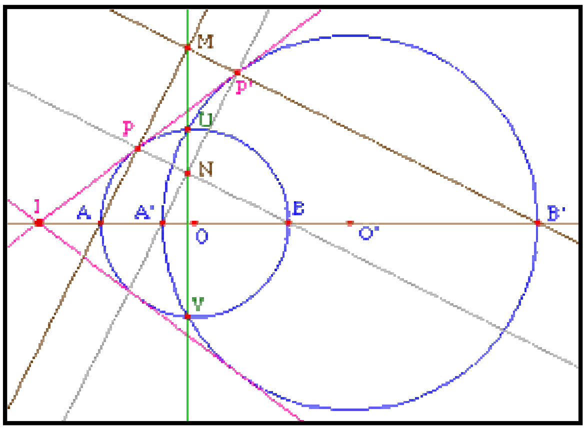
برهن أن النقطة $A(1\,;1)$ هي مركز الدائرة المحيطة (المرسومة داخل المثلث) OIJ حيث : $O(0;0)$ ، $I(2+\sqrt{2}\,;0)$ و $J(0\,;2+\sqrt{2})$.



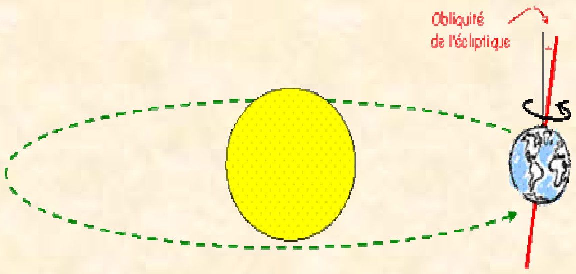
التحويلات النقطية في المستوي

التحاكي

الكفاءات المستهدفة



- استعمال خواص التحاكي لإثبات استقامية نقط.
- توظيف التحويلات النقطية في حل مسائل هندسية.
- تعيين محل هندسي.
- حل مسائل حول الإنشاءات الهندسية.



ولد ايراتوستان $\left(Eratosthene \right)$ بمدينة $\left(Cyrène \right)$ حاليا بليبيا حوالي 276 قبل الميلاد. انتقل إلى أثينا و فيها درس الرياضيات، علم الفلك، الجغرافيا و الشعر ثم انتقل إلى الإسكندرية ليتولى تسيير مكتبتها بعد وفاة " كاليماك " و ذلك حوالي 240 قبل الميلاد.

من أهم مؤلفاته في الرياضيات نذكر "*Platonicus*" الذي قدم فيه تعاريف في الهندسة و الحساب. و قد اشتهر بطريقته التي تسمح بالحصول على الأعداد الأولية بإقصاء تدريجيا مضاعفات الأعداد الأولية الأولى. $\left(Crible\ d'Eratosthene \right)$.

في علم الفلك تمكن من حساب الزاوية بين محور الكرة الأرضية ومحور دورانها حول الشمس بدقة كبيرة.

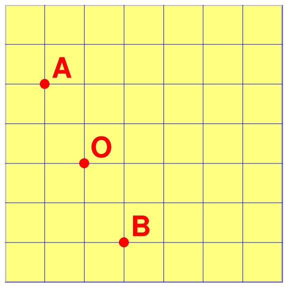
أما في الجغرافيا فقد وضع خريطة للعالم و تمكن من حساب محيط للكرة الأرضية حوالي 205 قبل الميلاد.وقد توفي بالأسكندرية حوالي 194 قبل الميلاد.

Erathosthène de Cyrène
Grec (-276 ; -194)

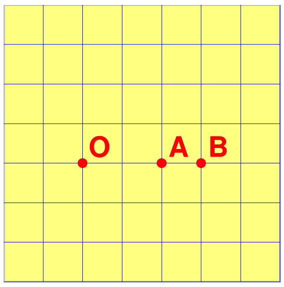
نشاط أول

✍ عين العدد الحقيقي k (في حالة وجوده) و الذي يحقق $\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OA}$

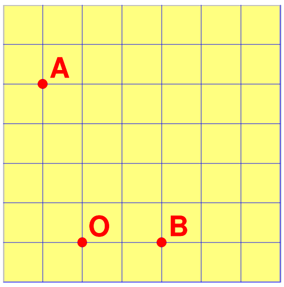
(1)



(2)

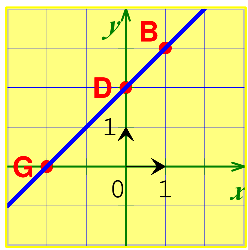


(3)

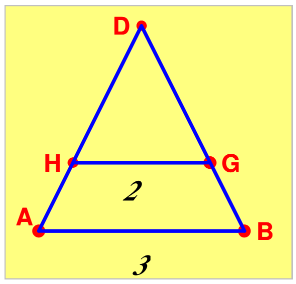


✍ عين العدد الحقيقي k (في حالة وجوده) و الذي يحقق $\overrightarrow{GD} = k\,\overrightarrow{GB}$

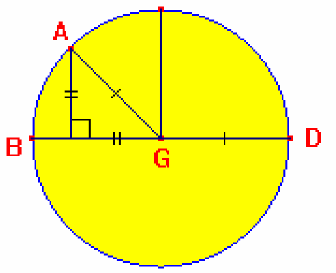
(1)



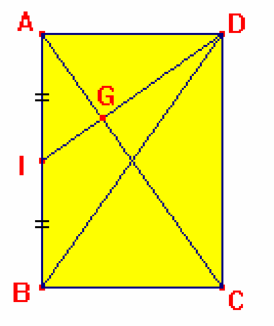
(2)



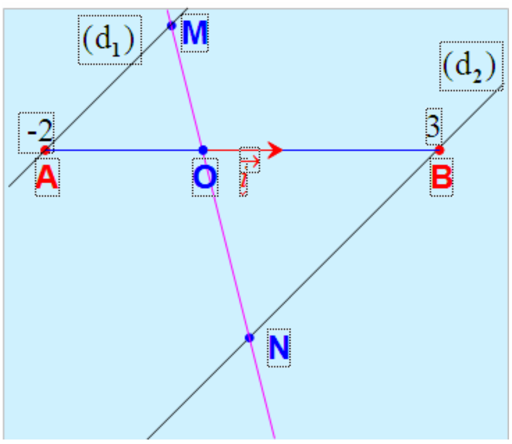
(3)



(4)



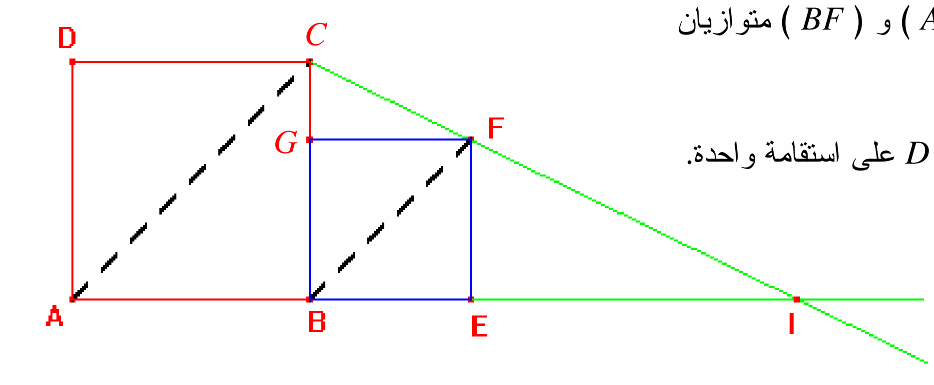
✍ في الشكل (5) نعتبر المستقيمين المتوازيين (d_1) و (d_2) ، عين العدد الحقيقي k حتى تكون النقطة O مرجحاً للجملة $\{ (M , 1) ، (N , k) \}$



(5)

نشاط ثان

نعتبر المربعين $ABCD$ و $BEFG$ اللذين طولي ضلعيهما 3 و 2 على الترتيب



1- بين أن المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان

2- تحقق أن : $\overrightarrow{IB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$

3- أثبت أن النقط I ، G ، D على استقامة واحدة.

نشاط ثالث

ABC مثلث . M نقطة معرفة بالعلاقة الشعاعية $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

المستقيم الموازي لــ (AC) و المرسوم من M يقطع (BC) في النقطة N

المستقيم الموازي لــ (AB) و المرسوم من N يقطع (AC) في النقطة P

☝ تحقق أن النقطة C هي مرجح النقطتين N و B المرفقتين بالمعاملين 3 و (-1) على الترتيب

✌ نرمز بالرمزين S_1 و S_2 لمساحتي المثلثين NPC و MBN على الترتيب .

- أثبت أن $S_1=\frac{1}{4}S_2$

نشاط رابع

(C) دائرة مركزها O ، $[AB]$ قطرها .

نعتبر النقطة I حيث : $\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AO}$. M نقطة من الدائرة (C) تختلف عن A و عن B ، M' نظيرة M بالنسبة للمركز ، N نقطة تقاطع المستقيمين (IM) و (BM') .

1- ما طبيعة الرباعي $AMBM'$ ؟

2- بين أن المثلثين IAM و IBN متشابهان .

3- عين العدد الحقيقي k الذي يحقق $\overrightarrow{IN}=k\overrightarrow{IM}$

4- بين أنه لما تمسح النقطة M الدائرة (C) فإن N تمسح دائرة (C') مركزها O' حيث $\overrightarrow{IO'}=k\overrightarrow{IO}$ و نصف قطرها $R=k.OM$.

1- تعريف

O نقطة من المستوى ، k عدد حقيقي غير معدوم

نسمي تحاكيا h مركزه O و نسبته k ، و نرمز له بالرمز $h(O,k)$ ، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$

النقطة M' هي صورة M بالتحاكي : $M' = h(M)$ أو $M \xrightarrow{h} M'$

نتائج :
- النقط O , M , M' على استقامة واحدة و $OM' = |k|.OM$
- صورة النقطة O هي النقطة نفسها (O نقطة صامدة)

2- الخاصّة المميِّزة

مبرهنة ①

h تحاكي مركزه O و نسبته k ، A و B نقطتان. A' و B' صورتاهما على الترتيب بالتحاكي h .

لدينا : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

البرهان :

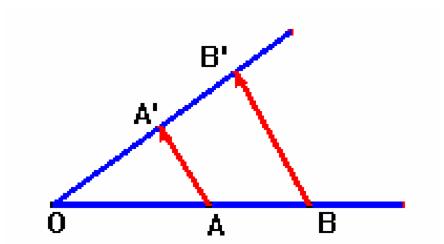
$h(A) = A'$ و $h(B) = B'$

أي $\overrightarrow{OA'} = k.\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB'} = k.\overrightarrow{OB}$ ....(1)

لكن : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$

(1) معناه $\overrightarrow{A'B'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

أي $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$



نتائج :

❶ بما أن $k \neq 0$ فإنه إذا كانت A تختلف عن B فإن A' تختلف عن B' و بالتالي (AB) يوازي $(A'B')$

❷ من أجل كل نقطتين A و B يكون $A'B' = |k|AB$

❸ إذا كان G مرجح الجملة $\{(A, \alpha)$ و $(B, \beta)\}$ فإن صورته بالتحاكي هي G' مرجح الجملة $\{(A', \alpha)$ و $(B', \beta)\}$.

- برهان النتيجة ❸ :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ لكن $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$

و منه : $\alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'} = k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

(نقول أن التحاكي يحافظ على المرجح لجملة)

تمرين محلول 1

I ، N ، N' نقط من المستوي حيث N' صورة N بالتحاكي $h(I\,,-2)$.

1- أكتب العلاقة الشعاعية .

2- A مرجح الجملة $(C\,,1)$ و $(B\,,-k)$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم يختلف عن 1

① تحقق أن C صورة B بتحاك يطلب تعيين عناصره المميّزة (المركز و النسبة)

② بيّن أن B صورة C بتحاك يطلب تحديد عناصره .

حــــل:

1- العلاقة الشعاعية هي :

$$\overrightarrow{IN'} = -2\,\overrightarrow{IN}$$

المركز الصورة النسبة المركز النقطة

لماذا يوجد بالضرورة تحاك k مركزه A يحول B إلى C عندما تكون النقط A,B,C على استقامة واحدة؟

لأن : استقامية النقط تعني وجود k وحيد غير معدوم يحقق $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (k وحيد ، h وحيد)

2- ① A مرجح الجملة $(C\,,1)$ و $(B\,,-k)$ يعني $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته k . نضع $B' = h(B)$ أي $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ و منه $B' = C$

نستنتج أن C صورة B بالتحاكي h الذي نسبته h و مركزه A (استنتج حلا للسؤال ②)

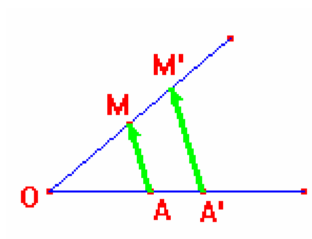
تمرين محلول 2

O ، A ، A' ثلاث نقط على استقامة واحدة . h التحاكي الذي مركزه O و يحوّل A الى A' .

أنشئ M' صورة النقطة M بالتحاكي h في كل حالة من الحالتين :

1- M لا تنتمي الى المستقيم (OA) 2- M نقطة من (OA) تختلف عن O و عن A .

حــــل:

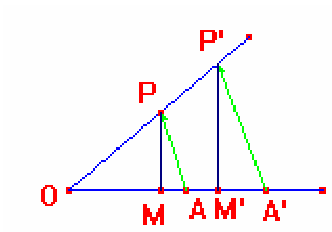


1- $M' = h(M)$ و منه M' نقطة من (OM)

لكن $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ (حسب الخاصية المميزة)

و حسب النتيجة (1) من المبرهنة (1) يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ متوازيين

و منه M' نقطة من (AM) المستقيم الموازي لــ (AM) و المرسوم من A' .



2- M نقطة من (OA) للحصول على M'

نعتبر نقطة P لا تنتمي الى المستقيم (OA) ننشئ P' صورة P

بالتحاكي (P' نقطة تقاطع (OP) مع الموازي لــ (AP) المرسوم من A')

ثم نرسم الموازي لــ (PM) من النقطة P' نحصل على النقطة M' تنتمي الى (OA)

1- صورة مستقيم بواسطة تحاكي :

مبرهنة ②

صورة مستقيم (d) بتحاك هي مستقيم (d') يوازي (d)

تذكير

مستقيم (CD) هو مجموعة النقط M مرجحات $(C, 1-\alpha)$ و (D, α) لما تأخذ α كل القيم على $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية .

برهان② : نختار نقطتين A و B على المستقيم (d) بحيث A تختلف عن B .

لتكن A' و B' صورتيهما على الترتيب بالتحاكي h . نعلم أن $(A'B')$ يوازي (AB)

* (d) هي مجموعة النقط $(A, 1-\alpha)$ و (B, α) لما تمسح α مجموعة الأعداد الحقيقية

لكن التحاكي يحافظ على المرجح و منه $h(M) = M'$ هو مرجح لجملة $(A', 1-\alpha)$ و (B', α)

و منه (d') صورة (d) هي مجموعة النقط M' لما تمسح α المجموعة $\mathbb{R}$ فهي المستقيم $(A'B')$

* عندما يكون مركز التحاكي نقطة من (d) فإن (d') هو المستقيم الموازي لـــ (d) و الذي يشمل المركز (المركز صامد) و بالتالي (d') هو (d) .

مبرهنة ③

صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ $(\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A'B'})$

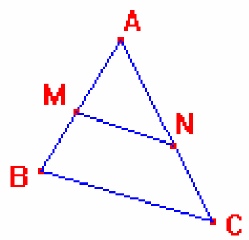
البرهان ③: مما سبق $[AB]$ هي مجموعة مرجحات $(A, 1-\alpha)$ و (B, α) لما تمسح α كل قيم المجال $[0, 1]$ و بالتالي $[A'B']$ هي مجموعة مرجحات $(A', 1-\alpha)$ و (B', α)) لما تمسح α كل قيم المجال $[0, 1]$ $(\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A'B'})$

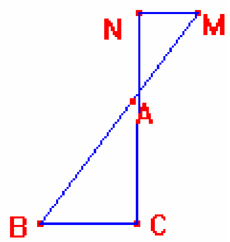
2- المثلثات المتحاكية :

ABC و AMN مثلثان . M نقطة من (AB) و N نقطة من (AC) حيث (MN) يوازي (BC) التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل B الى M يحوّل كذلك C الى N

التحاكي h الذي يحوّل B إلى M يحوّل (BC) إلى المستقيم الذي يشمل M و يوازي (BC) .

و منه فإن صورة C هي نقطة من هذا المستقيم و هي نقطة من (AC) فهي إذن N .





3- صورة دائرة :

مبرهنة ④

صورة دائرة (C) مركزها I و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $I' = h(I)$ و نصف قطرها $r' = |k|r$.

برهان : لتكن M نقطة من (C) فإن $IM = r$ و لتكن $h(M) = M'$ لدينا $I'M' = |k|IM$ أي $I'M' = |k|r$

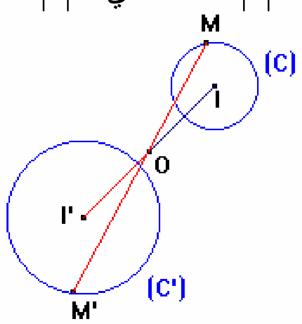
و منه M' هي نقطة من (C') التي مركزها I' و نصف قطرها $|k|r$.

و بالعكس : لتكن N' نقطة من (C') .

هل توجد نقطة من (C) حيث $h(N) = N'$ ؟

لتكن N النقطة التي تحقق $\overrightarrow{I'N'} = k\overrightarrow{IN}$ أي $h(N) = N'$

و اضح أن N تنتمي إلى (C) لأن $I'N' = |k|IN$ أي $IN = r$



تمرين محلول 1

B هو منتصف القطعة [AO] و C منتصف [BO] ، M نقطة لا تنتمي إلى (AB) .
نرسم من B المستقيم (d) الموازي للمستقيم (AM) و من C المستقيم (Δ) الموازي لـ (BM)
لتكن N نقطة تقاطع (d) مع (Δ)
– بين لماذا تكون النقطة N صورة النقطة M بالتحاكي h الذي مركزه O و نسبته $\frac{1}{2}$

حـــل:

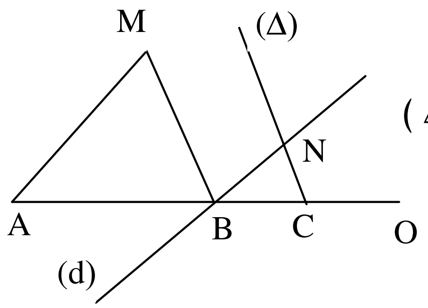
B هو منتصف القطعة [AO] و C منتصف [BO] أي h (B) = C , h (A) = B

لأن $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

و منه صورة (AM) هو المستقيم (d) و كذلك صورة (BM) هو (Δ)

ملاحظة : ومنه $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$. M نقطة تقاطع(AM) و(BM) وN

نقطة تقاطع(d)و(Δ)

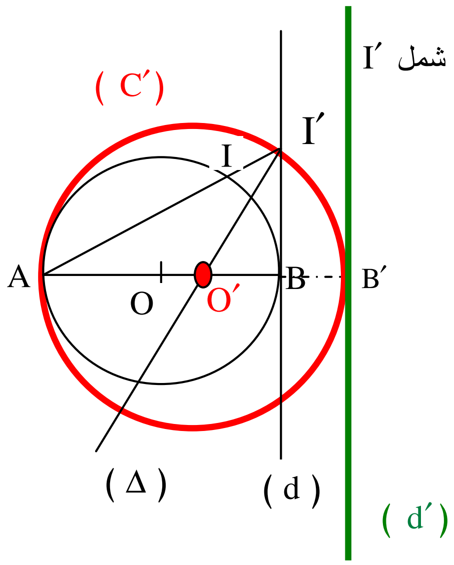


تمرين محلول 2

نعتبر الشكل التالي :
(C) دائرة مركزها O و [AB] قطر لها (d) مماس للدائرة (C) في النقطة B
I نقطة من (C) تختلف عن A و B I′ نقطة تقاطع المستقيمين (AI) و (d)
نعتبر التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل I الى I′
1– أنشئ O′ صورة O بواسطة h .
2– أرسم الدائرة (C′) صورة (C) و كذلك المستقيم (d′) صورة (d) بواسطة h

حـــل:

1– صورة المستقيم (OI) بواسطة h هو مستقيم (Δ) يوازي (OI) و شمل I′
لأن I′ هي صورة I و بالتالي صورة O هي O′ تقع على (Δ)
و من جهة أخرى O′ صورة O تقع على المستقيم (AO)
[استقامية النقط A ، O و O′]
و منه O′ هي نقطة تقاطع (Δ) و (AO)
2– بمعرفة المركز O′ يمكن إنشاء (C′)
A نقطة صامدة كمركز للتحاكي فهي نقطة من (C) و من (C′)
B′ نظيرة A بالنسبة لـ O′ (d′) مماس (C′) في B′



خواص التحاكي :

1. الأطوال و المساحات :

التحاكي الذي نسبته العدد الحقيقي k يضاعف الأطوال $|k|$ مرّة و يضاعف المساحات k^2 مرّة

ملاحظة :

عندما يكون $1 < |k|$ يقوم التحاكي بتكبير الأشكال و عندما يكون $0 < k < 1$ فإن الشكل يصغر $|k|$ مرّة بالتحاكي

مثال : نعتبر الدائرة (C) التي نصف قطرها 3 و التحاكي h الذي نسبته $\frac{1}{2}$.

– محيط الدائرة (C) هو 6π بينما مساحتها فهي 9π

لتكن الدائرة (C') صورة (C) بواسطة التحاكي h . نعلم أن نصف قطر (C') هو $\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$

و بالتالي فإن محيط الدائرة (C') هو 3π و مساحتها $\frac{9}{4}\pi^2$

2. الحفاظ على استقامية النقط :

إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط على استقامة واحدة و كانت A' ، B' و C' صورها على الترتيب بواسطة تحاك h فإن A' ، B' و C' تكون على استقامة واحدة أيضا.

بالفعل ، لأن صورة المستقيم الذي يشمل A ، B و C هو مستقيم يشمل A' ، B' و C'

3. الحفاظ على التوازي :

إذا كان المستقيمان (d) و (Δ) متوازيين فإن صورتيهما بواسطة تحاك h هما مستقيمان (d') و (Δ') متوازيان

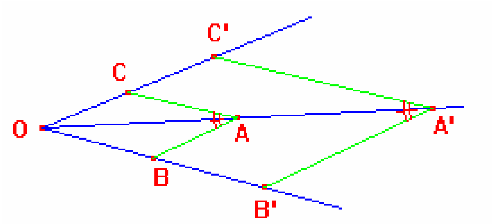
بالفعل ، (d) يوازي (d') و (Δ) يوازي (Δ') و بالتالي (d') يوازي (Δ')

4. الحفاظ على الزوايا الموجّهة :

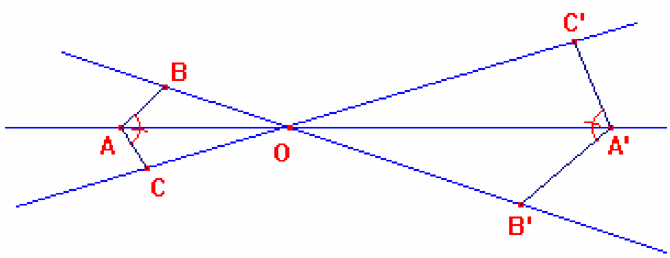
في المستوي الموجه نعتبر النقط A ، B و C صورها بتحاك h هي A' ، B' و C' على الترتيب

لدينا $\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)=\left(\overline{A'B'},\overline{A'C'}\right)$ و $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$

$k > 0$

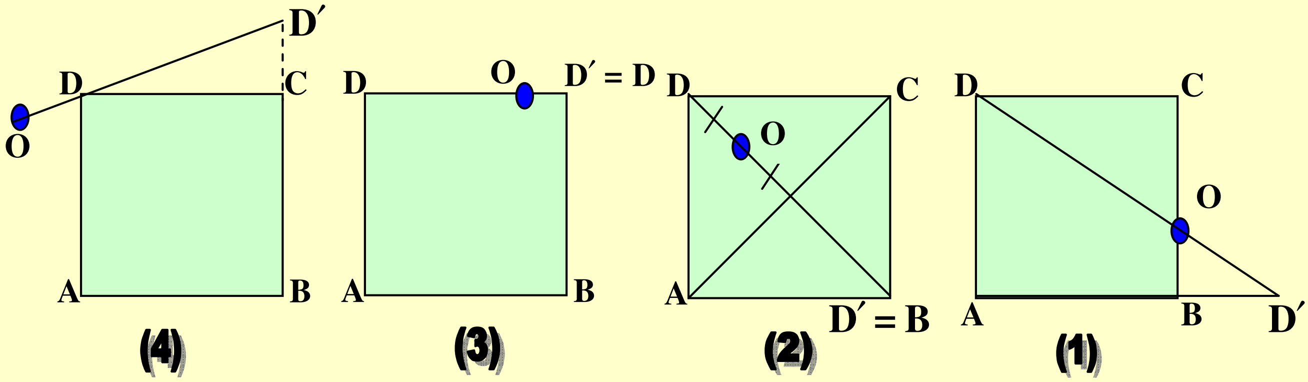


$k < 0$



تمرين محلول 1

في كل حال من الحالات التالية أنشئ صورة المربع ABCD بواسطة التحاكي الذي مركزه O و يحول D الى D′



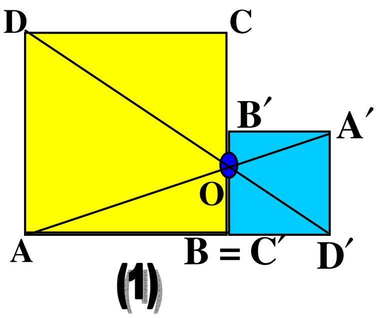
حــــل:

الشكل الأول : لإنشاء المربع يكفي إيجاد صورة النقط A ، D و C مثلا (3 نقط) لأننا نعلم أن صورة مربع بتحاك هو مربع (الحفاظ على الشكل و على التعامد)

* صورة النقطة C هي النقطة C′ التي تقع على المستقيم (CO) ، صورة المستقيم (DC) هو مستقيم (D′C′) يوازي (DC) و يشمل D′ فهو المستقيم (AD′) و بالتالي C′ تقع على (AD′) فهي إذن نقطة تقاطع (CO) و (AD′) و D′ هي B .

* بالمثل A′ صورة A هي نقطة تقاطع المستقيم (AO) مع المستقيم الموازي لــ (AD) و المرسوم من D′

- صورة D هي D′ (معطاة) يمكن إنشاء المربع A′B′C′D′



" تترك بقية الأشكال للقارئ "

تمرين محلول 2

ABC مثلث مركز ثقله G ، A′ ، B′ و C′ منتصفات القطع [BC] ، [AC] و [AB] على الترتيب
H التحاكي الذي مركزه G حيث h (A) = A′ ، h (B) = B′ و h (C) = C′ . نضع M = h(A′) و N = h(B′) و P = h(C′) – قارن بين s و S مساحتي المثلثين MNP و ABC .

حــــل: نسبة التحاكي الذي مركزه G و يحوّل A الى A′ هي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن ($\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$)

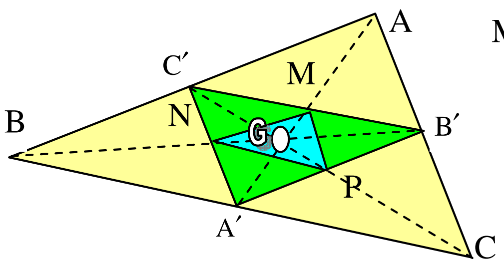
لدينا h (B) = B′ و h (C) = C′ و منه صورة المثلث ABC هو المثلث A′B′C′

لدينا (حسب المعطيات) صورة المثلث A′B′C′ هو المثلث MNP

(لأن M ، N و P هي منتصفات أضلاع المثلث A′B′C′)

نرمز لمساحة المثلث A′B′C′ بالرمز S′

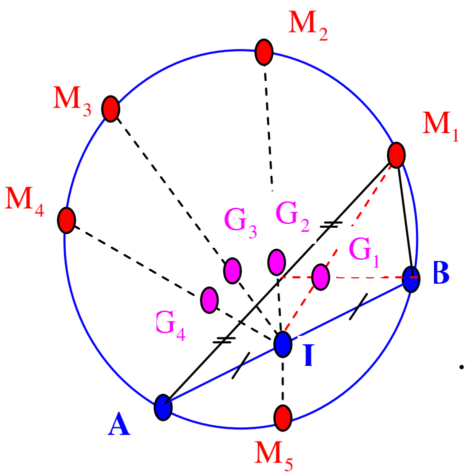
لدينا إذن S = 4S′ و S′ = 4s و بالتالي **S = 16s**



تعيين محل هندسي

(C) دائرة مركزها O . A ، B نقطتان من (C) ، M نقطة متغيرة على الدائرة (C) تختلف عن A و B
(أي أن M تأخذ كل الوضعيات على (C) عدا A و B) .
I منتصف $[AB]$ ، G مركز ثقل المثلث ABM (أي أن G مرجح $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(M,1)$)
الهدف : تعيين المحل الهندسي (L) للنقطة G لما تمسح M الدائرة (C) عدا النقطتين A و B .
بعبارة أخرى : تعيين مجموعة النقط G (باعتبار أن G تتغير بتغير M)

❶ **التخمين** : العناصر الثابتة هي : الدائرة (C) ذات المركز O . النقطتان A و B و المنتصف I .
نختار عدة وضعيات للنقطة M و نحدّد وضعيات G المناسبة لها نحصل على النقط $G_5;G_4;G_3;G_2;G_1$
ليست على استقامة واحدة .
تبدو النقط على دائرة (C') أو جزء منها



❷ إثبات التخمين :
نبحث عن العلاقة بين G و M و النقط الثابتة .
النقط I ، G ، M على استقامة واحدة
1- أثبت أن G صورة M بتحاك h مركزه I يُطلب تحديد نسبته k .
2- تعيين المحل الهندسي (L) للنقطة G
هو تعيين صورة (C) عدا A و B بالتحاكي h .
3- عين عندئذ (L) ، حدد النقطة $h(O)$ ثم أنشئ (L)

تعليق: توظيف تحويل نقطي في تعيين مجموعة نقط (محل هندسي) هو طريقة مختصرة إذ يستغنى في هذه الطريقة عن دراسة الحالة العكسية .

في حالة عدم توظيف التحاكي :

نعتبر E مجموعة النقط G حيث G مركز ثقل المثلث MAB و M نقطة من (C) تختلف عن A و B .
1) نثبت أن E غير خالية .
2) نثبت أن E جزء من (L).
3) نثبت أن (L) جزء من E و بالتالي $(E=(L))$.

أعمال موجهة

إنشاء هندسي

ABC مثلث زواياه حادة .

الهدف :

إنشاء مربع $IJKL$ داخل المثلث حيث I و J هما نقطتان من $[BC]$ ، K نقطة من $[AC]$ و L نقطة من $[AB]$

❶ **التحليل :**

نفرض أن المربع أُنجز ، نلاحظ مثلثات متحاكية ، عندئذ استعمال التحاكي ممكن .

نرمز بالرمز h للتحاكي الذي مركزه A و الذي يحوّل L الى B .

- ماهي صورة K ؟ ماهما صورتا I و J ؟
- استنتج $BEDC$ صورة المربع $LIJK$ بواسطة h .

❷ **التركيب :**

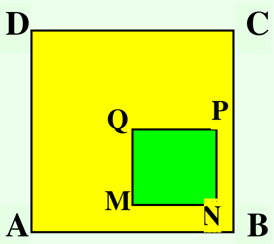
نعتبر المثلث ABC

أنشئ المربع $BEDC$ حيث أن النقطتين A و D تقعان في جهتين مختلفتين من المستوي بالنسبة للمستقيم (BC)

المستقيم (AE) يقطع $[BC]$ في النقطة I و المستقيم (AD) يقطع $[BC]$ في النقطة J

العمود في I على (BC) يقطع (AB) في النقطة L و العمود في J على (BC) يقطع (AC) في النقطة K

- تحقق أن المربع $IJKL$ حل للمسألة .
- ما عدد الحلول ؟



① في الشكل المقابل ABCD و MNPQ مربعان أضلاعهما متوازيان مثنى مثنى .
الهدف : إثبات أن المستقيمات (AM) ، (BN) ، (CP) و (DQ) تتقاطع في نقطة واحدة .

② ABCD رباعي محدب ، يتقاطع قطراه [AC] و [BD] في نقطة O
المستقيم الموازي لـــ (DC) المرسوم من O يقطع [AD] في النقطة I
المستقيم الموازي لـــ (BC) المرسوم من O يقطع [AB] في النقطة J
الهدف : إثبات أن المستقيمين (IJ) و (BD) متوازيان

③ (C) و (C') دائرتان مركزاهما O ، O' على الترتيب و نصفي قطريهما r ، r' على الترتيب ($r \neq r'$) متماستان خارجيا في النقطة I . A نقطة داخل (C). (d) مستقيم يمر من A و يقطع (C) في نقطتين M و N . المستقيم (MI) يقطع (C') في M' و المستقيم (IN) يقطع (C') في N' .
الهدف : إثبات أن المستقيم ($M'N'$) يمر من نقطة ثابتة عندما يتغير المستقيم (d) حول النقطة A

الحل : ① المربع MNPQ هو تصغير للمربع ABCD و بالتالي فهما متحاكيان .
لإثبات أن أربعة مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة يجب إثبات أن مستقيمين منهما يمران بنقطة تقاطع المستقيمين الآخرين
* لتكن O نقطة تقاطع (AM) و (DQ)
* ODA و OQM مثلثان متحاكيان ، ليكن h التحاكي الذي مركزه O و الذي يحوّل A الى M .
لإثبات أن (PC) يمر من O يكفي إثبات أن $h (C) = P$
لتكن C' صورة C بواسطة h ، C' تنتمي الى الموازي لـــ (DC) المرسوم من Q من جهة و من جهة أخرى C' تنتمي إلى (OC).إذن C' نقطة تقاطع (OC) مع (QP) و منه C' هي النقطة P
لأن $\frac{QC'}{DC} = \frac{QM}{AD}$ أي $QM = QC'$. و بنفس الطريقة نثبت أن (BN) يشمل O .
ملاحظة : يمكن أن نثبت التقاطع تحليليا بأخذ معلم متعامد و متجانس ($A , \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$) و أخذ $M(a, b)$ ثم كتابة معادلات المستقيمات و إثبات أن الجملة تقبل حلا وحيدا .

② نريد إثبات أن مستقيمين متوازيين ، يكفي إذن أن نثبت أن أحدهما صورة للآخر بتحاك h .
نستعمل مثلا التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل O إلى C . لدينا $h(I) = D$ (لأن (IO) يوازي (DC)) من جهة و من جهة أخرى لدينا $h(J) = B$ (لأن (JO) يوازي (BC)) و بالتالي فإن (BD) صورة (IJ) بالتحاكي h
و منه (BD) يوازي (IJ)

③ يبدو من الشكل أن المثلثين IMN و $IM'N'$ متحاكيان رأساهما I . هل المستقيم ($M'N'$) هو صورة (MN) بتحاك h مركزه I ؟ نفرض أن هذا صحيح ، ما هي عندئذ النتائج المترتبة على ذلك ؟
وضعية النقطة الثابتة المطلوبة تابعة لوضعية A . نعلم أن A تنتمي الى (MN) إذن $h(A) = A' \in (M'N')$
A' النقطة المطلوبة . ماهو التحاكي h الذي مركزه I و يحوّل (MN) الى ($M'N'$) ؟
N ، M نقطتان من (C)، N' ، M' نقطتان من (C') ، يبدو أن h هو التحاكي الذي مركزه I و يحوّل (C) إلى (C')
* نسبة هذا التحاكي هي $-\frac{r'}{r}$ ؛ $h(M) = M'$ حيث $\overrightarrow{IM'} = -\frac{r'}{r}\overrightarrow{IM}$ و $h(N) = N'$ حيث $\overrightarrow{IN'} = -\frac{r'}{r}\overrightarrow{IN}$
* نضع $h(A) = A'$ نعلم أن A' تنتمي إلى ($M'N'$) صورة (MN) لأن A تنتمي إلى (MN)
A' ثابتة لأن A ثابتة .

في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر الدائرتين (C) و (C') اللتين معادلتيهما الديكارتيتين هما على الترتيب $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ و $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$

1- عين A و B مركزيهما على الترتيب ثم حدد كل من r و r′ نصفي قطريهما على الترتيب .

2- أنشئ (C) و (C') في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

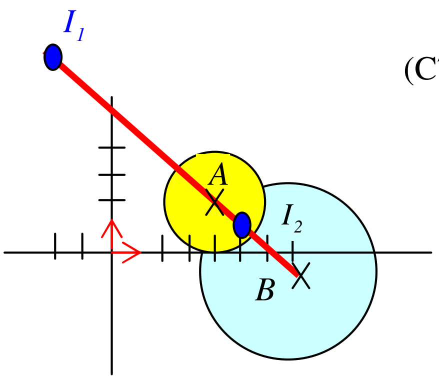
3- نفرض وجود تحاك h يحوّل (C) الى (C') ، أثبت أن نسبته k تأخذ قيمتين ممكنتين $\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{2}$

4- واضح من السؤال-3- أن هناك تحاكيين h_1 و h_2 يحولان (C) الى (C') نعتبر I_1 و I_2 مركزيهما على الترتيب

تحقق أن I_1 مرجح $(A, -3)$ و $(B, 2)$ و أن I_2 مرجح $(A, 3)$ و $(B, 2)$ ثم علِّم I_1 و I_2 على الشكل

5- تحقق تحليليا أن (C') صورة (C) بكل من h_1 و h_2 .

الحل : ① يمكن كتابة معادلتي الدائرتين على الشكل :



$(C) : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ و $(C') : (x-7)^2 + (y+1)^2 = 9$

و منه $A(4, 2)$ ، $B(7, -1)$ و $r = 2$ و $r' = 3$

③ ليكن h تحاك يحول (C) الى (C') إذن h يحوّل A الى B

و لدينا $r' = |k|.r$ أي $|k| = \frac{3}{2}$ هناك قيمتان للعدد k هما $\frac{3}{2}$ و $(-\frac{3}{2})$

④ هناك تحاكيان نسبة الأول h_1 هي $\frac{3}{2}$ و نسبة الثاني h_2 هي $(-\frac{3}{2})$

ليكن I_1 مركز h_1 و I_2 مركز h_2 لدينا: $h_1(A) = B$, $h_2(A) = B$ أي أن $\overrightarrow{I_1B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{I_1A}$ و $\overrightarrow{I_2B} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2A}$

يعني : $2\overrightarrow{I_1B} - 3\overrightarrow{I_1A} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{I_2B} + 3\overrightarrow{I_2A} = \vec{0}$ و هاتان العلاقتان توضحان أن I_1 مرجح $(A, -3)$

و $(B, 2)$ و أن I_2 مرجح $(A, 3)$ و $(B, 2)$.

تعليم I_1 و I_2 بتبسيط العلاقتين :

$2\overrightarrow{I_2B} = -3\overrightarrow{I_2A}$ أي $5\overrightarrow{I_2B} = -3\overrightarrow{BA}$ يعني $\overrightarrow{I_2B} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ و بالمثل نجد $\overrightarrow{I_1B} = 3\overrightarrow{AB}$

⑤ $\overrightarrow{I_1M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{I_1M}$ و $\overrightarrow{I_2M'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2M}$ نضع $M'(x', y')$ صورة $M(x, y)$

لدينا $A(4, 2)$ و $B(7, -1)$ ينتج $I_1(-2, 8)$, $I_2(\frac{26}{5}, \frac{4}{5})$

العبارة التحليلية للتحاكي h_1 هي $\begin{cases} (x'+2) = \frac{3}{2}(x+2) \\ y'-8 = \frac{3}{2}(y-8) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + 1 \\ y' = \frac{3}{2}y - 4 \end{cases}$

نعوض x', y' في معادلة (C') نجد : $(\frac{3}{2}x + 1 - 7)^2 + (\frac{3}{2}y - 4 + 1)^2 = 9$ أي $(\frac{3}{2}x - 6)^2 + (\frac{3}{2}y - 3)^2 = 9$

و نجد $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ و هي معادلة الدائرة (C)

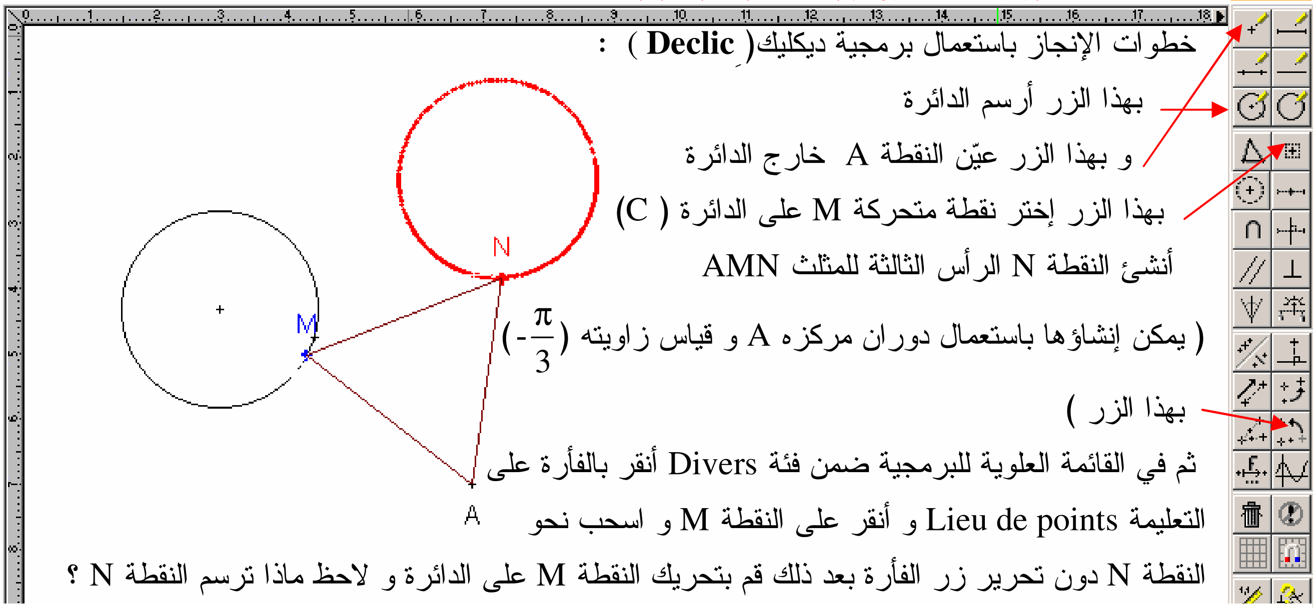
أي أن **الدائرة (C') هي صورة (C) بواسطة التحاكي h_1 (و نفس الطريقة بالنسبة لــ h_2)**

في مستو موجه ، نعتبر الدائرة (C) التي مركزها O . A نقطة خارج (C) . نرفق بكل نقطة M من (C) النقطة N حيث يكون المثلث AMN متقايس الأضلاع و يكون لدينا $(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}$.

1- ما هو المحل الهندسي (L_1) للنقطة N لما تمسح M الدائرة (C) ؟

2- ما هو المحل الهندسي (L_2) للنقطة P المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (AN) ؟

الحل : 1- ① التخمين باستعمال برمجية هندسية ديناميكية :



② **برهان التخمين**

لدينا M نقطة من (C) ، AM = AN و $(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}$ هذا يعني أن N صورة M بدوران R مركزه A و قيس زاويته ($-\frac{\pi}{3}$) . M تتغير على الدائر (C) . إذن N تتغير على الدائرة (C′) صورة (C) بالدوران R .

و هي دائرة مركزها O′ أي AO = AO′ و $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})=-\frac{\pi}{3}$ و نصف قطرها هو نفسه نصف قطر (C)

و بالتالي (L_1) هو (C′) .

2- P منتصف [AN] لأن المثلث AMN متقايس الأضلاع و منه $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ أي أن P صورة N بتحاك h مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$. و بما أن N تمسح (C′) لما M تمسح (C) فإن P تمسح (C″) صورة (C′) بالتحاكي h

إذن (C″) هي الدائرة التي مركزها O″ حيث $\overrightarrow{AO''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO'}$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ نصف قطر (C′) أو (C)

عندما تتحرك M على (C) تتحرك P على (C″) لدينا $(C'')=h_{(A,\frac{1}{2})}(C')=h_{(A,\frac{1}{2})}\circ R_{(A,-\frac{\pi}{3})}(C)$

يسمى هذا التركيب تشابها و له ثلاثة عناصر مميزة هي المركز A ، النسبة $\frac{1}{2}$ و قيس الزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ تعطى الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2-2x-4y+4 = 0$ و النقطتان $A(-1 , 0)$ و $B(3 , 0)$ ، M نقطة كيفية من (C) .

1- أرسم الدائرة (C) و عين النقطتين A و B .

2- N هي النقطة حيث MANB متوازي أضلاع

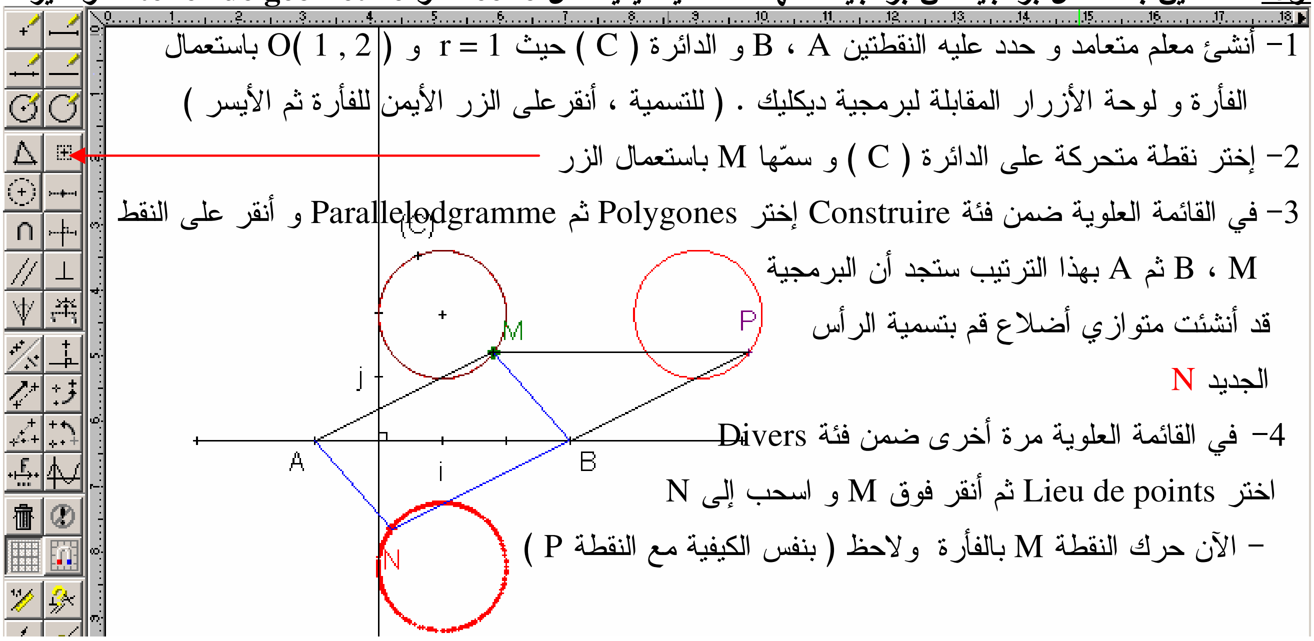
➢ أثبت أن المستقيم (MN) يمر من نقطة ثابتة I يطلب تعيينها

➢ أنشئ المحل الهندسي للنقطة N لما تمسح النقطة M الدائرة (C) و اكتب معادلة ديكارتية لهذا المحل

3- P هي النقطة حيث MABP متوازي أضلاع . ماهو المحل الهندسي للنقطة P عندما تمسح M الدائرة (C) ؟

- أكتب معادلة ديكارتية لهذا المحل .

أولا : التخمين باستعمال برمجية من برمجيات الهندسة الديناميكية مثل Declic أو Atelier de geometrie أو غيرها



1- أنشئ معلم متعامد و حدد عليه النقطتين A ، B و الدائرة (C) حيث r = 1 و O(1 , 2) باستعمال الفأرة و لوحة الأزرار المقابلة لبرمجية ديكليك . (للتسمية ، أنقرعلى الزر الأيمن للفأرة ثم الأيسر)

2- إختر نقطة متحركة على الدائرة (C) و سمّها M باستعمال الزر

3- في القائمة العلوية ضمن فئة Construire إختر Polygones ثم Parallelogramme و أنقر على النقط M ، B ثم A بهذا الترتيب ستجد أن البرمجية قد أنشئت متوازي أضلاع قم بتسمية الرأس الجديد N

4- في القائمة العلوية مرة أخرى ضمن فئة Divers اختر Lieu de points ثم أنقر فوق M و اسحب إلي N

- الآن حرك النقطة M بالفأرة ولاحظ (بنفس الكيفية مع النقطة P)

ثانيا : برهان التخمين : معادلة (C) هي : $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$ ، $r = 1$ و $O(1 , 2)$

1- * ANBM متوازي أضلاع قطراه متناصفان و بالتالي (MN) يمر بالنقطة الثابتة I منتصف [AB] .

* واضح أن $\vec{IN}=-\vec{IM}$ أي M صورة N بالتناظر المركزي الذي مركزه I أو بالتحاكي الذي مركزه I و نسبته (-1) أو بالدوران الذي مركزه I و قيس زاويته π و صورة (C) بكل من هذه التحويلات هي دائرة (C') مركزها O' ، نصف قطرها r' حيث $\vec{IO'}=-\vec{IO}$ أي $O'(1 , -2)$ و منه معادلة (C') هي $(x-1)^2+(y+2)^2 = 1$

الطريقة التحليلية : نكتب العبارات التحليلية للتناظر المركزي :

لتكن M' صورة M أي $\vec{IM'}=-\vec{IM}$ يعني $x'=-x+2$ و $y'=-y$ ، نعوض x و y في معادلة (C) نجد :

$$(-x'+2)^2+(-y')^2-2(-x'+2)-4(-y')+4 = 0 \quad \text{أي} \quad x'^2+y'^2-2x'+4y'+4=0$$

3- MABN متوازي أضلاع يعني $\vec{MP}=\vec{AB}$ أي أن P صورة M بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$ نرمز له $(T_{\vec{AB}})$

و بالتالي P صورة M تقع على صورة (C) و هي دائرة مركزها O'' ونصف قطرها r'' حيث $r''=r$ و $\vec{OO''}=\vec{AB}$

P تمسح الدائرة (C'') لما تمسح M الدائرة (C) ، $\vec{OO''}=4\vec{i}$ ومنه معادلة (C'') : $(x-5)^2+(y-2)^2 = 1$

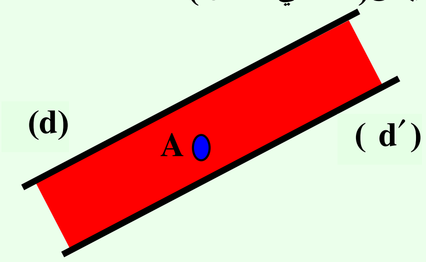
* **يمكن استعمال الطريقة التحليلية** و ذلك بكتابة العبارات التحليلية للإنسحاب $x' = x + 4$ و $y' = y$
ثم بتعويض x و y في معادلة (C) نجد معادلة (C'') .

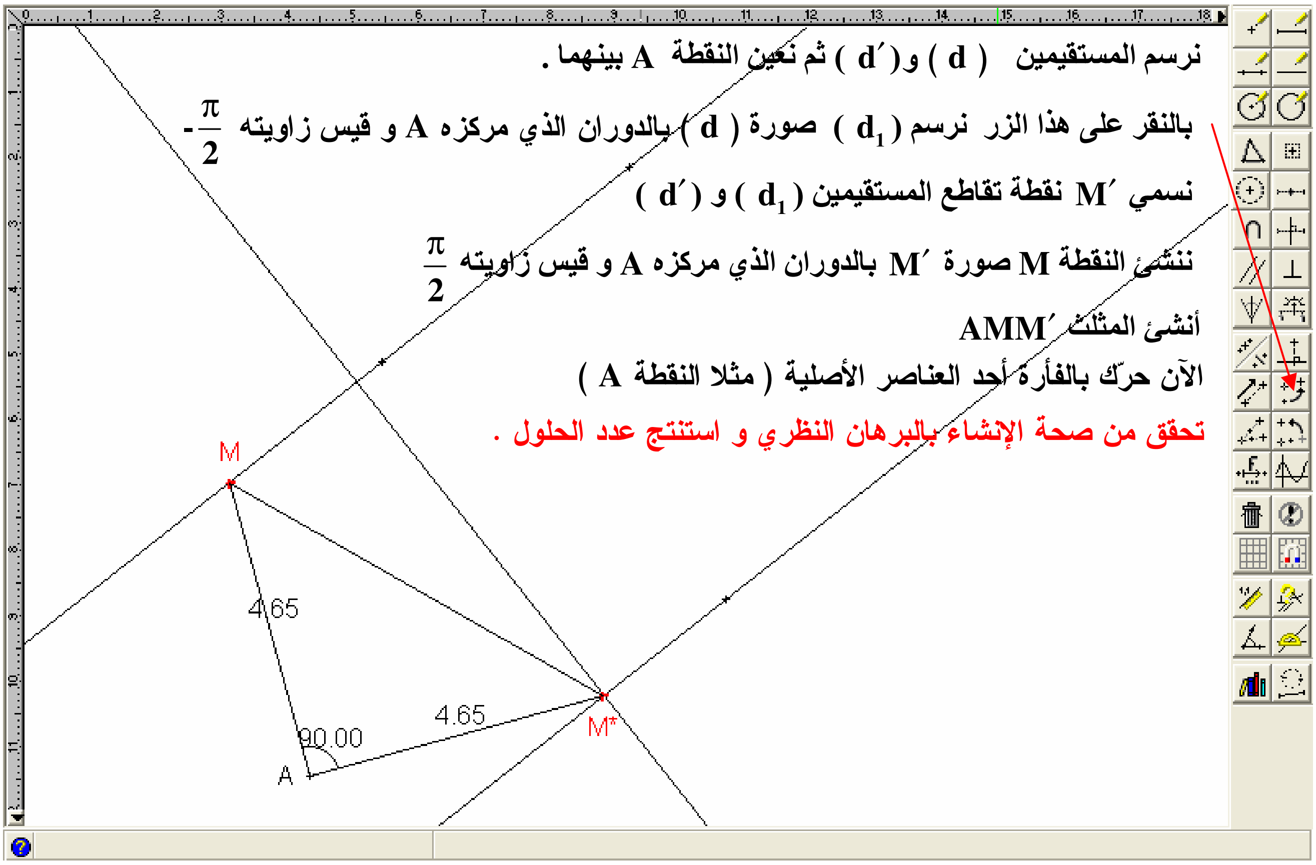
ملاحظة : P صورة M بواسطة الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$. يمكن ملاحظة أن P صورة N بالتناظر المركزي الذي مركزه B لأن $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{BN}$ و بما أن N صورة M بالتناظر المركزي الذي مركزه I أي $\overrightarrow{IN} = -\overrightarrow{IM}$
فإن P صورة M بمركب تناظرين مركزيين نرمز لهما S_B و S_I لدينا :
$P = S_B \circ S_I(M)$ من جهة ، ومن جهة أخرى $P = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$ إذن نستنتج أن $T_{\overrightarrow{AB}} = S_B \circ S_I$

الإنشاءات الهندسية

(d) و (d′) مستقيمان متوازيان ، A نقطة من الشريط الذي يحصرانه المستقيمان(كما في الشكل)

1 - أنشئ مثلثا ′AMM قائم في A و متساوي الساقين
حيث أن M تقع على (d) و ′M تقع على (d′)
2 - ماهو عدد الحلول ؟
3 - تحقق من صحة الإنشاء ببرمجية مناسبة





نرسم المستقيمين (d) و(d′) ثم نعين النقطة A بينهما .
بالنقر على هذا الزر نرسم (d_1) صورة (d) بالدوران الذي مركزه A و قيس زاويته $-\frac{\pi}{2}$
نسمي ′M نقطة تقاطع المستقيمين (d_1) و (d′)
ننشئ النقطة M صورة ′M بالدوران الذي مركزه A و قيس زاويته $\frac{\pi}{2}$
أنشئ المثلث ′AMM
الآن حرّك بالفأرة أحد العناصر الأصلية (مثلا النقطة A)
تحقق من صحة الإنشاء بالبرهان النظري و استنتج عدد الحلول .

تمارين

أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **8** أجب بصحيح أم خاطئ معللا إجابتك:

1 التحويل النقطي الوحيد الذي يكون في آن واحد انسحابا وتحاكيا هو التحويل المطابق .

2 إذا كان المثلث MNP صورة مثلث ABC بواسطة تحاكي h ، فإن ABC و MNP متشابهين .

3 MNP مثلث محيطه 36 حيث $MN=7$ و ABC مثلث محيطه 42 حيث $AB=8$. هل يوجد تحاكي h حيث : $h(A)=M$ ، $h(B)=N$ ، $h(C)=P$ ؟

4 كل تناظر مركزي هو تحاكي .

5 O ، A ، B ثلاث نقط حيث:

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OA}$$

التحاكي الذي مركزه O و نسبته 2 يحول A إلى B .

6 (d) و (d') مستقيمان متقاطعان . يوجد تحاكي يحول (d) إلى (d').

7 ABC مثلث، O منتصف القطعة $[BC]$. f التحويل النقطي الذي يحول كل نقطة M من المستوي إلى نقطة N من المستوي حيث: $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

f هو التحاكي الذي مركزه I منتصف القطعة $[OA]$ و نسبته -3 .

8 h تحاكي نسبته k حيث $|k|\neq 1$.

لا توجد أي دائرة من المستوي تنطبق على صورتها بواسطة التحاكي h

أسئلة متعددة الاختيارات

بالنسبة للتمارين من **9** إلى **14** اختر الجواب الصحيح من بين المقترحة :

9 A و B نقطتان مختلفتان من المستوي و I منتصف القطعة $[AB]$. k نسبة التحاكي الذي مركزه A و يحول B إلى I هي :

1) $k=\frac{1}{2}$.

2) $k=-1$.

3) $k=2$.

10 ABC مثلث من المستوي I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$. شعاع الإنسحاب الذي يحول J إلى I هو:

1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2) $\overrightarrow{BC}$.

3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

11 ABC مثلث من المستوي I منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل المثلث ABC . k نسبة التحاكي الذي مركزه G و يحول A إلى I هي :

1) $k=-\frac{1}{2}$.

2) $k=-2$.

3) $k=-\frac{2}{3}$.

12 S التناظر المركزي الذي يحول نقطة A إلى نقطة B و يحول نقطة C إلى نقطة D . لدينا :

1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}$.

3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

13 A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي حيث :

$$3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$$

k نسبة التحاكي الذي مركزه A ويحول B إلى C هي :

1) $k=-\frac{1}{2}$.

2) $k=-2$.

3) $k=\frac{2}{3}$.

4) $k=-3$.

14 (C) دائرة قطرها $12cm$ تحاك نسبته $-\frac{1}{2}$ يحول (C) إلى دائرة (C') .

مساحة (C') هي :

1) $9\pi\, cm^2$.

2) $18\pi\, cm^2$.

3) $36\pi\, cm^2$.

4) $16\pi\, cm^2$

15 عبر عن الجمل التالية بواسطة علاقة شعاعية .

1) النقطة B هي صورة النقطة A بواسطة التحاكي الذي مركزه النقطة I و نسبته $-\frac{1}{2}$.

2) التحاكي الذي مركزه النقطة O من المستوي و نسبته 3 يحول النقطة P إلى النقطة Q .

3) النقطتين I و J صورتي النقطتين A و B على الترتيب بواسطة التحاكي الذي نسبته -4

4) B هي صورة النقطة A بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$.

16 $ABCD$ متوازي الأضلاع.

1) عين صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DB}$.

2) ما هي صورة النقطة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$؟

17 عين في كل حالة من الحالات الآتية نسبة التحاكي الذي مركزه النقطة A و يحول M إلى N .

1) $\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}$.

2) $4\overrightarrow{AN}=5\overrightarrow{MN}$.

3) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}$

4) $2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AN}=\vec{0}$

18 $ABDC$ متوازي الأضلاع.

النقطة E صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته -2 . النقطة F صورة النقطة E بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته -1 .

برهن أن النقطة D منتصف القطعة المستقيمة $[AF]$.

19 $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الانسحاب الذي شعاعه $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ يحول النقطة A إلى النقطة E و يحول النقطة D إلى النقطة F .

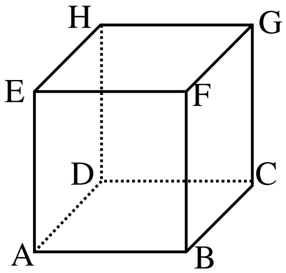
برهن أن: $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC}$

20 ABC مثلث من المستوي . I منتصف الضلع $[BC]$ و J منتصف الضلع $[AC]$.

النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

أثبت أن J منتصف القطعة $[EI]$.

21 $ABCDEFGH$ مكعب مركزه O و I منتصف القطعة $[BF]$.



1) عين صورة النقط A ، B ، C ، D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

2) عين صورتي النقطتين H و F بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته $\frac{1}{2}$.

22 A ، B و C ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BC}$.

1) ما هي صورة النقطة C بالتحاكي الذي مركزه النقطة B و نسبته 4 ؟

2) استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته $\frac{1}{4}$.

3) تحقق أن $3\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}$.

4) هل النقطة A هي صورة B بالتحاكي الذي مركزه C و نسبته -3 .

23 ABC مثلث . حيث $BC=3$.

M نقطة من القطعة $[AB]$.

N نقطة من القطعة $[AC]$.

حيث :

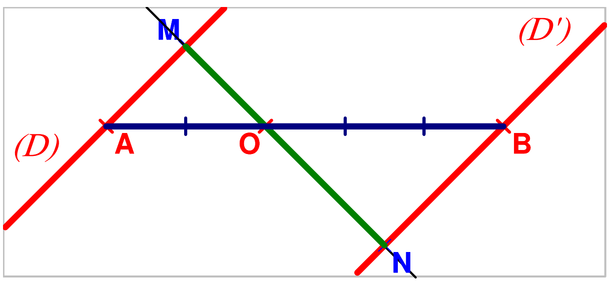
$MN=2$ و المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان .

1) ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه A ويحول M إلى B . ما هي نسبة التحاكي h_1 ؟

2) ليكن h_2 التحاكي الذي يحول B إلى N و يحول C إلى M .

ما هو مركز التحاكي h_2؟ ما هي نسبة التحاكي h_2؟

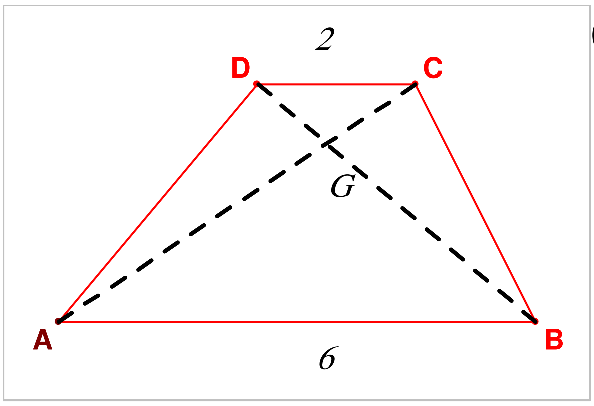
24 في الشكل الموالي (D) و (D') مستقيمان متوازيان.



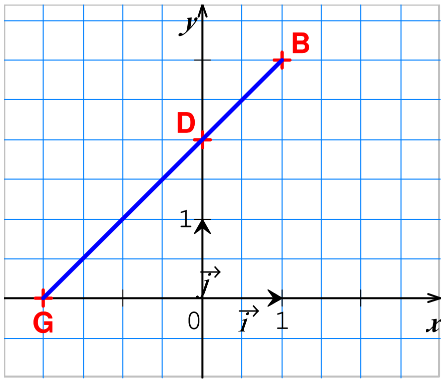
النقط A، B، M، N و O معرفة كما هو في الرسم.
عين العدد الحقيقي k نسبة التحاكي h الذي يحول M إلى N و مركزه O.

25 عين نسبة التحاكي الذي مركزه G في كل حالة من الحالات الآتية :

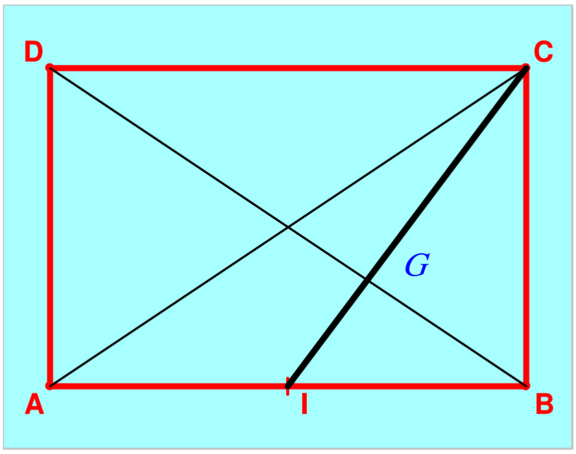
(1



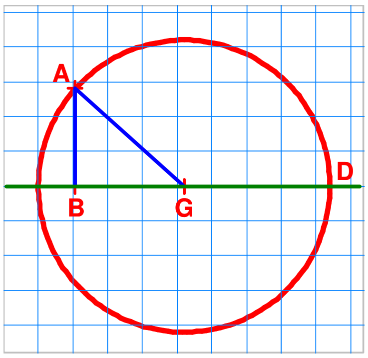
(2



(3

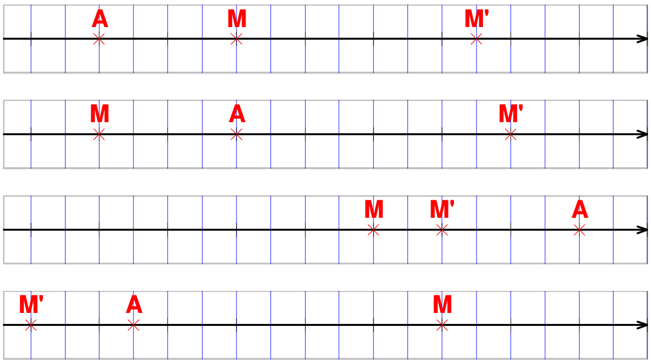


(4

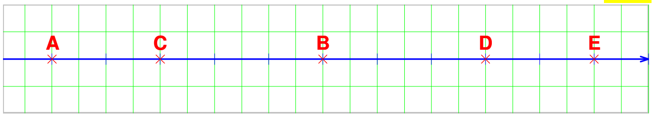


26 $ABCD$ متوازي الأضلاع I النقطة حيث:
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
أنشئ صور النقط B، C و D بالتحاكي h الذي مركزه I و يحول A إلى D.

27 في كل حالة من الحالت التالية،عين نسبة التحاكي الذي مركزه A و الذي يحول النقطة M إلى النقطة M'



28 انطلاقا من الشكل التالي،حدد:



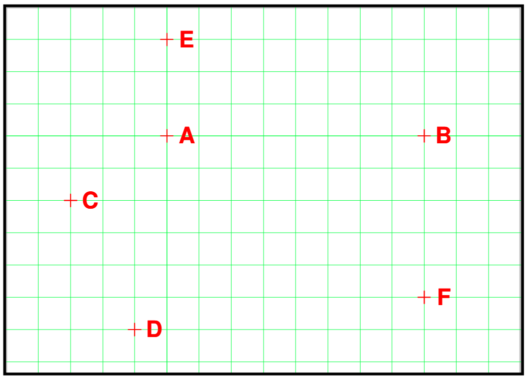
أ) صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2.
ب) صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{8}{5}$.
جـ) صورة النقطة E بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته -1.
د) صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته $-\frac{2}{3}$.
هـ) صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه Dونسبته $-\frac{1}{4}$.

29 النقطة A هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه C و نسبته $\frac{3}{4}$.
بين أنه يوجد تحاكي مركزه A و يحول B إلى C. عين نسبة هذا التحاكي.

30 $ABCD$ متوازي أضلاع .
– هل يوجد تحاكي يحول A إلى D و B إلى C ؟
– هل يوجد تحاكي يحول A إلى C و B إلى D ؟

31 لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-3)\}$
بين أن B هي صورة A بالتحاكي الذي مركزه G يطلب تعيين نسبته.

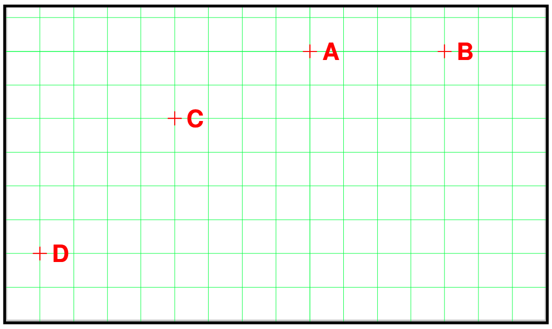
32 النقط A، B، C، D، E و F ممثلة بالشكل الآتي:



أ) بين أنه يوجد تحاك يحول النقطة A إلى النقطة B والنقطة C إلى النقطة D مطلوب تعيين مركزه و نسبته.

ب) بين أنه يوجد تحاك يحول النقطة A إلى النقطة B والنقطة E إلى النقطة F مطلوب تعيين مركزه و نسبته.

33 النقط A ، B ، C و D ممثلة بالشكل الآتي:



أنشئ مركز التحاكيات التالية:

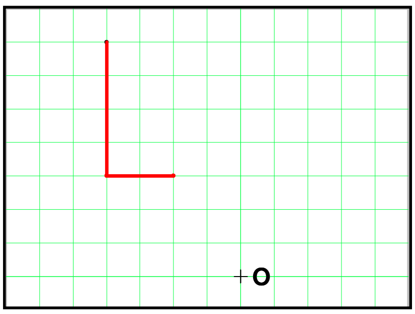
أ) التحاكي الذي يحول A إلى B و C إلى D .

ب) التحاكي الذي نسبته $\frac{4}{3}$ و يحول A إلى B.

ج) التحاكي الذي نسبته -3 و يحول D إلى C.

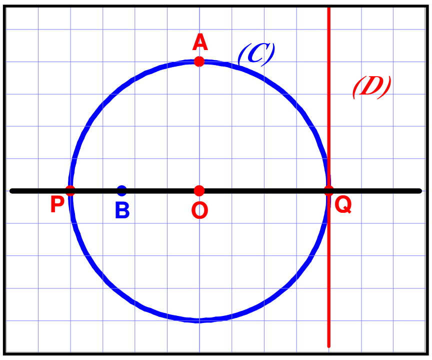
34 حول الحرف " L " الممثل في الشكل الموالي بالتحاكيات ذات المركز O و النسب :

2 ، 4 ، $\frac{1}{2}$ و 1 ، ثم -1 ، -2 و $-\frac{1}{2}$



من أجل كل تحاك ، اذكر إذا ما كان تكبيرا أو تصغيرا لصورة " L ".

35 في الشكل التالي ، (C) هي الدائرة التي مركزها O و (D) مماسا لها في النقطة Q. نعتبر التحاكي h الذي مركزه B و يحول Q إلى P .



1) أنشئ ما يلي:

أ) صورتي النقطتين A و O بالتحاكي h.

ب) المستقيم (D') صورة المستقيم (D) بالتحاكي h .

جـ) الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بالتحاكي h.

2) أ) حدد وضعية المستقيم (D') بالنسبة للدائرة (C').

ب) حدد الوضعية النسبية للدائرتين (C) و (C')

36 لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوى و h التحاكي الذي يحول A إلى A' و B إلى B' .

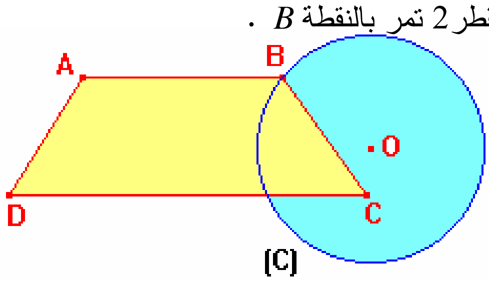
برهن أن M' صورة النقطة M من القطعة $[AB]$ تنتمي إلى القطعة $[A'B']$.

أ) باستعمال الأشعة المترابطة خطيا.

ب) باستعمال حفظ الزوايا الموجهة.

جـ) باستعمال خاصية h حول المسافات

37 ليكن شبه منحرف $ABCD$ قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$ حيث $AB = 3$ و $DC = 5$. الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2 تمر بالنقطة B .



h التحاكي الذي نسبته $\frac{5}{3}$ و الذي يحول A إلى D .

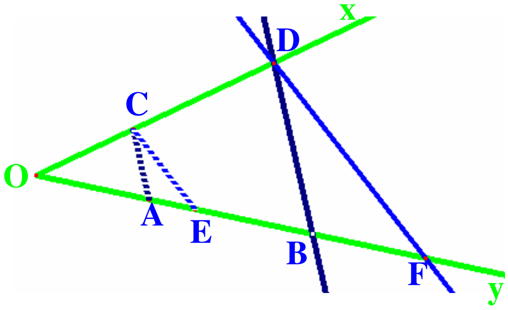
ما هي صورة النقطة B ؟

– أنشئ صورة النقطة O بالتحاكي h.

– استنتج إنشاءً للدائرة (C) بالتحاكي h .

تمارين تطبيقية

38 $[Ox)$ و $[Oy)$ نصفي مستقيمين. نعتبر النقط A ، B ، C ، D ، E ، F حيث $(AC)//(BD)$ و $(EC)//(FD)$ (أنظر الشكل) .



نعتبر h التحاكي الذي مركزه O ويحول A إلى B .
برهن أن F هي صورة E بالتحاكي h .

39 ABC مثلث كيفي . I منتصف القطعة $[BC]$ و A' نقطة من المستقيم (IA) حيث النقط I ، A ، A' على استقامة واحدة في هذا الترتيب.

1) أنشئ صورتي النقطتين B و C بالتحاكي الذي مركزه I ويحول A إلى A'

2) أعد نفس السؤال ولكن في هذه المرة النقط A ، I ، A' على استقامة واحدة في هذا الترتيب .

40 $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O .
E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى النقطة A و F نظيرة D بالنسبة إلى النقطة C .

1) أرسم شكلا .

2) برهن أن النقطة B هي منتصف القطعة $[EF]$.

41 ABC مثلث كيفي . I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$.

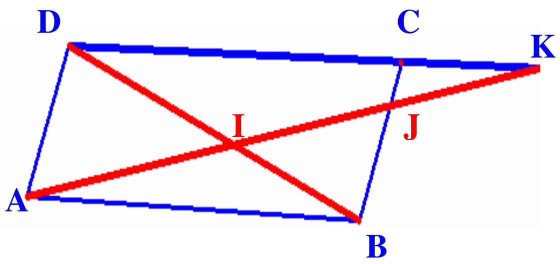
نعتبر النقطتين K و L المعرفتين بِـــ : $\overrightarrow{IK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$

و $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

برهن أن المستقيم (AK) يقطع القطعة $[LC]$ في منتصفها.

42 $ABCD$ متوازي أضلاع .

نعتبر h التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى D.



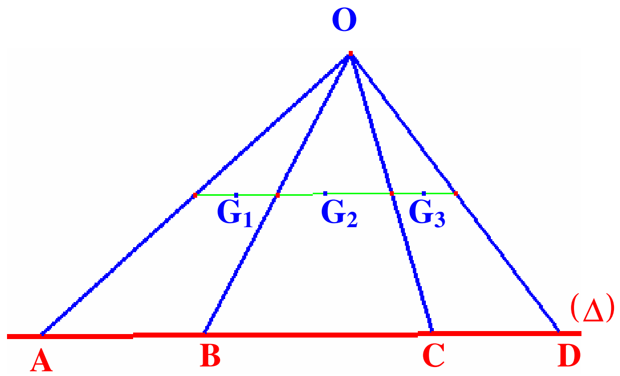
1) لماذا المستقيم (DC) هو صورة (AB) بالتحاكي h ؟

2) استنتج أن $h(A)=K$.

3) عين صورة المستقيم (BC) بالتحاكي h . واستنتج أن $h(I)=A$.

4) نسمي k نسبة التحاكي h .
استنتج من الأسئلة السابقة أن : $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}=k\overrightarrow{JA}$
ثم استنتج أن : $IA^2=IJ\times IK$.

43 A ، B ، C ، D أربع نقط متمايزة من مستقيم (Δ) و O نقطة لا تنتمي إلى (Δ) .



نسمي G_1 ، G_2 ، G_3 مراكز ثقل المثلثات OAB ، OBC ، OCD على الترتيب .
برهن أن النقط G_1 ، G_2 ، G_3 على استقامة واحدة .

44 $(O\,;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي ، (C) دائرة مركزها $A(2;3)$ ونصف قطرها 2 .
h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$.

1) أرسم (C') صورة (C) بواسطة h .

2) أكتب معادلة للدائرة (C') .

تمارين تطبيقية

45 $(O\,;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي، (C)
الدائرة التي معادلتها : $x^2+y^2=4$. و (C')
الدائرة التي معادلتها : $x^2+y^2-6x+8=0$.

1) أرسم (C) و (C') .

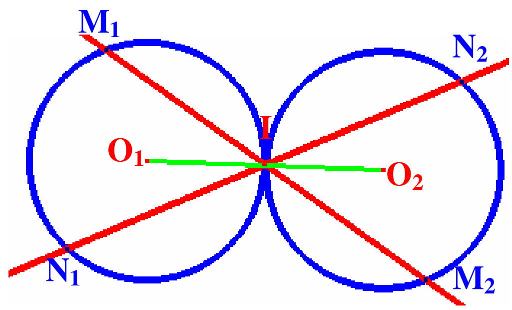
2) تحقق أن (C) و (C') دائرتان متماستان .

3) لتكن I النقطة ذات الإحداثيين $(2;0)$.

برهن أن (C') هي صورة (C) بالتحاكي الذي مركزه I ونسبته k يطلب تعيينها .

46 في المستوي نعتبر (C_1) و (C_2) دائرتين مركزيهما O_1 و O_2 على الترتيب ، لهما نفس نصف القطر ، متماستان خارجيا في النقطة I .

مستقيمان متمايزان يشملان النقطة I ، يقطعان (C_1) في النقطتين M_1 و N_1 ويقطعان (C_2) في النقطتين M_2 و N_2 أنظر الشكل .



ليكن S التناظر الذي مركزه I .

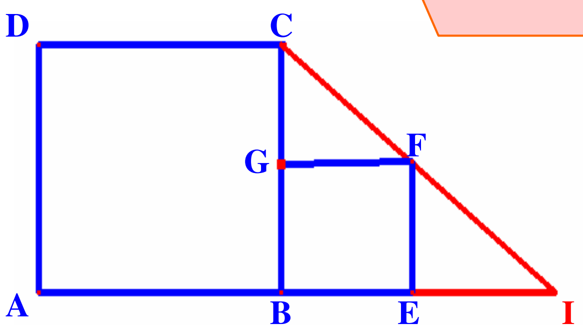
1) برهن أن (C_2) هي صورة (C_1) بالتناظر S .

2) برهن أن النقطتين M_2 و N_2 هما صورتي النقطتين M_1 و N_1 على الترتيب بالتناظر S .

3) استنتج أن الرباعي $M_1N_1M_2N_2$ متوازي أضلاع.

47 $ABCD$ مربع طول ضلعه 3 .

و $BEFG$ مربع طول ضلعه 2 . أنظر الشكل .



1) أحسب $\widehat{BAC}$ و $\widehat{EBF}$.

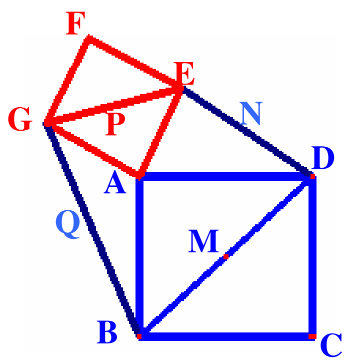
- استنتج أن المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان .

2) ليكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول النقطة A إلى النقطة B. برهن أن $h(C)=F$.

- لماذا $\frac{2}{3}$ هي نسبة التحاكي h ؟

3) برهن أن النقط D ، G ، I في استقامية .

48 $ABCD$ و $AEFG$ مربعان حيث :
$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AG})=\frac{\pi}{2}$ أنظر الشكل .



M ، N ، P ، G منتصفات القطع $[BD]$ ، $[ED]$ ، $[GE]$ و $[GB]$ على الترتيب .

1) باعتبار المثلثين BED و BEG برهن أن :
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

2) r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين صورة القطعة $[BE]$ بالدوران r .

- استنتج أن $MNPQ$ مربع .

تمارين تطبيقية

49 ABC مثلث قائم في النقطة A .

I و J منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب .

H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

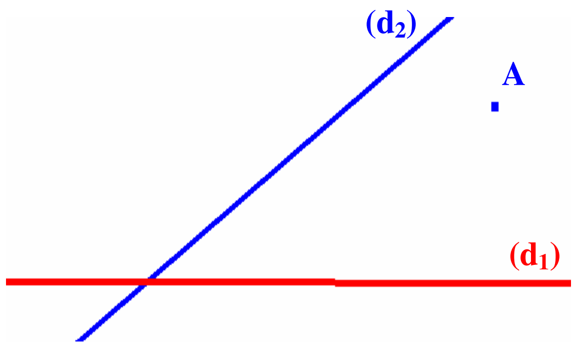
s التناظر العمودي بالنسبة إلى المستقيم (IJ) .

1) عين صورة A بالتناظر s .

2) عين صورة المستقيمين (AI) و (AJ) بالتناظر s .

3) استنتج أن المستقيم (HI) يعامد (HJ) .

50 (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان و A نقطة لا تنتمي إلى هذين المستقيمين .

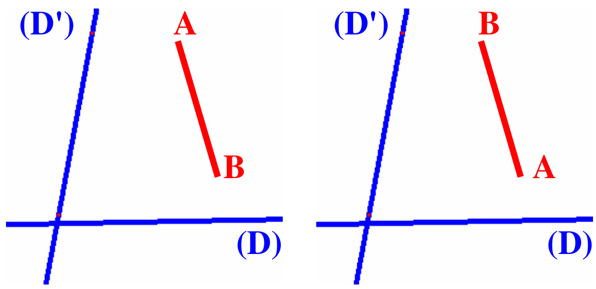


ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

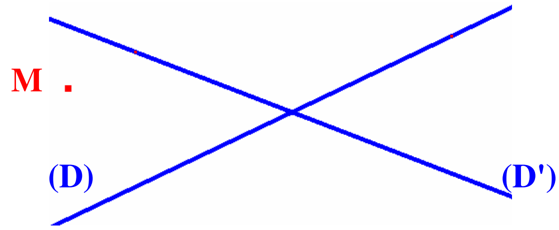
1) أرسم (d_1') صورة (d_1) بالدوران r .

2) أرسم نقطة B من (d_1) و C من (d_2) حتى يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع .

51 في كل حالة من الحالتين التاليتين أنشئ النقطتين C و D على المستقيمين (D) و (D') على الترتيب حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .



52 (D) و (D') مستقيمان متقاطعان . M نقطة لا تنتمي إليهما .



أنشئ نقطة N على المستقيم (D) ونقطة P على المستقيم (D') حيث :

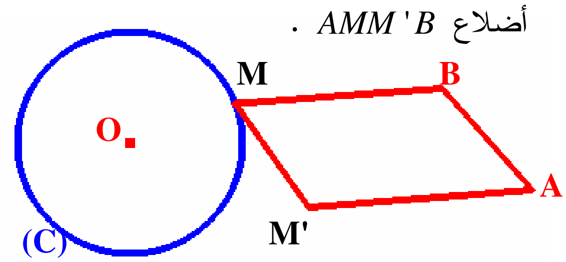
1) N منتصف $[MP]$.

2) M منتصف $[NP]$.

53 (C) دائرة ثابتة مركزها O .

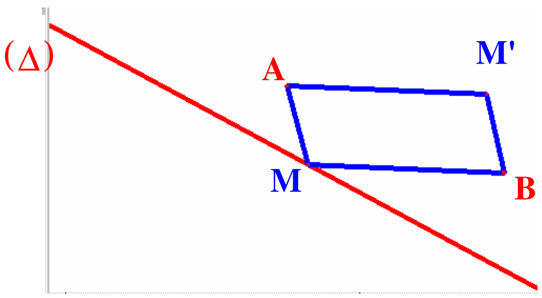
A و B نقطتان ثابتتان خارج الدائرة (C) .

من أجل كل نقطة M من (C) نرسم متوازي أضلاع $AMM'B$.



ما هو المحل الهندسي للنقطة M' لما تتغير M على الدائرة (C) ؟

54 (Δ) مستقيم ثابت . A و B نقطتان ثابتتان لا تنتميان إلى المستقيم (Δ) .



من أجل كل نقطة M من المستقيم (Δ) يرسم متوازي أضلاع $AMBM'$.

ما هو المحل الهندسي للنقطة M' لما تتغير M على المستقيم (Δ)؟

55 (Δ) مستقيم ثابت . A نقطة ثابتة لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

من أجل كل نقطة M من (Δ) نرسم النقطة N منتصف القطعة $[AM]$.

ما هو المحل الهندسي للنقطة N لما تتغير النقطة M على المستقيم (Δ) ؟

56 (C) دائرة ثابتة قطرها $[AB]$.

M نقطة متغيرة من الدائرة (C) حيث ($M \neq A$ و $M \neq B$) .

لكل نقطة M نعين G مركز ثقل المثلث ABM .

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتغير النقطة M على الدائرة (C) ما عدا A و B ؟

57 ABC مثلث قائم في A . لكل نقطة M من القطعة $[BC]$ نعين M_1 نظيرة M بالنسبة للمستقيم (AB)

ونعين M_2 نظيرة M بالنسبة للمستقيم (AC) .

1) برهن أن A هو منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

2) ما هو المحل الهندسي لكل من النقطتين M_1 و M_2 لما تتغير النقطة M على القطعة $[BC]$ ؟

مسـائـل

58 A و B نقطتان . α و β عددان حقيقيان غير معدومين .

G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب .

برهن أن G موجود إذا كان $\beta \neq 0$ و B صورة A بالتحاكي الذي مركزه G ونسبته $-\dfrac{\alpha}{\beta}$.

59 A ، B ، C ثلاث نقط على استقامة واحدة من مستقيم (Δ) .

1) أثبت أنه يوجد عدد حقيقي وحيد x بحيث يكون C صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته x .

2) ما هي قيمة x إذا كان :

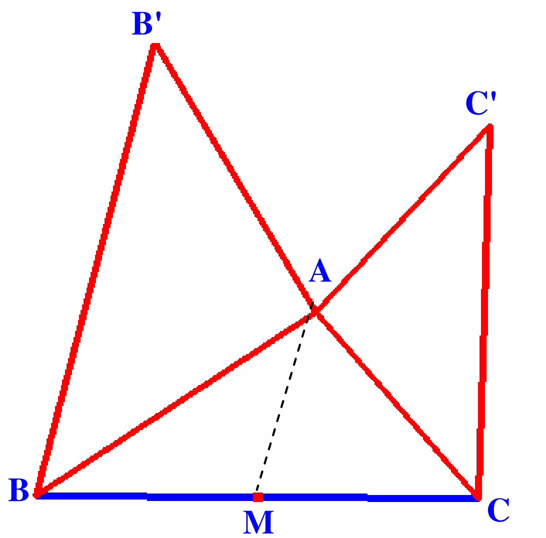
- B منتصف $[AC]$.
- A منتصف $[BC]$.
- C منتصف $[AB]$

3) عين موقع النقطة C على (Δ) إذا كان :

- $x \in]-\infty ; -1]$.
- $x \in]-1 ; 1]$.
- $x \in]-1 ; 0[\cup [1 ; +\infty[$.

60 ABC مثلث . M منتصف القطعة $[BC]$.

نرسم خارج المثلث ABC المثلثين BAB' و CAC' قائمان في A ومتساويان الساقين (أنظر الشكل) .



نريد البرهان أن المستقيمين (AM) و $(B'C')$ متعامدان .

نضع h التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2 .

1) عين صورة M بواسطة h .

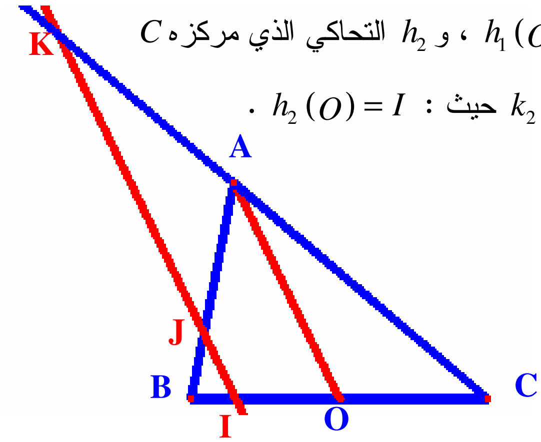
2) نسمي A' صورة A بواسطة h ، برهن أنه يوجد دوران r يحول C إلى C' و A' إلى B' .

استنتج مستعملا خواص h و r .

61 ABC مثلث O منتصف القطعة $[BC]$ ، I نقطة كيفية من القطعة $[BO]$.

المستقيم الموازي لـ (OA) والمار بالنقطة I يقطع المستقيم (AB) في J ويقطع المستقيم (AC) في K .

نسمي h_1 التحاكي الذي مركزه B ونسبته k_1 حيث : $h_1(O)=I$ ، و h_2 التحاكي الذي مركزه C ونسبته k_2 حيث : $h_2(O)=I$.



1) عين $h_1(A)$ و $h_2(A)$.

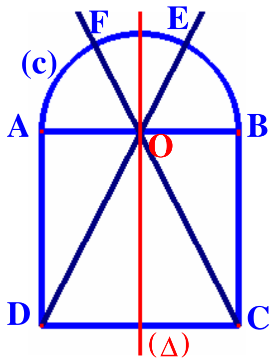
2) بين أن : $\overrightarrow{BI}=k_1\overrightarrow{BO}$ و $\overrightarrow{CI}=k_2\overrightarrow{CO}$.

استنتج أن : $k_1+k_2=2$.

3) برهن أن : $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{OA}$.

62 $ABCD$ مربع طول ضلعه a . (c) نصف دائرة قطرها $[AB]$ مركزها O .

خراج المربع ، المستقيمان (OD) و (OC) يقطعان (c) في النقطتين E و F على الترتيب (أنظر الشكل) .



1) برهن أن (Δ) محور القطعة $[AB]$ هو محور تناظر للشكل .

• استنتج أن المستقيمين (DC) و (EF) متوازيان.

2) h هو التحاكي الذي مركزه O ويحول النقطة D إلى النقطة E .

• برهن أن نسبة التحاكي h هي : $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ، وأن : $h(C)=F$.

• لتكن النقطتان H و K المسقطين العموديين للنقطتين E و F على $[AB]$. برهن أن الرباعي $EFKH$ مربع .

63 I] A و B نقطتان متمايزتان ، نعتبر التحاكي h_1 مركزه A ونسبته $-\dfrac{1}{2}$ والتحاكي h_2 مركزه B ونسبته 2.

لكل نقطة M نرفق النقطة M' حيث : $M'=h_1(M)$ ثم M'' حيث : $M''=h_2(M')$.

1) عرف النقطتين M' و M'' بعلاقتين شعاعيتين .

2) برهن أن : $\overrightarrow{BM''}=-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BA}$.

3) أثبت أنه توجد نقطة وحيدة M حيث : $M''=M$ نسميها Ω .

4) برهن أن النقطة Ω هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب .

5) برهن أن $\overrightarrow{\Omega M''}=-\overrightarrow{\Omega M}$. ما هو التحويل النقطي الذي يحول M إلى M'' ؟

II] ABC مثلث ، I ، J ، K منتصفات القطع $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب .

النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC .

لكل نقطة M نعتبر النقط P ، Q ، R نظائر النقطة M بالنسبة للنقط I ، J ، K على الترتيب .

نريد البرهان أن القطع $[AP]$ ، $[BQ]$ و $[CR]$ لها نفس المنتصف O ؛ وأن النقط M ، G ، O على استقامة واحدة.

1) برهن أنه يوجد تحاك h_1 يحول A إلى I و B إلى J و C إلى K .

2) عين نسبة ومركز التحاكي h_2 الذي يحول I إلى P و J إلى Q و K إلى R .

3) باستعمال الجزء [I] أوجد التحويل الذي يحول A ، B ، C إلى P ، Q ، R على الترتيب .

4) استنتج .

64 ABI مثلث في المستوي .

h_A التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

h_B التحاكي الذي مركزه B ونسبته 3 .

النقطة J صورة I بالتحاكي h_A .

النقطة K صورة J بالتحاكي h_B .

نضع $AB = 10\,cm$.

1) أنشئ النقطتين J و K .

2) عبر عن كل من النقطتين J و K كمرجح للنقط A ، B و I .

3) استنتج أن النقطة I هي مرجح النقط A ، B و K .

4) استنتج وجود نقطة وحيدة C من القطعة $[AB]$ حيث : $\overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI}$.

عين النقطة C في الشكل .

5) نضع $h = h_B \circ h_A$.

بين أن التحويل h هو التحاكي الذي مركزه C ونسبته 6 .

6) ما هو المحل الهندسي للنقط K لما تتغير I على الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 1 ؟

65 ABC مثلث . A' ، B' و C' منتصفات الأضلاع $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب .

H_A المسقط العمودي للنقطة A على $[BC]$.

H_B المسقط العمودي للنقطة B على $[AC]$.

H_C المسقط العمودي للنقطة C على $[AB]$.

O نقطة تقاطع محاور المثلث ABC .

G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC .

H نقطة تقاطع أعمدة المثلث ABC .

ليكن h التحاكي الذي مركزه G ونسبته $-\frac{1}{2}$ ؛

h' التحاكي الذي مركزه H ونسبته $\frac{1}{2}$.

I] مستقيم أولار (EULER)

1) ما هي صور النقط A ، B ، C بالتحاكي h ؟

2) استنتج صور أعمدة المثلث ABC بالتحاكي h .

3) ما هي صورة النقطة H بالتحاكي h ؟

4) ما هي الخاصية الهندسية التي تميز النقط O ، G و H .

II] دائرة أولار (EULER)

1) بالتحاكي h أوجد (c') صورة (c) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، نسمي ω مركزها .

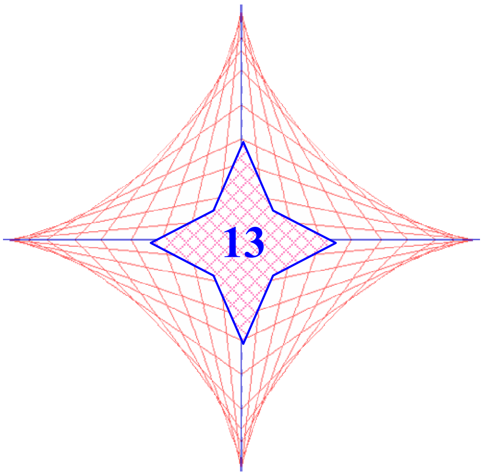
2) برهن أن ω منتصف القطعة $[OH]$ وأن (c') تشمل منتصفات أضلاع المثلث ABC .

3) بين أن الدائرة (c) لها نفس الصورة بالتحاكيين h و h' .

4) برهن أن ω تنتمي إلى محور القطعة $[A'H_A]$ ثم استنتج أن H_A ، H_B ، H_c تنتمي إلى (c') .

5) ما هي صور رؤوس المثلث ABC بالتحاكي h' ؟

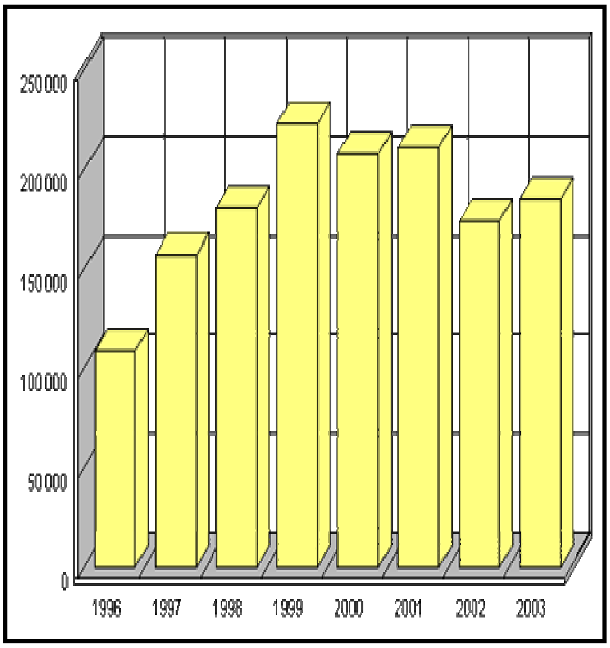
بين لماذا دائرة أولار (EULER) تسمى أيضا "دائرة النقط التسع"؟

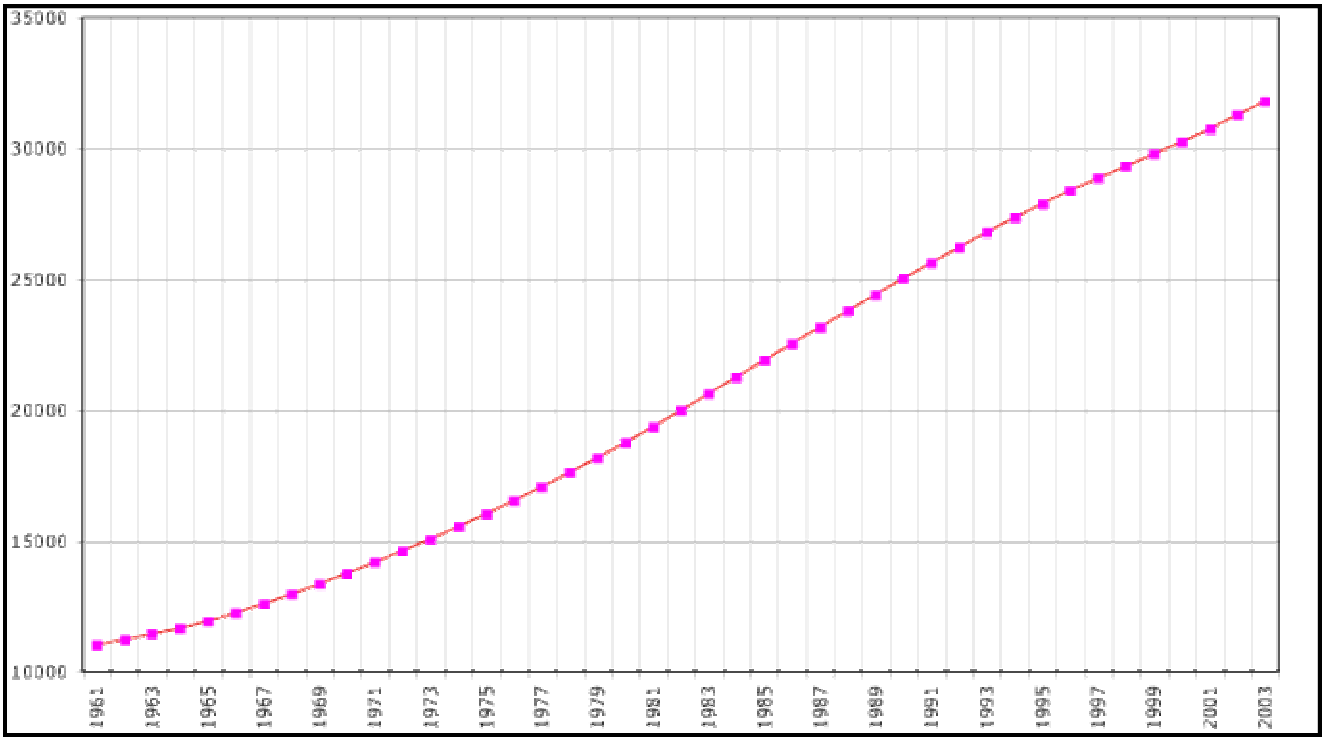


الإحصاء

الكفاءات المستهدفة

- تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة مخطط بالعلبة.
- تفسير مخطط بالعلبة.
- حساب الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة، الانحراف المعياري، الانحراف الربعي.
- تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة الثنائية (الوسط الحسابي، الانحراف المعياري).
- تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة الثنائية (الوسيط، الوسط الحسابي للانحرافات).
- توظيف خواص الانحراف المعياري و الانحراف الربعي في حل مسائل.





نشاط أول

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

القيم	4	7	10	13	16
التكرار	6	5	7	4	1

1- أحسب الوسط الحسابي للسلسلة

2- أكمل قائمة قيم الطبع الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا 4,4,4,4,4,4,7,7,7,7,7,10,.......

3- عين وسيط السلسلة

4- أحسب Q_1 وسيط السلسلة المكونة من الحدود الإثني عشر الأولى .

- ما هي نسبة الحدود (من السلسلة الكلية) و التي لها قيمة طبع أصغر أو تساوي Q_1 ؟

5- أحسب Q_3 وسيط السلسلة المكونة من الحدود الإثني عشر الأخيرة .

- ما هي نسبة الحدود (من السلسلة الكلية) و التي لها قيمة طبع أصغر أو تساوي Q_3 ؟

نشاط ثان

الجدول التالي يبين توزيع التواترات

و التواتر المجمع الصاعد لسلسلة إحصائية

الفئة	الحد الأعلى	التواتر	التواتر المجمع الصاعد
[0 ، 2 [	2	0,12	0,12
[2 ، 4 [	4	0,15	0, 27
[4 ، 6 [	6	0,18	0,45
[6 ، 8 [	8	0,24	0,69
[8 ، 10 [	10	0,14	0,83
[10 ، 12 [	12	0,10	0,93
[12 ، 14 [	14	0, 07	1

1- أنشئ على ورق ميليمتري منحنى التواتر المجمع الصاعد

2- عين فواصل نقط تقاطع المنحنى السابق مع المستقيمات

التي معادلاتها على الترتيب $y = 0,5$ ، $y = 0,25$ و $y = 0,75$

و لتكن هذه الفواصل هي Med ، Q_1 و Q_3 على الترتيب

3- لاحظ أن التواتر المجمع الصاعد 0,25 يقع في الفئة [2 , 4 [

نعتبر النقطتين $A(2 ; 0,12)$ و $B(4 ; 0,27)$. أحسب X_1

فاصلة النقطة M من المستقيم (AB) و التي ترتيبها 0,25

لاحظ أن X_1 قيمة تقريبية لـــ Q_1

4- باستعمال السؤال 3) أوجد قيمتين تقريبيتين لكل من Med و Q_3

نشاط ثالث

تعطى السلسلة الإحصائية التالية

القيم x_i	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10	10,1	10,2
التكرار n_i	17	22	25	29	31	35	45	40
القيم x_i	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11
التكرار n_i	25	14	12	10	10	8	5	2

1) أحسب الوسط الحسابي $\bar{X}$ و الوسيط Med

2) احسب العددين $e'_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{16} n_i\,|x_i - Med|$ و $e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{16} n_i\,|x_i - \bar{X}|$

مع N التكرار الكلي للسلسلة ، $|x_i - Med|$ المسافة بين x_i و Med ، $|x_i - \bar{X}|$ المسافة بين x_i و $\bar{X}$. قارن بين العددين

نشاط رابع

نعتبر السلسلة الإحصائية ذات قيم الطبع $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ حيث k عدد طبيعي أكبر تماما من 1

و لتكن تكراراتها على الترتيب $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$. نضع $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

نعرف دالة التشتت بالعبارة : $d(x) = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x)^2$

1) بين أن الدالة d تقبل قيمة حدية صغرى من أجل قيمة معينة لــ x يطلب تحديدها .

2) نضع $V = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i {x^2}_i}{n} - \bar{X}^2$ حيث $\bar{X}$ الوسط الحسابي للسلسلة . تحقق أن القيمة الحدية الصغرى للدالة d هي nV

نشاط خامس

يراقب بستاني أزهارا و يسجل في نهاية كل شهر أطوال سيقانها .

في نهاية الشهر الأول سجل النتائج التالية

طول السيقان cm	[3 , 5 [	[5 ، 7 [	[7 , 9 [
المراكز x_i	4	6	8
التكرار n_i	30	20	50

1. أحسب $\bar{X}$ الوسط الحسابي لهذه الأطوال
2. لتكن العبارة $s(x) = \frac{1}{10}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} n_i (x_i - x)^2}$
   - بيّن أن أصغر قيمة تأخذها العبارة $s(x)$ هي $s(\bar{X})$
3. في نهاية الشهر الثاني لاحظ البستاني أن أطوال السيقان تضاعفت ($y_i = 2.x_i$) ، أحسب $s(\bar{Y})$ حيث $\bar{Y}$ هو الوسط الحسابي الجديد ثم أوجد علاقة بين $s(\bar{X})$ و $s(\bar{Y})$
4. بعد الشهر الثالث إزداد طول السيقان بسنتمتر واحد ($z_i = y_i + 1$) أحسب الوسط الحسابي الجديد $\bar{Z}$ ثم استنتج علاقة بين $s(\bar{X})$ و $s(\bar{Z})$

الدرس

1- الربعيات

مدخل : نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

4 , 4 ,4 , 4 , 4 , 4 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 13 , 13 , 13 , 13 , 16

حيث أن قيم الطبع الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا و كل قيمة مكتوبة عددا من المرات مساو لتكرارها

نلاحظ أن التكرار الكلي N يساوي 23

- أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة السادسة لأن $\frac{N}{4}=5,75$

تسمى هذه القيمة الرُّبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1=4$)

- أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثامنة عشر لأن $\frac{3N}{4}=17,25$

تسمى هذه القيمة الرُّبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3=10$)

يمكن أن نلخص الوضعية كما يلي : **25 % على الأقل** **25 % على الأقل** **25 % على الأقل**

$$\underbrace{4,4,4,4,4}\,\underset{Q_1}{4},\underbrace{7,7,7,7,7},\underset{Med}{10},\underbrace{10,10,10,10,10},\underset{Q_3}{10},13,13,13,13,16$$

تعريف:

- **الربعي الأول Q_1 لسلسلة إحصائية هو أصغر قيمة للطبع الإحصائي حيث يكون 25% على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو يساوي Q_1 .**
- **الربعي الثالث Q_3 لسلسلة إحصائية هو أصغر قيمة للطبع الإحصائي حيث يكون 75% على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو يساوي Q_3**

ملاحظة : Q_1 و Q_3 قيمتان من السلسلة بخلاف الوسيط Med الذي يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة

كيف نحدِّد Q_1 و Q_3 :

بعد ترتيب القائمة ترتيبا تصاعديا (مع كتابة كل قيمة بعدد مساو لتكرارها) - Q_1 القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n\geq\frac{N}{4}$ - Q_3 القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n\geq\frac{3N}{4}$	<u>في حالة طبع كمي متقطع</u> نطبق التعريف باستخدام التكرار المجمع الصاعد أو التواتر المجمع الصاعد .	<u>في حالة طبع كمي مستمر</u> * Q_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ * Q_3 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$

2- العشريان d_1 و d_2

تعريف

- **العشري الأول d_1 لسلسلة إحصائية هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 10% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي d_1 .**
- **العشري التاسع d_9 لسلسلة إحصائية هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 90% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي d_9 .**

تمرين محلول 1

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

1- شكل جدول التكرار المجمع الصاعد و التواتر المجمع الصاعد

2- عين الوسيط Med و الربيعين Q_1 و Q_3 لهذه السلسلة

3- عين نسبة الحدود التي يحويها كل مجال من المجالات التالية $[Q_1 ، Q_3]$ ، $[\min ، Q_1]$ ، $[Q_3 ، \max]$

حيث min هو أصغر قيمة و max أكبر قيمة للطبع الإحصائي .

حـــل:

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3
ت م ص	5	12	15	23	31	37	40
تو م ص	0,125	0,3	0,375	0,575	0,775	0,925	1

2- التكرار الكلي : $N = 2\times 20$

و منه الوسيط Med هو نصف مجموع الحدين اللذين رتبتاهما 20 و 21

أي $Med = 7$

* بقراءة جدول التواتر المجمع الصاعد نلاحظ أن أصغر قيمة Q_1 حيث 25 % على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي Q_1 هي 4 و بتطبيق التعريف كذلك نلاحظ أن $Q_3 = 8$

3- يقع في المجال $[Q_1 ، Q_3]$ ، 21 حدا أي ما يعادل تقريبا% 52,5 من الحدود

نسبتا عدد الحدود في المجالين ، $[\min ، Q_1]$ و $[Q_3 ، \max]$ هما تقريبا % 30 و % 42,5 على الترتيب

تمرين محلول 2

إختيار من متعدّد

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة A , B , C , D, E

نعتبر السلسلة الإحصائية : $X_1, X_2, X_3, ..., X_8$ **حيث** $X_1 < X_2 < X_3 < .... < X_8$

الثلاثية $(Q_1 \ , \ Med \ , \ Q_3)$ **هي:**

$(A)....(\frac{X_2+X_3}{2}, \frac{X_4+X_5}{2}, \frac{X_6+X_7}{2})$ $(B)....(X_2, X_5, X_7)$ $(C)....(X_2, X_6, X_7)$

$(D)....(X_3, \frac{X_4+X_5}{2}, X_1)$ $(E)....(X_2, \frac{X_4+X_5}{2}, X_6)$

حـــل:

Q_1 هو الحد الذي رتبته $\frac{8}{4}$ أي $Q_1 = X_2$ و Med هو الحد $\frac{X_4+X_5}{2}$ و Q_3 هو الحد الذي رتبته $3\times\frac{8}{4}$ أي $Q_3 = X_6$

– الجواب الصحيح إذن هو (E)

خواص الربعيات :

1 – الإنحراف الرُبعي :

تعريف : الإنحراف الربعي هو الفرق بين الربعيين الثالث و الأول . أي هو العدد I حيث $I = Q_3 - Q_1$

ملاحظة 1: الإنحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

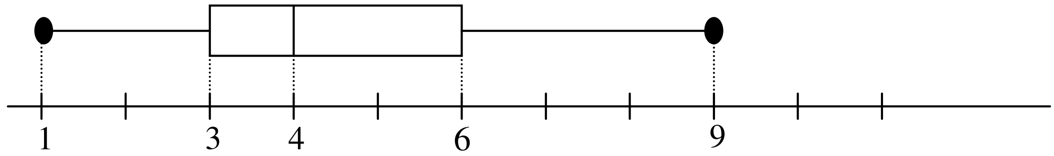
ملاحظة 2 : في مضلع سلسلة مستمرة المستقيمات التي معادلاتها $x = Q_1$ ، $x = Med$ ، $x = Q_3$
تقسم المضلع إلى أربعة مجالات متساوية المساحات

2 – المخطط بالعلب :

نكوّن مخططا بالعلب بالطريقة التالية :

- نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)
- نعيّن على هذا المحور القيم min ، max ، Q_1 ، Med و Q_3 .
(القيمة الصغرى ، القيمة الكبرى ، الربعيين الأول و الثالث و الوسيط)
- نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور . (طول المستطيل هو الانحراف الربعي و عرضه كيفي)

مثال : $min = 1$ ، $max = 9$ ، $Q_1 = 3$ ، $Med = 4$ و $Q_3 = 6$.



ملاحظة : هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع إحصائي و المقارنة بين عدّة سلاسل إحصائية .

3 – أثر تغيير تآلفي على الربعيين :

مبرهنة 1 :

$a > 0$

$Q_A \rightarrow \boxed{a.x+b} \rightarrow Q_B$

$Q_B = a.Q_A + b$

A سلسلة إحصائية (x_i ، n_i) وسيطها Med و ربيعيها الأول و الثالث هما Q_1 و Q_3
B السلسلة الإحصائية (y_i ، n_i) بنفس التكرارات حيث من أجل كل i لدينا
$y_i = ax_i + b$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$) نرمز لوسيطها بـ Med' و لربيعيها الأول و
الثالث بـ Q_1' و Q_3' على الترتيب عندئذ $Med' = a.Med + b$ و من أجل $a > 0$
لدينا : $Q_1' = a.Q_1 + b$ و $Q_3' = a.Q_3 + b$

تمرين محلول 3

دراسة سلسلة ذات طبع كمي مستمر

يهتم منظمو دورة في كرة المضرب بدراسة متوسط الزمن المستغرق للمباريات .
جُمعت النتائج في الجدول التالي :

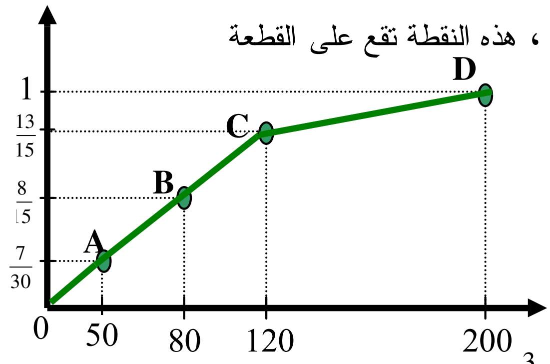
مجال الزمن (min)	[30 ، 50 [	[50 ، 80 [	[80 ، 120 [	[120،300 [
عدد المباريات	14	18	20	8

1 – أنشئ منحنى التواترالمجمّع الصاعد و استنتج قيمة الوسيط

2 –عيّن الربعيين الأول و الثالث للسلسلة . ما هو الانحراف الربعي ؟

حـــل:

مجال الزمن (min)	[30 ، 50 [	[50 ، 80 [	[80 ، 120[	[120،300[
عدد المباريات	14	18	20	8
التواتر	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{15}$	1



1) الوسيط Med هو فاصلة النقطة من المنحنى و التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ ، هذه النقطة تقع على القطعة المستقيمة [AB] حيث $A(50, \frac{7}{30})$ و $B(80, \frac{8}{15})$

معادلة (AB) هي $y = \frac{\frac{8}{15}-\frac{7}{30}}{80-50}(x-50)+\frac{7}{30}$

و منه $x = \frac{230}{3}$ $(50 \le x \le 80)$ $Med \approx 76,67$

2) بنفس الطريقة نبحث عن فاصلتي النقطتين اللتين ترتيباهما $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ وهما Q_1 و Q_3 على الترتيب

نجد $Q_1 \approx 51,66$ و $Q_3 = 106$ و منه الإنحراف الربعي $I \approx 54,33$

تمرين محلول 4

أجريت دراسة إحصائية حول مصاريف شراء الصحف اليومية خلال شهر في الجزائر و فرنسا (العينة 2000 شخص)

البلد	الوسيط	Q_1	Q_3	min	max
فرنسا (€)	27,5	22,5	36,5	15	75
الجزائر (DA)	350	250	420	200	950

– أنشئ المخططين بالعلب لهاتين السلسلتين في نفس المحور (1 € = 12 DA)

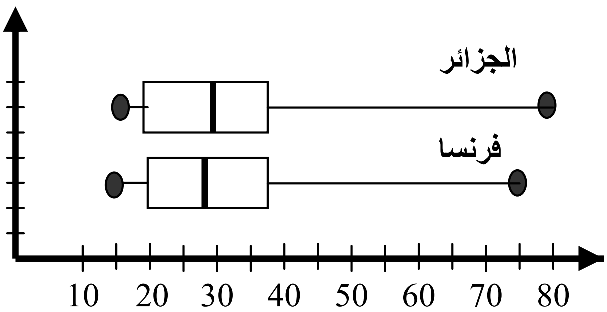
يوم 1 مارس 2006

حـــل: ينبغي أن تكون السلسلتان بنفس الوحدة

(نحول مثلا السلسلة الخاصة بالجزائر إلى الأورو €).

إذا كانت x قيمة بالدينار فإن قيمتها بالأورو هي $y = \frac{x}{12}$

الجزائر €	29,1	20,8	35	16.6	79,1



تمهيد :

عرفنا في السنة الأولى مؤشرات الموقع (المنوال ، الوسيط و الوسط الحسابي) و هي مؤشرات غير كافية للحكم على السلسلة الإحصائية بل لابدّ من معرفة تشتت حدود السلسلة حول مؤشر الموقع . ومن هنا ندرج هذه السنة ما يسمى بمؤشرات **التشتت** ومنها المدى الذي عرفناه في السنة السابقة .

التباين و الانحراف المعياري :

تعريف: نعتبر السلسلة (x_i, n_i) حيث x_i هي قيم الطبع و n_i تكراراتها مع $i \in \{1,2,3,...,p\}$

نسمي تباين السلسلة الإحصائية العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز V والمعرف بالعلاقة :

$V = \frac{1}{N}\left[n_1(x_1-\bar{X})^2 + n_2(x_2-\bar{X})^2 + ... + n_p(x_p-\bar{X})^2\right]$ مع $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ و $\bar{X}$ الوسط الحسابي للسلسلة

* إذا كانت f_i هي تواترات السلسلة حيث $i \in \{1,2,3,...,p\}$ فإن $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_1-\bar{X})^2$

يسمى العدد الحقيقي $\sqrt{V}$ الانحراف المعياري و يرمز له بالرمز **s** و نكتب **s =** $\sqrt{V}$

$f_i = \frac{n_i}{N}$

V عدد حقيقي موجب

ملاحظة : إذا كانت السلسلة مجمّعة بالفئات (توزيع منتظم) نأخذ x_i كمركز للفئة

مبرهنة 2 : نعتبر السلسلة (x_i, n_i) حيث x_i هي قيم الطبع و n_i تكراراتها مع $i \in \{1,2,3,...,p\}$ و p عدد طبيعي أكبر تماما من 1. يمكن كتابة V على الشكل

$$V = \frac{1}{N}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + ... + n_px_p^p) - \bar{X}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_ix_i^2 - \bar{X}^2$$

تستعمل هذه العبارة عادة لحساب V دون حساب $(x_i-\bar{X})^2$

برهان: لدينا $(x_i-\bar{X})^2 = x_i^2 - 2.x_i\bar{X} + \bar{X}^2$ و بالتالي $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}(n_ix_i^2 - 2.n_i.x_i\bar{X} + n_i.\bar{X}^2)$

أي أن $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2 - \frac{2}{N}\bar{X}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i + \frac{1}{N}\bar{X}^2\sum_{i=1}^{p} n_i$ مع العلم أن $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ و $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i$

و منه $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2$ إذن $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2 - \bar{X}^2$

$\sum_{i=1}^{p} a.x_i = a\sum_{i=1}^{p} X_i$

a مستقل عن i يمكن إخراجه قبل الرمز $\sum$

ملاحظة 1 : إذا كانت x_i قيم الطبع ذات وحدات معينة (أطوال ، زمن ، ...) فإن V يحسب بهذه الوحدات مربعة (مساحة ، زمن مربع ، ...) و بالتالي فإن وحدة **s =** $\sqrt{V}$ هي وحدة x_i

ملاحظة 2 : يستعمل أحيانا مؤشر تشتت آخر يسمى الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة و هو العدد الحقيقي e_m حيث $e_m = \sum_{i=1}^{p} f_i|.x_i - \bar{X}|$ مع x_i هي قيم الطبع ، $\bar{X}$ الوسط الحسابي ، f_i التواترات و $i \in \{1,2,3,...,p\}$

تمرين محلول 5

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04

1- أحسب التباين و الانحراف المعياري للسلسلة

2- أحسب الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة

حـــل:

1- نستعمل التعريف (2)

طريقة: نضيف سطرا للجدول لحساب القيم $f_i.x_i$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i$
نضيف سطرا آخرا للجدول لحساب $f_i.x_i^2$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i^2$

x_i	3	5	7	9	11	13	المجموع
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04	
$f_i.x_i$	0,24	0,75	1,96	3,15	1,1	0,52	7,72
$f_i.x_i^2$	0,72	3,75	13,72	28,35	12,1	6,76	65,4

باستعمال النظرية (2)

$V = 5,8016$

$s \simeq 2,4086$

2- لحساب الوسط الحسابي للإنحرافات المطلقة نطبق التعريف

طريقة: نكتب الأعمدة كمايلي : عمود لقيم x_i و عمود لقيم f_i ثم عمود $|x_i - \overline{X}|$ ثم عمود $f_i|x_i - \overline{X}|$ و أخيرا $e_m = \sum_{i=1}^{6} f_i|x_i - \overline{X}|$ (بعد حساب $\overline{X}$)

تمرين محلول 6

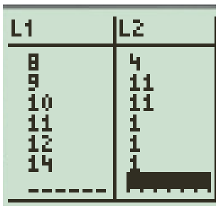
تحصل تلاميذ قسمي 1ع2 و 2ع2 على النقط التالية .
باستعمال الآلة الحاسبة (Ti 83+) ،
- أحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لكل من القسمين.ماذا تلاحظ ؟

1ع2	النقطة x_i	7	8	9	10	11	12	14
	التكرار n_i	1	4	11	11	1	1	1

2ع2	النقطة x_i	2	3	5	9	13	14	15	16	17
	التكرار n_i	5	5	3	3	1	1	5	3	4

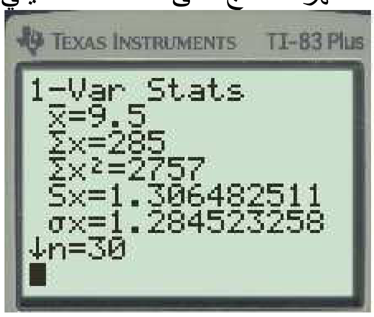
حـــل: حساب $\overline{X}$ و s بالنسبة للقسم 1ع2 نبدأ بإدخال المعطيات .

1- نستعمل اللمسة STAT ثم 1:Edit...
بعد إدخال المعلومات نتحصل على



2- لإظهار المؤشرات الإحصائية تستعمل اللمسات
STAT ثم نختار بالزالق CALC ثم ENTER
فيظهر على الشاشة **1:1-VarStat** فنكتب
ENTER (2nd 1 , 2nd 2) ENTER

فتظهر النتائج على الشاشة كما يلي



المعدل هو $\overline{x}$ و الإنحراف هو σ_x (نسجل النتائج و نعيد العملية مع القسم 2ع2)
*** فنلاحظ أن القسمين لهما نفس المعدل لكن الإنحراف المعياري لـ 1ع2 هو تقريبا 1,28 بينما في القسم 2ع2 فهو تقريبا 6,03 .**

النتيجة :

القسم 1ع2 أفضل من ناحية التجانس (مستوى التلاميذ متقارب)

خواص التباين و الانحراف المعياري :

❶ الخاصية الأساسية :

لماذا نحسب الوسط الحسابي لمربعات الانحرافات بالنسبة للوسط الحسابي لقيم الطبع ؟

هذا السؤال تجيب عنه المبرهنة التالية :

مبرهنة 3 : الدالة g المعرفة كما يلي $g(a)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-a)^2$ تقبل قيمة حدية صغرى عندما $a=\bar{X}$

هذه القيمة هي التباين V مع x_i قيم الطبع ، n_i تكراراتها ، $\sum_{i=1}^{p}n_i=N$

برهان :

(دراسة تغيرات g مع a متغير حقيقي) $g(a)=\frac{1}{n}\left[n_1(x_1-a)^2+n_2(x_2-a)^2+...+n_p(x_p-a)^2\right]$

$$g'(a)=\frac{-1}{N}\left[2n_1(x_1-a)+2n_2(x_2-a)+...+2n_p(x_p-a)\right]$$

$$=\frac{-1}{N}\left[2n_1x_1+2n_2x_2+...+2n_px_p-2(n_1+n_2+...+n_p)a\right]$$

$$=\frac{-1}{N}(2\sum_{i=1}^{p}n_ix_i-2a\sum_{i=1}^{p}n_i)=-2\bar{X}+2a$$

$g'(a)=0$ معناه $a=\bar{X}$ ($g(\bar{X})=V$)

a		$\bar{X}$	
$g'(a)$	-	0	+
$g(a)$	↘	V	↗

❷ التغيير التآلفي :

مبرهنة 4 : إذا كانت $A(x_i,n_i)$ سلسلة إحصائية تباينها V_x و انحرافها المعياري s_x

و $B(y_i,n_i)$ سلسلة إحصائية بنفس التكرار V_y و انحرافها المعياري s_y و $y_i=a.x_i+b$

مع $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$ من أجل $i\in\{1,2,3,...,p\}$ يكون لدينا $V_y=a^2.V_x$ و $s_y=|a|.s_x$

برهان: ليكن $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ الوسطين الحسابيين للسلسلتين A و B على الترتيب

لدينا $\bar{Y}=a.\bar{X}+b$ (تمت البرهنة عليها في السنة الأولى) ومنه :

$$V_y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i(y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=i}^{p}n_i\left[a.x_i+b-(a\bar{X}+b)\right]^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left[a(x_i-\bar{X})\right]^2$$

$$=a^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\bar{X})^2=a^2.V_x$$

لتكن الدالة f $x\mapsto a.x+b$ لدينا $y_i=f(x_i)$ ، من أجل $a>0$ تكون f متزايدة و بالتالي رتبة x_i في A هي نفسها

رتبة y_i في B (إذا كان $x_i\le x_{i+1}$ فإن $y_i\le y_{i+1}$) و بالتالي $S_y=\sqrt{a^2V_x}$ أي $S_y=|a|\sqrt{V_x}$ أي $S_y=|a|S_x$

تمرين محلول 7

1. يقترح مدير شركة على العمال طريقتين لزيادة الأجور
*** الطريقة الأولى : رفع الأجور كلها بنسبة% 5 * الطريقة الثانية : زيادة مبلغ 750 DA للجميع**
يُفضّل العمال الطريقة التي تتقارب بها الأجور أكثر بعد الزيادة . فإذا علمت أن معدل أجور العمال قبل الزيادة هو 15000 DA و الانحراف المعياري هو 5400 DA . فأي الطريقتين أنسب للعمال ؟

حـــل:

طريقة 1 : إذا كان X الأجر قبل الزيادة ، يكون عندئذ الأجر الجديد $Y = 1{,}05.X$

و منه معدل أجور العمال بعد الزيادة هو **15000 × 1,05 = 15750 DA**

و الإنحراف المعياري الجديد هو **5400 × 1,05 = 5670 DA**

طريقة 2 : معدل أجور العمال بعد الزيادة هو **15000 + 750 = 15750 DA**

و الإنحراف المعياري الجديد يبقى هو نفسه **5400 DA**

الخلاصة : الطريقة الثانية هي الأنسب للعمال إذ بها تتقارب أجورهم (إنحراف معياري أصغر)

معايرة سلسلة

(تحويلها الى سلسلة مركزة و مختصرة)

(x_i, n_i) سلسلة وسطها الحسابي $\bar{X}$ و انحرافها المعياري s . ما هو التغيير التآلفي الذي يجعل معدلها معدوما و انحرافها المعياري 1 ؟

طريقة

الجواب

حسب المبرهنة (4) : $s_y = |a|.s_x$ .... $0 = a\bar{X} + b$ .... $1 = |a|.s_x$

أي أن $a = \dfrac{1}{s_x}$ ..و.. $b = -\dfrac{\bar{X}}{s_x}$ و منه التغيير هو $y = \dfrac{x - \bar{X}}{s_x}$

تمرين محلول 8

أثناء إجراء تصفيات سباق 100 m سرعة في إحدى منافسات ألعاب القوى وزّع المتسابقون إلى أفواج حسب عدد الأروقة . شارك العداء A في مجموعة معدلها الزمني (تسعة ثواني) و انحرافها المعياري (ثانيتان) بينما شارك العداء B في مجموعة أخرى معدلها (ثمانية ثواني) و انحرافها المعياري (ثانية واحدة) .
إذا علمت أن زمن العداء A هو عشرة ثواني و زمن العداء B هو تسعة ثواني .
– أيهما أسرع إذا ما قيس زمنه في مجموعته ؟

حـــل: **المقارنة ممكنة بعد التغيير:** $y = \dfrac{x - \bar{X}}{s}$ ، $y_A = \dfrac{10-9}{2} = 0{,}5$ ، $y_B = \dfrac{9-8}{1} = 1$

الخلاصة : العداء A أسرع في مجموعته

تلخيص سلسلة إحصائية

1. **تمهيد**: مؤشر الموقع غير كاف للحكم على سلسلة إحصائية إذ لابد من معرفة تشتت قيم الطبع حول المتوسط أو الوسيط

- يتم تلخيص سلسلة إحصائية بمؤشرين (مؤشر موقع و مؤشر تشتت)
- عموما نختار الثنائية (الوسيط ، الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة) (Med ، e_m)
  أو الثنائية (الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري) أي ($\overline{X}$ ، s_x)
- يمكن استعمال ثنائيات أخرى لتلخيص سلسلة كالثنائية (الوسيط ، المدى) لكن يعاب على المدى تأثره بالقيم الشاذة .
- تستخدم أحيانا الثنائية (الوسيط ، الانحراف الرُّبعي) لتلخيص السلسلة و هي ثنائية لا تتأثر بالقيم الشاذة
- تلخيص سلسلة إحصائية يُمكّننا من مقارنتها بسلسلة أخرى ملخصة باستعمال الثنائية المختارة .

مثال1: الجدول التالي يبين عدد الساعات التي يقضيها شخصان A و B أمام التلفاز كل شهر في دراسة إحصائية أجريت سنة 2003 .

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الشخص A	68	60	61	43	41	51	51	60	60	126	108	110
الشخص B	44	42	57	63	77	79	76	92	92	97	79	60

1- أحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لكل شخص .

2- أحسب الوسيط و الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة لكل شخص أيضا .

الحل :

	تلخيص (1)			تلخيص (2)	
المؤشرات	$\overline{X}$	s_x		Med	e_m
الشخص A	$69^h55^{mn}12^s$	$28^h22^{mn}32^s$		$60^h00^{mn}00^s$	$22^h22^{mn}30^s$
الشخص B	$71^h30^{mn}00^s$	$17^h32^{mn}52^s$		$76^h30^{mn}00^s$	$15^h15^{mn}00^s$

من التلخيص نستنتج أن معدل الشخص B أكبر. فهو يقضي ساعات أكثر من الشخص A لكنّه يقضيها بطريقة أكثر انتظاما من A لأن انحرافه المعياري أصغر .

مثال2: عولجت علامات 200 متسابقا لاجتياز مسابقة شفوية للتسجيل في السنة الأولى جامعي فأعطت المؤشرات التالية الوسط الحسابي m = 11,4 الانحراف المعياري s = 5,2 الوسيط Med = 13 الانحراف الربعي 9 .

– اقترح ثنائيتين من المؤشرات كفيلتين بتلخيص هذه السلسلة من العلامات . فسّر.

الحل :

الثنائيتان المناسبتان هما $(Med ; Q_3\text{-}Q_1) = (13 ; 9)$ و $(m ; s) = (11{,}4 ; 5{,}2)$

يعود السبب في هذا الإختيار الى التقسيم الذي يمكن أن ننجزه بقيم هذه السلسلة انطلاقا من المعطيات المتوفرة لدينا . بالنسبة الى الثنائية الأولى نلاحظ أن تلميذا واحدا من بين اثنين علامته 13 على الأقل و أن النصف المركزي للعلامات موزع على 9 نقط . بالنسبة إلى الثنائية الثانية معدل العلامات 11,4 ومعدل مربعات انحراف قيم السلسلة عن هذا المعدل هو 5,2 . بما أن الوسيط أكبر من الوسط الحسابي فهذا يعني أن أكثر من نصف المتسابقين علاماتهم تفوق 11,4 .

استعمال مجدول Excel للحصول على التباين

ينتج مصنع قطعاً فضية نسجل سمكها بالمليمتر (mm) كما في الجدول التالي

السُمك (mm)	[1,8; 1,85 [	[1,85; 1,9 [	[1,9; 1,95 [	[1,95; 2,0 [	[2,0; 2,05 [	[2,05; 2,1 [	[2,1; 2,3 [
التكرار n_i	3	6	17	34	13	4	1

❶ افتح صفحة جديدة في المجدول إكسل (Excel)

1– اكتب في العمود A بداية من الأعلى الحدود الصغرى للفئات

2– اكتب في العمود B بداية من الأعلى الحدود الكبرى للفئات

3– نخصص العمود C لمراكز الفئات فاكتب في الخلية العليا منه =(A1+B1)/2 ثم انسخ هذه العبارة في باقي خلايا العمود

	A	B	C	D	E	F
1	1.8	1.85				
2	1.85	1.9				
3	1.9	1.95				
4	1.95	2				
5	2	2.05				
6	2.05	2.1				
7	2.1	2.3				

4– أكتب n_i تكرار كل فئة في الخلية المناسبة من العمود D

5– لحساب $n_i.x_i$ أكتب في الخلية العليا من العمود E العبارة =D1*C1 ثم انسخها في باقي خلايا العمود .

6– لحساب $n_i.x_i^2$ أكتب في الخلية العليا من العمود F العبارة =D1*C1^2 ثم انسخها في باقي خلايا العمود

	A	B	C	D	E	F
1	1.8	1.85	1.825	3	5.475	9.99188
2	1.85	1.9	1.875	6	11.25	21.0938
3	1.9	1.95	1.925	17	32.725	62.9956
4	1.95	2	1.975	34	67.15	132.621
5	2	2.05	2.025	13	26.325	53.3081
6	2.05	2.1	2.075	4	8.3	17.2225
7	2.1	2.3	2.2	1	2.2	4.84

7– في الخلايا D8 و E8 و F8 نحسب مجموع قيم كل عمود بالكتابة فيها =SOMME(D1:D7) و =SOMME(E1:E7) و =SOMME(F1:F7) على الترتيب

	A	B	C	D	E	F
8				78	153.43	302.073

8– في الخلية D10 نحسب الوسط الحسابي و ذلك بكتابة العبارة =E8/D8 في الخلية ذاتها (يمكن استعمال الدالة المرفقة في المجدول) و في الخلية E10 نحسب التباين و ذلك بكتابة العبارة =F8/D8-D10^2 في الخلية ذاتها

	A	B	C	D	E	F
10				1.967	0.0037	0.06078

(يمكن استعمال دالة التباين المرفقة في المجدول) ثم في الخلية F10 نحسب الانحراف المعياري و ذلك بكتابة العبارة =SQRT(E10) (أو =RACINE(E10) في حالة النسخة الفرنسية للمجدول) في الخلية ذاتها (و يمكن استعمال الدالة المرفقة في المجدول و هي STDEVP (ECART TYPE في النسخة الفرنسية))

11– لتحديد مجال الصلاحية أكتب في الخلية E12 العبارة =D10-F10 و في F12 العبارة = D10+F10

	A	B	C	D	E	F
12					1.9062	2.02776

* الآلة التي تنتج القطع تكون صالحة إذا كان مجال الصلاحية محتواة في المجال [1,9 ; 2] . هل الحالة كذلك ؟

❷ بعد تصليح الآلة حصلنا على التوزيع التالي : تحقق من صلاحية الآلة الآن .

السُمك (mm)	[1,8; 1,85 [	[1,85; 1,9 [	[1,9; 1,95 [	[1,95; 2,0 [	[2,0; 2,05 [	[2,05; 2,1 [	[2,1; 2,3 [
التكرار n_i	1	2	43	25	4	2	1

أعمال موجهة

تتنافس قاعتان للحلاقة A و B في جلب أكبر عدد من الزبائن . تبنّى صاحب القاعة A شعارا كتبه على الباب هو:
" الحلاقة في 40 دقيقة ." (كمعدل...) .

* علما أن الزمن الكافي للحلاقة هو 30 دقيقة وهذا يعني أن الزبون سينتظر دوره في أقل من 10 دقائق .

I) من أجل التحقق من صحة هذا الشعار واختيار الشعار المناسب المنافس قام صاحب القاعة B بإحصاء فترات الإنتظار في القاعتين A و B فكانت نتائجه كمايلي :

فترات الإنتظار بالدقائق	عدد زبائن القاعة A	عدد زبائن القاعة B
[0 , 2 [	29	0
[2 , 5 [	48	1
[5 , 10 [	54	69
[10 , 12 [	19	96
[12 , 15 [	13	23
[15 , 20 [	14	2
[20 , 30 [	11	0
[30 , 60 [	10	0

1- أحسب الوسط الحسابي m_1 و الانحراف المعياري s_1 بالنسبة للقاعة A . هل شعار A صادق ؟

2- أحسب الوسط الحسابي m_2 و الانحراف المعياري s_2 بالنسبة للقاعة B ثم قارنهما بالنتائج السابقة .

3- اقترح شعارا مناسبا لقاعة الحلاقة B.

II) إذا علمت أن فترات الانتظار عدّلت كما يلي :

فترات الإنتظار بالدقائق	عدد زبائن القاعة A	عدد زبائن القاعة B
[0 , 2 [	29	0
[2 , 5 [	48	1
[5 , 10 [	54	69
[10 , 15 [	32	119
[15 , 20 [	14	2
[20 , 30 [	11	0
[30 , 60 [	10	0

1- أحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري .

2- ما رأيك في شعار B المقترح الآن ؟

3- ما تعليقك حول شعار A الآن ؟

أعمال موجهة

الجدول التالي يبين المعدلات السنوية لتلاميذ القسمين 2 ع1 و 2ع2

الفئات	[0;8[	[8;9[	[9;10[	[10;12[	[12;13[	[13;14[	[14;20[
عدد تلاميذ 2ع1	0	4	10	10	5	2	1
عدد تلاميذ 2ع2	3	5	9	12	3	0	0

I) 1- أحسب الوسط الحسابي لكل من القسمين (معدل القسم)

2- أحسب الإنحراف المعياري لكل من القسمين

II) علما أن الإنتقال الى القسم الأعلى يقتضي معدلا سنويا يساوي أو يفوق 10

1- ما عدد التلاميذ الذين سينتقلون إلى السنة الثالثة ؟

2- أحسب نسبة النجاح في كل قسم ، ثم حدد القسم الأحسن ؟

3- علي و مصطفى تلميذان من القسمين 2ع1 ، 2ع2 معدلاهما السنويان 10,5 ، 9,75 على الترتيب . بمعايرة معدليهما ما تعليقك ؟

طريقة المعايرة

نرمز بـــ $\bar{M}$ للمعدل السنوي المعيّر للتلميذ و بـــ $\bar{X}$ لمعدل القسم السنوي و بـــ s للانحراف المعياري للقسم فيكون $\bar{M} = 10 + \dfrac{m-\bar{X}}{s}$ (m معدل التلميذ)

4- إذا علمت أن نتائج علي في الثلاثي الأول والثاني كانت

	معدل علي	معدل القسم	الانحراف المعياري للقسم
الثلاثي 1	11	9	1
الثلاثي2	12.5	9.5	2

- هل علي يتقدم أم يتأخر ؟

- بمعايرة معدليه في الثلاثيين ما تعليقك ؟

5- معدلات مصطفى السنوية في المواد الأساسية كانت

	علوم	فيزياء	رياضيات
معدل مصطفى	9	8	10
معدل القسم	10	8	11
الانحراف المعياري للقسم	2	2	1.5

- ما هي المادة التي أثرت سلبا على معدله العام ؟

- بمعايرة معدلات المواد الثلاثة، ما تعليقك ؟

III) نريد تغيير طريقة الانتقال إلى القسم الأعلى لتصبح كما يلي

" ينتقل إلى القسم الأعلى 75 % من التلاميذ الأوائل بعد ترتيب معدلاتهم السنوية ترتيبا تنازليا "

1- ما عدد التلاميذ الذين سينتقلون إلى السنة الثالثة إذا طبقنا طريقة الانتقال على كل قسم ؟

- هل سينتقل كل من علي ومصطفى ؟

2- ما عدد التلاميذ الذين سينتقلون إلى السنة الثالثة إذا طبقنا طريقة الانتقال على القسمين بعد دمجهما ؟

- هل سينتقل كل من علي ومصطفى ؟

3- أنجز حوصلة للنتائج السابقة.

مسألة محلولة 1 :

ندرس في هذا التمرين تأثر الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري عند إضافة قيمة طبع إحصائي للسلسلة .

نعتبر السلسلة الإحصائية $X_1, X_2, X_3, \dots\dots, X_n$ و ليكن m_0 وسطها الحسابي و V_0 تباينها .

نضيف القيمة $X_{n+1} = X$ إلى السلسلة السابقة و نعتبر $m(X)$ الوسط الحسابي الجديد و $V(X)$ التباين الجديد (أي بعد إضافة القيمة X_{n+1}) .

1- بين أن $m(X) = \dfrac{X + n.m_0}{n+1}$

2- كيف يمكن اختيار X حتى يكون $m(X) = m_0$ ؟

3- برهن أن : $V(X) = \dfrac{n}{(n+1)^2}X^2 - 2.X\dfrac{n.m_0}{(n+1)^2} + \dfrac{n.V_0}{n+1} + \dfrac{n.{m_0}^2}{(n+1)^2}$

4- ماهي قيمة X التي يكون من أجلها $V(X)$ أصغر ما يمكن ؟

5- أنشئ جدول التغيرات للدالتين m و V (المتغير هو X)

6- علامات تلميذ في مادة الرياضيات خلال سنة دراسية هي كما يلي :

15	13	11	12	10	9

a- أحسب m_0 معدل التلميذ و s_0 الانحراف المعياري لهذه السلسلة .

b- توضع في نهاية السنة علامة x خاصة بالسيرة و السلوك لكل تلميذ و يريد الأستاذ أن تكون هذه العلامة مناسبة للجانب المعرفي .

x	15	13	11	12	10	9

– ماهي العلامة x حتى يبقى المعدل m_0 ثابتا (بعد وضع العلامة) ؟

– إذا أراد الأستاذ أن يبقى الانحراف المعياري s_0 ثابتا بعد إضافة العلامة x (الحفاظ على تجانس العلامات) فما هي قيمة x عندئذ ؟

– لو أضاف الأستاذ العلامة 14 . ما تأثير ذلك على المعدل و الانحراف المعياري بالزيادة أو بالنقصان . ما تعليقك ؟

حـــل :

1- $$m(X) = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n + X}{n+1} = \frac{X + n.m_0}{n+1}$$

2- $m(X) = m_0$ يعني **$X = m_0$**

3- $$V(X) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i - m(X))^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[(X_i - m_0) + (m_0 - m(X)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[n.V_0 + (X - m_0)^2 + \frac{(m_0 - X)^2}{n+1} + 2\frac{m_0 - X}{n+1}(X - m_0)\right]$$

و أخيرا نجد العلاقة المطلوبة : $$\mathbf{V(X) = \frac{n}{(n+1)^2}X^2 - 2.X\frac{n.m_0}{(n+1)^2} + \frac{n.V_0}{n+1} + \frac{n.{m_0}^2}{(n+1)^2}}$$

4- نبحث عن مشتقة V للمتغير X ، $V'(X) = \dfrac{2Xn}{(n+1)^2} - 2\dfrac{n.m_0}{(n+1)^2}$ تنعدم المشتقة من أجل $\mathbf{X = m_0}$

5- جدول تغيرات m مع $m'(X)=\frac{1}{n+1}$

X	m_0
m(X)	↗ m_0

جدول تغيرات V

X	m_0
v(X)	↘ $\frac{n}{n+1}V_0$ ↗

6) a - $m_0\approx 11,66$ ، $s_0\approx 2,16$

b - العلامة X التي تبقي المعدل ثابتا هي $X\approx 11,66$

بقاء الانحراف المعياري ثابتا يعني بقاء V_0 ثابتا وعليه نحل المعادلة $V(X)=V_0$ نجد $X\approx 12,61$ أو $X\approx 10,70$

إضافة العلامة 14 تعني زيادة في المعدل و الانحراف المعياري

التعليق " مستوى التلميذ المعرفي لا يتناسب مع هذه العلامة في السلوك "

مسألة محلولة 2 :

تمت دراسة حول عينة (340 شاشة جهاز حاسوب) لخصت النتائج في الجدول التالي :

مدة الصلاحية بالسنوات	التكرار
[0 ; 1[	91
[1 ; 1,5[	40
[1,5 ; 2[	47
[2 ; 3[	82
[3 ; 4[	62
[4 ; 5[	18

1- احسب m معدل مدة صلاحية شاشة في هذه السلسلة - احسب s الانحراف المعياري لهذه السلسلة

2- إذا علمنا أن ثمن شاشة 5000 DA (مع ضمان سنة) و أن كل الزبائن يفضلون دفع ثمن إضافي مقابل الضمان للشاشة لمدة سنتين إضافيتين . ما هو عندئذ الثمن الذي ينبغي للشركة أن تقترحه مقابل الضمان للسنتين الإضافيتين تفاديا للخسارة عند تغيير الشاشات؟

3- بعد مدة تحسنت نوعية الشاشات فازدادت نسبة مدة الصلاحية بـ 50 %

a- احسب المتوسط m' و الانحراف المعياري s' بعد التحسن .

b- احسب M' ثمن الضمان للسنتين الذي تقترحه عندئذ الشركة

4- احسب Med وسيط السلسلة و الانحراف الربعي I . ماذا تلاحظ ؟

1- بعد الحساب نجد : $m\approx 2,0022$ أي ما يعادل سنتان و 13 يوما (نلاحظ أن أطوال الفئات مختلفة)

بتطبيق التعريف نجد $s\approx 1,216$ أي ما يعادل سنة واحدة و 78 يوما

2- إذا دفع كل الزبائن ثمن الضمان (M.DA) للسنتين الإضافيتين

ستربح الشركة 240M DA لكنها ستغير الشاشات التي مدّة

صلاحيتها أقل من 3 سنوات أي : $91+40+47+82=260$

أي بتكلفة (1300000 DA) يكون لدينا $M=\frac{1300000}{340}\approx 3824DA$

ملاحظة : هناك حل آخر باعتبار أن الشركة لا تعتبر الشاشات التي مدّة صلاحيتها أقل من سنة لأن ثمن ضمانها مدفوع (ضمن ثمن الشراء) و بالتالي : $M\approx 2485DA$

3- a) $m'=1,5\times m$ ، $s'=1,5\times s$ b) في هذه الحالة ستغير الشركة : $47+40+91=178$ شاشة فقط

و بالتالي $M'=\frac{890000}{340}$ أي أن $M'\approx 2618DA$

و هذا إذا لم نعتبر السنة الأولى للضمان (أي ثمن الضمان للسنة الأولى ليس ضمن ثمن الشراء)

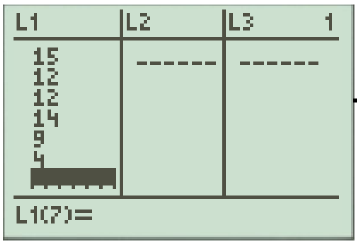
4- $(Med;I)=(2,9;4)$ ، $(m';s')=(3,03;1,81)$ و بالتالي 50% من الشاشات تتراوح مدة صلاحيتها بين 1,4 و 4,4 و 50% على الأقل لها مدة صلاحية أصغر من المعدل.

1- إنشاء مخطط بالعلبة باستعمال حاسبة بيانية

لإنشاء مخطط بالعلبة نستعمل الوظيفة STAT PLOTS المحصل عليها باللمستين 2nd و STAT PLOT Y=

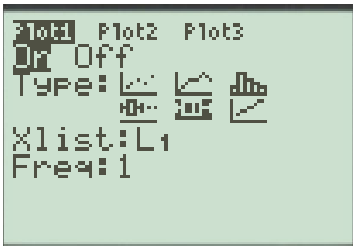
تمرين: نعتبر السلسلة: 15 ،12 ، 12 ، 14 ، 9 ، 4. باستعمال حاسبة بيانية، مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

حـل :

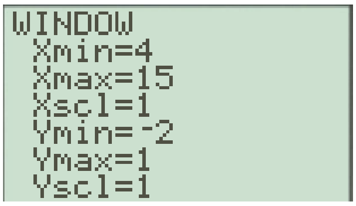


1. باستعمال اللمسة STAT نحجز العلامات في القائمة L1 في البرنامج EDIT .

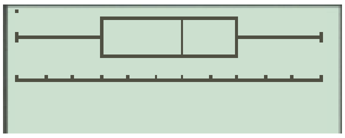
2. نحصل على الوظيفة STAT PLOTS باللمستين 2nd STAT PLOT Y=



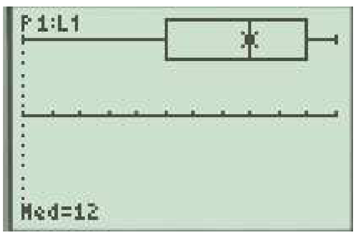
3. نضغط على 1 (أو على ENTER) للحصول على الوظيفة Plot1
ثم نختار النوع الخامس للتمثيل البياني.



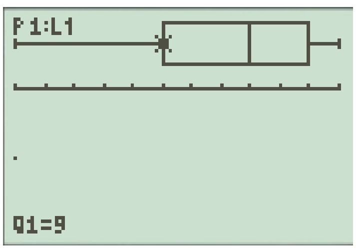
4. نضبط الفواصل في النافذة بالضغط على اللمسة WINDOW .



5. نظهر التمثيل باللمسة GRAPH .



6. لاستظهار قيم المؤشرات الإحصائية نضغط على اللمسة TRACE
فيشير الزالق إلى موقع الوسيط .



7. نحصل عل قيمة أخرى (الربعيان أو القيمة الصغرى أو القيمة الكبرى)
بتحريك الزالق باستعمال أسهم التنقل للآلة

ملاحظات:

- يمكن إنشاء علبة لسلسلة أخرى في نفس البيان وهذا بحجز قيم هذه السلسلة في قائمة أخرى (L2 مثلا)، ثم اختيار Plot2 باللمسات 2nd و STAT PLOT Y= و 2 و إتباع نفس المراحل السابقة.
- إذا قدمت السلسلة بقيمها مرفقة بالتكرارات الموافقة، نحجز القيم في إحدى القوائم (L1 مثلا) والتكرارات في قائمة أخرى (L2 مثلا)، ثم بعد اختيار التمثيل نسجل L2 في : Freq (Freq:L2).

2.إنجاز محاكاة تجربة عشوائية باستعمال حاسبة بيانية

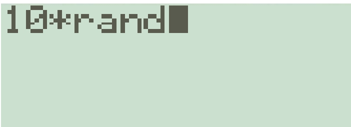
لإنجاز محاكاة بحاسبة بيانية، من النوع TI، نستعمل الوظيفة 1:rand التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و 1 والتي تنفذ باللمسة MATH والوظيفة PRB

تمرين:

أنجز، باستعمال حاسبة بيانية، محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة مع تسجيل الحرف F عند ظهور الوجه والحرف P عند ظهور الظهر.

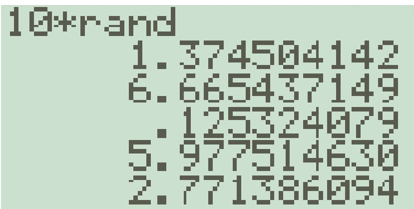
حل : بما أن الوظيفة 1:rand للحاسبة من نوع TI 83 تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و 1 متكوّن من **9** أرقام بعد الفاصلة فقط ، فنستعمل التعليمة 10*rand للحصول على عدد محصور بين 0 و**10**.

1. ننفذ البرنامج: 1 PRB MATH × 10



2. نضغط على ENTER ونحصل، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و10. نعتبر كل أرقام هذا العدد ونصطلح أن كل رقم زوجي (مثلا) يمثل الظهر(P) وكل رقم فردي يمثل الوجه (F).
في هذه الحالة العدد المسحوب هو 1,374504142 ويمثل نتيجة 10 رميات : FFFPFPPFPP
ملاحظة: نقرأ الأرقام من اليسار إلى اليمين.

نضغط على ENTER 4 مرات أخرى ونحصل على 4 سلاسل من 10 أرقام في كل منها وتكون النتيجة النهائية كما يلي:
ملاحظة: العدد العشوائي .125324079 الظاهر في الشاشة هو العدد العشري 0,125324079.



FFFPFPPFPP
PPPFPFFFFPF
PFPFFPPPFF
FFFFFFPPFP
PFFFFPPPFP

لإنجاز محاكاة بحاسبة بيانية، من النوع TI، نستعمل الوظيفة randInt(التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد محصور بين عددين كيفيين، والتي تنفذ باللمسة MATH والوظيفة PRB

تمرين:

باستعمال حاسبة بيانية، أنجز محاكاة رمي زهر نرد 20 مرة.

حـل :

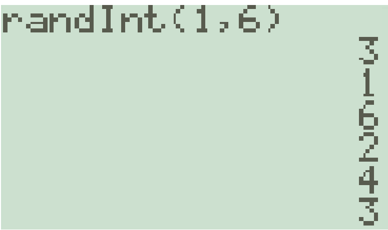
1. نضبط الآلة على 0 رقم بعد الفاصلة باستعمال اللمسة MODE والوظيفة Float

2. ننفذ البرنامج: MATH PRB 5

3. ننفذ البرنامج: 1 , 6)

4. نضغط على ENTER ونحصل، بصفة عشوائية، على عدد طبيعي بين 1 و6.

5. نضغط على ENTER 20 مرة ونحصل بصفة عشوائية على سلسلة من 20 عددا محصورا بين 1 و6.



ملاحظة: يمكن الحصول مباشرة على n نتيجة مخزنة في إحدى قوائم الحاسبة باستعمال الوظيفة seq(المحصل عليها بالبرنامج: 2nd STAT(LIST) OPS 5

تمرين: **باستعمال حاسبة بيانية، أنجز محاكاة رمي زهر نرد 120 مرة.**

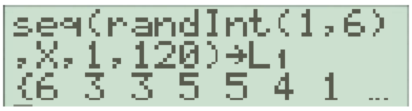
حـل :

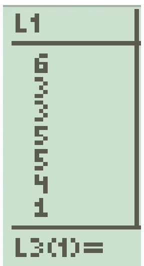
بتنفذ البرنامج

2nd STAT(LIST) OPS 5 MATH PRB 5 1 , 6) , X,T,θ,n , 1 , 120 STO▸ 2nd 1(L1) ENTER

تظهر النتائج على الشاشة.

ملاحظة: يمكن استظهار القائمة باللمسة STAT ثم 1 نستعمل اللمسة ▼ لمشاهدة كل الأعداد.





3- تعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة.

- **باستعمال حاسبة**

لتعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة بحاسبة نستعمل الوظيفة

المحصل عليها بالبرنامج: 2nd STAT(LIST) MATH 5 .

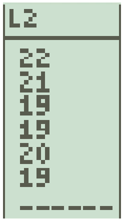
تمرين: عين عدد مرات ظهور كل وجه في محاكاة رمي زهر النرد 120 مرة.

__الحل :__

بتنفيذ البرنامج

2nd STAT(LIST) OPS 5 2nd STAT(LIST) MATH 5 2nd 1(L1) 2nd MATH(TEST)
) , X,T,θ,n , 1 , 6) STO→ 2nd 2(L2) ENTER

تظهر النتائج على الشاشة.

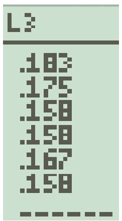


ملاحظات:- يمكن استظهار القائمة L2 باللمستين STAT و 1 .

في هذه الحالة، فإن أعداد ظهور الأوجه الستة 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5، 6 هي 22 ، 21 ، 19 ، 19 ، 20 ، 19 على الترتيب.

- **لتعيين التواترات** الموافقة في القائمة L3 يكفي تنفيذ البرنامج التالي:

2nd 2(L2) ÷ 120 STO→ 2nd 3(L3) ENTER



التواترات الموافقة هي: 0,183 ، 0,175 ، 0,158 ، 0,158 ، 0,167 ، 0,158.

4- التمثيل البياني لنتائج تجربة عشوائية بعد محاكاة باستعمال حاسبة

لتمثيل نتائج تجربة عشوائية بعد محاكاة ،بيانيا ، بحاسبة نستعمل الوظيفة Plot1 المحصل عليها

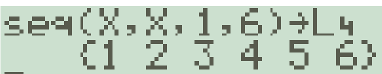
بالبرنامج: 2nd Y=(STAT PLOT) 1

تمرين : أنجز تمثيلا بيانيا لنتائج التجربة العشوائية السابقة

__حل :__

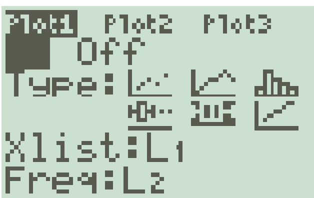
1) نعد " قائمة فواصل" التي نخزنها في أحدى القوائم (L4 مثلا) بتنفيذ البرنامج:

2nd STAT(LIST) OPS 5 X,T,θ,n , X,T,θ,n , 1 , 6)
STO→ 2nd 4(L4) ENTER

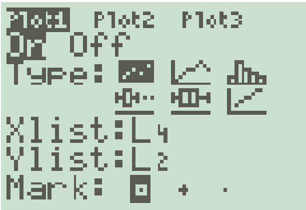


2) ننفذ البرنامج:

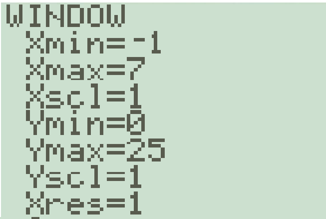
2nd Y=(STAT PLOT) 1



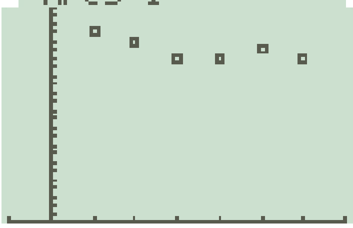
3) نختار أحد البيانات (مثلا ( ) ثم نضغط على ENTER.



4) نسجل L4 (قيم الوجه) في Ylist: و L2 (التكرارات) في Xlist: مع اختيار شكل النقط المراد استعمالها في الرسم



5) نضبط النافذة باختيار القيم الحدية والوحدات الملائمة.



6) نضغط على GRAPH ونحصل على التمثيل البياني.

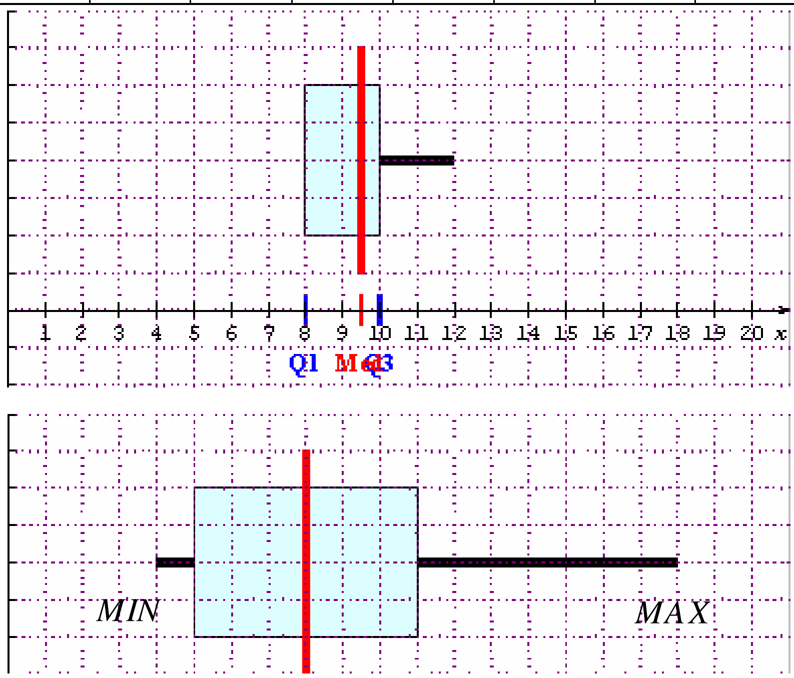
ملاحظة: يمكن الحصول على التمثيل البياني باستعمال التواترات بدل من التكرارات و هذا باختيار القائمة L3 التي تحتوي على التواترات بدل من

5- مقارنة سلاسل بواسطة مخططات بالعلبة (باستعمال برمجية)

تمرين : سجلنا علامات علي و مصطفى في مادة الرياضيات طوال السنة الدراسية

علي	5	10	9	7	5	4	4	5	14	13	18	11
مصطفى	8	9	11	10	12	12	8	8	9	10	8	10

حل :



باستعمال برمجية
SENEQUANON
نتحصل على الشكل المقابل
الذي يمكننا من مقارنة السلسلتين

أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **11**

أجب بصحيح أم خطأ مع التحليل :

1 في سلسلة إحصائية ذات $2n$ قيمة مرتبة ترتيبا تصاعديا ، الوسط الحسابي هو القيمة ذات الرتبة n .

2 في سلسلة إحصائية 50 % من القيم تكون أصغر من أو تساوي الوسيط .

3 في سلسلة إحصائية 25 % من القيم تكون أكبر من Q_3 (الربعي الثالث) .

4 تباين سلسلة إحصائية يكون دائما موجب .

5 الانحراف المعياري لا يكون دائما أصغر من التباين.

6 إدا كان الانحراف لسلسلة معدوما فإن كل قيم هذه السلسلة متساوية.

7 الوسيط يقسم سلسلة إحصائية إلى جزأين متساويين.

8 الوسيط سلسلة إحصائية يكون دائما أصغر من الوسط الحسابي .

9 الربعي (أو الرُبَيْع) الأول يكون دائما أصغر من الربعي الثالث.

10 الوسيط هو الوسط الحسابي لــ Q_1 و Q_3 .

11 الوسيط هو Q_3 .

بالنسبة إلى التمارين من **12** إلى **15** أختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة.

12 نعتبر سلسلتين إحصائيتين S_1 و S_2 حيث وسط S_1 هو 5 ، تباين S_1 هو 1 وسط S_2 هو 9 ، تباين S_2 هو 1

V تباين سلسلة S تتضمن قيم S_1 وقيم S_2 .

V=.........

1) 1

2) 1,5

3) لا يستطيع حساب V (لا يوجد معطيات كافية)

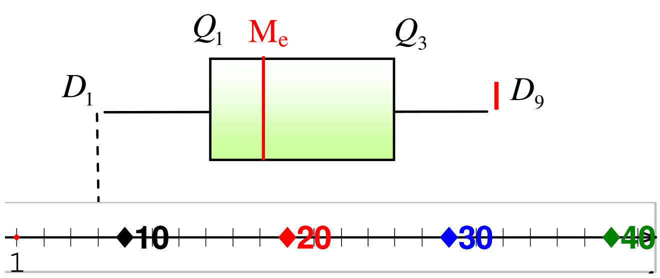
14 في سلسلة إحصائية ذات قيم موجبة و تتضمن على الأقل 10 قيم ، نضرب في 1 أكبر قيمة فإن:

1) الوسيط لا يتغير .

2) الربع الأول يتغير .

3) المخطط بالعلبة لا يتغير .

15 سلسلة إحصائية تتضمن 100 قيمة متمايزة، مخطط بالعلبة هو كالآتي:



1) الوسط الحسابي لهده السلسلة هو 20.

2) الوسيط هو 18.

3) عدد القيم بين D_1 و D_9 هو ثلاث مرات عدد القيم بين الربعي الأول و الوسيط.

16

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية التالية: 14_20_7_3_7_5_9_7

17

1) احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية التالية:
8_4_1_13_0_1_3_7_7_2

2) استنتج الوسط الحسابي و الانحرافي للسلسلة الإحصائية التالية:
738_734_731_743_730_731_733_737_737_732 .

18 لتكن السلسلة الإحصائية ذات القيم $x_1,x_2,.....,x_k$

بالتكرارات $n_1,n_2,.....,n_k$ على الترتيب

نعطي :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 86 \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = 847$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 80 \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 = 11791$$

1) ما هو التكرار الإجمالي ؟

2) عين قيمة الوسط الحسابي ؟

3) ما هي قيمة التباين ؟

4) ما هي قيمة الانحراف المعياري ؟

19 حكيمة تحرص كثيرا على وزنها حيث وزنها المتوسط هو : 54.8 Kg بانحراف معياري يعادل 3.2 Kg اكتشفت حكيمة أن ميزانها غير منضبط ، حيث يجب إضافة 7 % للأوزان السابقة ثم حذف 1 Kg لتعديل الخطأ المسبب فيه الميزان

1) ما هو وزن حكيمة ؟

2) عين الانحراف المعياري .

20 في إحدى الشركات، الأجهزة المتوسطة للعمال هي: $14485\ DA$.
بانحراف معياري يقدر بـِ $6000\ DA$ قرر مدير عام لشركة زيادة $1600\ DA$ في أجور كل العمال و زيادة أخرى تقدر بـ 3 % من الأجر الشهري الحالي

1) ما هو الأجر المتوسط ؟

2) احسب الانحراف المعياري .

21 ليكن x عدد حقيقي.
نعتبر السلسلة الإحصائية $4\_7\_13\_14\_5x$

1) نضع m الوسط الحسابي للسلسلة ، عبر عن m بدلالة x

2) نضع v تباين السلسة الإحصائية، عبر عن v بدلالة x

3) هل توجد قيم للعدد x التي يكون من أجلها :

▪ V=1 و V=166 ؟

4) أوجد أصغر قيمة ممكنة لـِ V

5) ما هي قيمة الوسط الحسابي ؟

22 x و y عددان حقيقيان ، نعتبر السلسلة الإحصائية :
$1\_2\_6\_8\_6x\_6y$

1) m الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية ، عبر عن m بدلالة x ، y.

2) v تباين السلسلة الإحصائية ، عبر عن v بدلالة x و y

3) من أجل أي قيم x و y يكون : $m=8$ و $v=\frac{103}{3}$ ؟

23 لتكن السلسلة الإحصائية : $1\_3\_4\_x$
(x عدد حقيقي).
هل توجد قيم لـــ x التي من أجلها يكون الوسط الحسابي والانحراف المعياري متساويان ؟

24

بعد الامتحان كانت النقاط المحصل عليها في مادة الرياضيات للأقسام 2ع1 ، 2ع2 و 2ع3 كالآتي :

القيم النقاط	6	8	9	10	11	12	13	14	15	17	19
2ع1	1	1	1	3	8	10	4	1	0	0	0
2ع2	0	4	2	1	5	6	4	1	4	1	1
2ع3	5	1	2	0	2	0	1	5	0	0	6

1) احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لكل قسم ؟ علل إجابتك .

2) احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لنقاط الرياضيات للأقسام الثلاث .

الربعيات

25

في الحالات التالية يعطى التكرار الإجمالي لعينة . القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا .

– أوجد رتبة الربعي (أو الربيع) الأول و الثالث ، ثم أوجد رتبة الوسيط .

1) n=133
2) n=154
3) n=186
4) n=294

26

لتكن السلسلة الإحصائية

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	11	16	8	12	7	9	15	1

1) احسب الوسيط M_e و الربعيين Q_1 و Q_2

2) عين العشري الأول و التاسع D_1 و D_9

27

نفس التمرين السابق بالنسبة للسلسلة الإحصائية :

x_i	100	300	500	700	900	1100	1300
y_i	10	25	12	31	18	29	14

28 لتكن السلسلة الإحصائية التالية :

الفئات	$[15,20[$	$[20,25[$	$[25,30[$	$[30,40[$	$[40,50[$	$[50,70[$
x_i	10	22	12	7	10	6

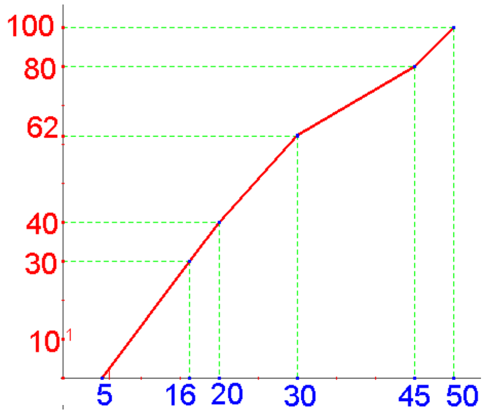
1) ارسم مدرج تواتر المتجمع الصاعد .

2) ارسم مدرج التكرار المتجمع الصاعد .

3) عين الوسيط و الربعيين Q_1 و Q_2 بالحساب .

29 الشكل التالي يمثل تكرار المجتمع الصاعد لسلسلة إحصائية .

عين بيانيا قيمة الوسيط ، ثم الربعيين Q_1 و Q_2 لهذه السلسلة .



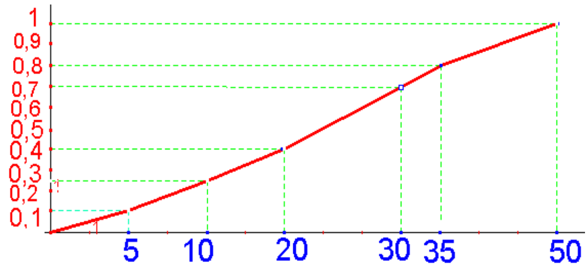
30 بالنسبة للسلسلة الإحصائية التالية أحسب الربعي (أو الرُبيْع الأول) ، الوسيط ، و الربعي الثالث .

1) 5-5-5-5-5-5-5-5-5-5
2) 3-3-3-3-3-3-4-4-4-4
3) 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
4) 10-9-8-7-6-5-4-3-2-1
5) 1-1-2-2-3-3-4-4-5-5

31 بالنسبة للسلسلة الإحصائية التالية أرسم مخطط بالعلبة .

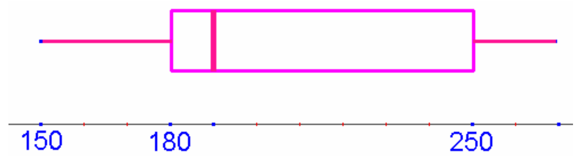
1) 7-9-3-9-8-6-3-1-2-8
2) 7-9-3-9-8-6-3-1-2-10
3) 1-2-3-4-5-6-6-6-6-6
4) 7-9-9-9-9-7-7-7-7-9
5) 16-12-19-11-14.

32 إليك مخطط التكرارات المتجمعة الصاعدة



باستعمال هذا المخطط أرسم المخطط بالعلبة للسلسلة الإحصائية

33 بالنسبة للمخطط بالعلبة التالي عين القيمة الصغرى، الربعيين Q_1 و Q_3 الوسيط و القيمة الكبرى للسلسلة الإحصائية .



34 إليك نتائج دراسة سلسلتين إحصائيتين A , B .
أرسم المخطط بالعلبة لكل منهما .

	القيمة الصغرى	Q_1	الوسيط	Q_3	القيمة الكبرى
A	6,2	7,5	8,2	9,7	12
B	4,3	7	9	12	14

35 في حصة أعمال تطبيقية ، يقوم تلاميذ قسم بالأفواج بتجربة كيميائية وذلك بمعايرة $25ml$ من الحامض .
الكمية المعايرة بالنسبة لكل تلميذ معطاة في الجدول التالي:

الحجم(ml)	22	23	24	25	26	27	28
الفوجA	1	4	3	8	1	2	1
الفوجB	2	2	1	6	4	3	2

1) احسب الوسط الحسابي لكل سلسلة .
2) ارسم المخطط بالعلبة لكل سلسلة.

36 نعتبر سلسلة نقاط (من 0 إلى 20) وسائطها معطاة في الجدول التالي :

القيمة الكبرى	Q_3	الوسيط	Q_1	القيمة الصغرى	الوسط الحسابي
16	12	10	8	2	10

1) نفرض أن الأستاذ أضاف نقطتين لكل تلميذ . عين وسائط السلسلة الإحصائية الجديدة .

2) في الحالة الثانية يحذف الأستاذ لكل تلميذ 10% من نقطته ، أوجد وسائط السلسلة الإحصائية .

37 الوسط الحسابي لسلسلة هو 5 و وسط المربعات هو 120

– أحسب الانحراف المعياري .

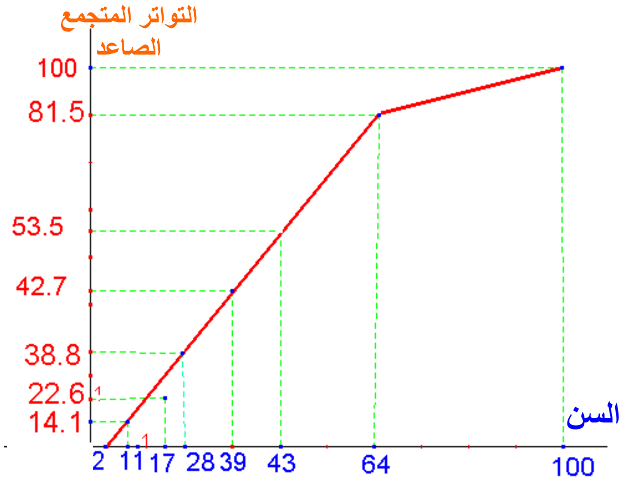
38 الانحراف المعياري لسلسلة هو 3، وسط المربعات هو 25

– أحسب الوسط الحسابي .

39 الانحراف المعياري لسلسلة هو 2، الوسط الحسابي هو 10ومجموع المربعات هو 2080

– أحسب التكرار.

41 الشكل التالي يعطي توزيع أفراد مجتمع حسب سنهم



1) أحسب العمر المتوسط لهذا المجتمع .

2) عين الوسيط الربعيين Q_1 و Q_3

42 الجدول التالي يمثل عدد الساعات الأسبوعية التي يبقى فرد أمام جهاز التلفاز حسب عمره .

عدد الساعات	14,6	15,9	23,3
العمر	سنة 2−11	سنة 12−17	أكثر من 18 سنة

1) احسب العدد المتوسط للساعات أمام جهاز التلفاز بالنسبة للأشخاص الذي عمرهم يتراوح بين 2 و 17 سنة

2) أحسب العدد المتوسط للساعات أسبوعيا التي يبقى فيها الفرد أمام جهاز التلفاز لكل المجتمع .

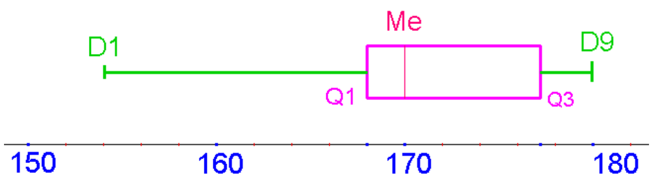
43 المخطط بالعلبة التالي يعطي قامة 30 تلميذ من قسم (بالسنتيمتر)

Q_1 يمثل الربعي الأول

Q_3 يمثل الربعي الثالث

D_1 يمثل العشري الأول

D_9 يمثل العشري التاسع



قسم آخر موزع حسب قامته في الجدول التالي:

القامة (cm)	147	150	151	152	155	160	161	165
التكرار	1	1	2	4	6	4	3	2

1) أرسم مخطط بالعلبة للسلسلة الثانية .

2) لكل من السلسلتين أحسب :

✓ القامة متوسطة

✓ قيمة الربعي الأول و الثالث

✓ الانحراف الربعي

3) ما هو عدد القيم خارج المجال

$\left[Q_1-\frac{3}{2}(Q_3-Q_1)\ ;Q_3+\frac{3}{2}(Q_3-Q_1)\right]$؟

44 يحتوي كيس على عدد كبير من الكرات البيضاء والحمراء

نريد تعين نسبة الكرات البيضاء الموجودة في الكيس.

نأخذ 50 كرة و نسحب كرة ;

نضع 0 إذا سحبنا كرة حمراء و 1 إذا سحبنا كرة بيضاء

نرمز بـ m_1 للوسط الحسابي للسلسلة و للتباين بـ s_1

1) أحسب m_1 و S_1

2) نعيد الكرات الحمسين الى الكيس ونقوم بالتجربة السابقة

التجربة	1	2	3	4	5
عدد الكرات البيضاء المسحوبة	16	20	18	16	25

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	22	21	21	22	17	11	21	21	15

3) أحسب m_i و s_i الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتجربة i .

4) أحسب M الوسط الحسابي للسلسلة m_i و S الوسط الحسابي للسلسلة S_i .

5) نجمع التجارب الخمسة عشر السابقة ، عين عدد الكرات المسحوبة

✓ استنتج M' العدد المتوسط للكرات البيضاء في كل التجارب .

✓ استنتج S' الانحراف المعياري المناسب للتجارب كلها

6) قارن بين M و M' ثم بين S و S' علل.

45 سجلت مصالح البريد وقت المكالمات الهاتفية (بالثواني) لمشترك في مدة أسبوع ، النتائج كانت كالآتي :

−181−210−6−57−3−93−134−67−224−37−68
−258−28−7−39−101−20−78−28−69−96−77
−111−12−118−88−87−12−89−45−32−9−1−123
−86−42−98−7−32−47−76−107−27−75−47−8
58−27−61−94

1) احسب الوسط الحسابي، تباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة.

2) أملئ الجدول التالي :

الوقت	التكرار
$[0,20[$	
$[20,40[$	
$[40,60[$	
$[60,80[$	
$[80,100[$	
$[100,120[$	
$[120,160[$	
$[160,200[$	
$[200,260[$	

3) احسب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة بعد جمع النتائج في الجدول

4) أملئ الجدول التالي :

الوقت	التكرار
$[0,30[$	
$[30,60[$	
$[60,90[$	
$[90,120[$	
$[120,240[$	

5) أحسب الوسط الحسابي ، التباين والانحراف المعياري للسلسلة باستعمال النتائج الجدول الثاني.

6) لماذا نحصل على نتائج مختلفة ولكن استعملنا نفس السلسلة الإحصائية؟

46 باستعمال المجدول الأيكسال (Excel) نعتبر توزيع أوزان وطول مجموعة مراهقين .

x_i (Kg)الوزن	52	57	58	59	60	61	62	64	65	66
تكرار	1	2	1	1	7	5	3	7	3	5

القامة (Cm)	1,57	1,6	1,62	1,65	1,66	1,67	1,7	1,72
تكرار	3	2	6	4	4	7	5	4

لمقارنة التوزيع حسب الوزن و حسب القامة بتدبدب السلسلة حيث نقوم بالتغير الخطي التالي

نضع $x_i' = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S_x}$

حيث : $\overline{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة

S_x الانحراف المعياري

بواسطة المجدول الأيكسال(Excel) اتبع المراحل التالية

1) في الخلية A_2 و A_{36} ندخل الوزن . نحسب في الخلية A_{38} الوسط الحسابي في الخلية A_{40} الانحراف المعياري.

	A	B
1	x_i	$\dfrac{(x_i - x)}{S}$
2	52	$=(A_2 - A\$38)/A\$40$
3	57	
4	57	
5	58	

	A	B
37		
38	=Moyenne (A_2:A_{36})	
39		
40	=Eartype (A_2:A_{36})	

أنقل دستور الخلية B_2 نحو الأسفل في العمود B سلسلة القيم المدبدبة للأوزان.

2) في أي خلايا يمكن قراءة القيمة الصغرى ، الربعيين Q_1 و Q_2 القيمة الكبرى للسلسلة المدبدبة.

3) استعمل الخانات D و E للقيام بنفس العمل بالنسبة للقامة.

4) قارن بين السلسلتين المدبدبتين ثم أرسم مخطط بالعلبة.

47

شارك 5000 مترشح في الامتحان للحصول على وضيفة في الإدارة ، الجدول التالي يعطي توزيع المعدلات المتر شح:

عدد المترشحين	المعدل
198	$[0,2[$
943	$[2,4[$
1697	$[4,6[$
554	$[6,8[$
156	$[8,9[$
391	$[9,10[$
268	$[10,11[$
234	$[11,12[$
367	$[12,14[$
121	$[14,16[$
54	$[16,18[$
17	$[18,20[$

1) مثل بيانيا هده السلسلة بمدرج.

2) احسب الوسط الحسابي m و الانحراف المعياري S.

3) احسب العشري السابع.

4) علما أنه يوجد 1500 مكان شاغر ، فما هو معدل آخر مترشح ناجح.

48 نعتبر السلسلة الإحصائية :

x_i	$[0,8[$	$[8,12[$	$[12,20[$	$[20,30[$
n_i	7	16	10	17

1) احسب التكرار المتجمع الصاعد.

2) أرسم منحنى C التكرارات المتجمعة الصاعدة.

3) لتكن f الدالة الممثلة بالمنحنى C عين عبارة $f(x)$ بدلالة x.

4) ليكن $u \in [0,1]$ الدالة الربعية $Q(u)$ معرفة من القيمة x حيث $f(x)=u$ ، عين عبارة $Q(u)$ بدلالة u.

5) أرسم منحنى الدالة Q .

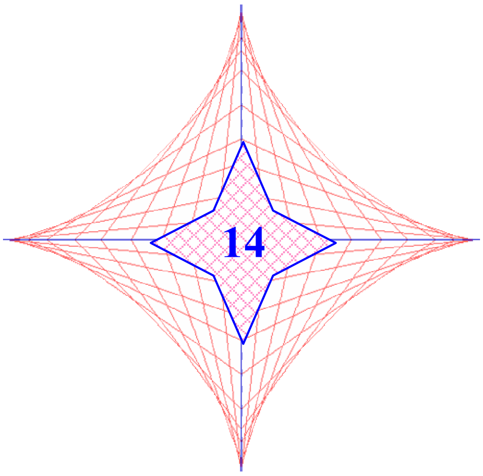
6) باستعمال Q ، عين الربعي الأول Q_1 و الثالث Q_3 و العشريين الأول D_1 و التاسع D_9 .

49 نعتبر السلسلة الإحصائية :

x_i	1	2	4	5	6	9	14
n_i	5	7	8	2	7	12	9

1) احسب التكرار المتجمع الصاعد.

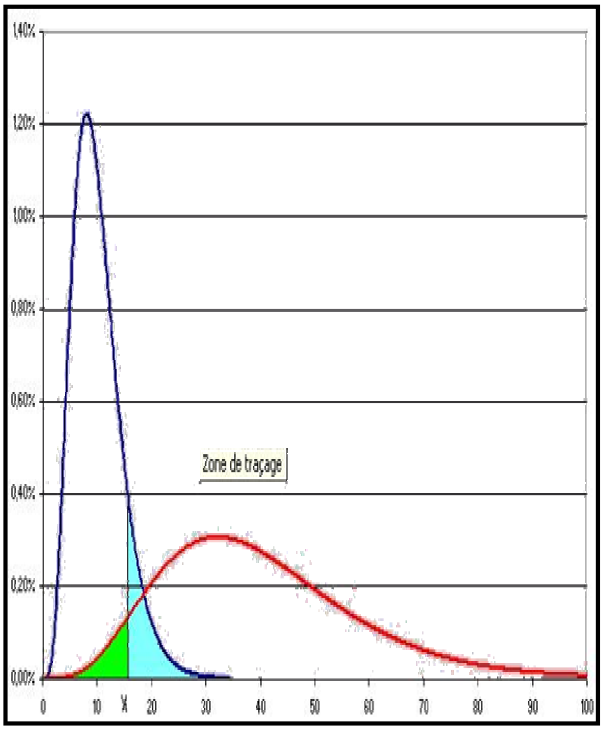
2) أرسم منحنى C التكرارات المتجمعة الصاعدة.



الاحتمالات

الكفاءات المستهدفة

- وصف تجربة عشوائية بسيطة عدد النتائج الممكنة فيها منته.
- نمذجة بعض الوضعيات البسيطة.
- حساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري و التباين لقانون احتمال.
- محاكاة تجارب عشوائية بسيطة.
- حساب احتمال حادثة بسيطة و حادثة مركبة.
- استعمال خواص الاحتمال في حساب احتمالات بعض الحوادث المركبة.
- تعيين قانون الاحتمال لمتغير عشوائي.
- حساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري و التباين لمتغير عشوائي.



ولد كلموقوروف (Andrei Kolmogorov) سنة 1903م بمدينة طمبوف (Tombov) و توفي بمدينة موسكو سنة 1987. التحق سنة 1920 بجامعة موسكو و قد لقي باعتراف دولي أول سنة 1922 حين توصل إلى نتيجة هامة حول السلاسل المثلثية. بعد اهتمامه بالمنطق بدأ سنة 1925 العمل في ميدان الاحتمالات بحيث تحصل على شهادة الدكتوراه سنة 1931.

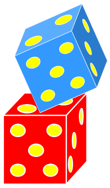
لقد سافر كثيرا عبر أوربا و في سنة 1933 أصدر أعماله التي تضمنت أسس الحساب الاحتمالي و التي اعتبر بسببها إقليدس القرن العشرين.

كولموقوروف 1903 / 1987

تهدف الأنشطة التالية إلى التمهيد لنظرية الاحتمالات التي يصادفها التلميذ لأول مرة .

نشاط أول

نعتبر التجربة التالية : نرمي P مرة زهرة نرد مكعبة غير مزيفة ذات ستة أوجه ، مرقمة من 1 الى 6 و نهتم بثلاثة وسائط .



- التواتر f_n لظهور الرقم 6 على الوجه العلوي من أجل n رمية الأولى
- الوسط الحسابي m_n لـــ n رقما الأولى التي تظهر على الوجه العلوي
- التباين لهذه الأرقام (n الأولى ظهورا) $(n \leq p)$

المرحلة الأولى : – القيام بالتجربة جماعيا

❶ كل تلميذ يرمي زهرة النرد 30 مرة و يسجل في كل مرة الرقم الظاهر على الوجه العلوي .

❷ يحسب التلميذ الوسط الحسابي للأرقام .

❸ توضع كل النتائج (لكل تلاميذ القسم) في جدول واحد مشترك حسب النموذج التالي (n تأخذ القيم 30 ثم 60 و هكذا ..... حتى التلميذ الأخير)

....	90	60	30	N
				عدد مرات ظهور الرقم 6
				f_n تواتر الرقم 6
				m_n الوسط الحسابي للأرقام

ملاحظة : لحساب m_{60} يمكن استعمال معدلي التلميذين الأولين ......

❹ نمثل بيانيا النقط (n , f_n) ، ماذا تلاحظ ؟ ❺ نفس السؤال بالنسبة للنقط (n , m_n)

يشير المنحنى في السؤال ❹ إلى أن المتتالية (f_n) تؤول إلى عدد قريب من 0,17 (توازن زهرة النرد يؤكد أن للرقم 6 حظا من بين ستة حظوظ للظهور) نقول عندئذ أن احتمال ظهور الرقم 6 يساوي $\frac{1}{6}$ $\left(\frac{1}{6} \simeq 0{,}17\right)$

المرحلة الثانية : استعمال مجدول Excel

① أدخل أرقام الرميات من A1 إلى A2500 ② باستعمال الطلبية **= ENT(ALEA( )*6+1)** في الخلية B1 ثم استعمال الزالق إلى B2500 نحاكي التجربة السابقة (2500 رمية لزهرة النرد)

③ نحسب f_n تواتر الرقم 6 (في الخانة C1) باستعمال الطلبية **= NB.SI($B$1:B1;6)/A1** ثم النسخ الى C2500

④ نمثل بيانيا النقط (n , f_n) [سحابة نقط] ، ماذا تلاحظ ؟

⑤ في الخانة D1 نحسب الوسط الحسابي m_n باستعمال الطلبية **= MOYENNE($B$1:B1)** ثم النسخ الى D2500

⑥ مثل بيانيا النقط (n , m_n) . ماذا تلاحظ ؟

⑦ نفس السؤال بالنسبة للتباينات في العمود E باستعمال الطلبية **= VAR.P($B$1:B1)** ثم النسخ الى E2500

⑧ باستعمال اللمسة F9 كرر المحاكاة و لاحظ

نشاط ثان

عند رمي زهرة نرد مكعبة غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6
فإن مجموعة المخارج هي $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
– يمكن ملأ الجدول التالي كما يلي:

المخارج x_i	1	2	3	4	5	6
الاحتمال $P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

و نقول عندئذ أننا عرفنا قانون الاحتمال (كل رقم له حظ واحد من بين ستة للظهور)

نسمي حادثة A كل جزء من E .
وعندئذ نعرف احتمال الحادثة A كمجموع احتمالات كل المخارج التي تنتمي إلى A و نرمز له بالرمز P(A)

مثلا : احتمال الحادثة D : "**الحصول على رقم مضاعف لـــ 3** " هو $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ لأن $D = \{3, 6\}$

❶ أحسب احتمالات الحوادث التالية (باعتبار الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي لزهرة النرد)
A : "**الرقم زوجي**" $\bar{A}$: "**الرقم فردي**" B : "**الرقم أكبر من أو يساوي 4**" $\bar{B}$: "**الرقم ليس أكبر من 4**" C : "**الرقم يقسم 30** "

❷ صندوق يحوي 4 كريات خضراء مرقمة من 1 إلى 4 و 3 كريات حمراء مرقمة من 1 إلى 3 . (لا نفرق بينها باللمس) . نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق.
1– عرف قانون الاحتمال .
2– ما احتمال الحادثتين **A** : "الكرية المسحوبة حمراء " **B** : "الكرية المسحوبة تحمل الرقم 3 "

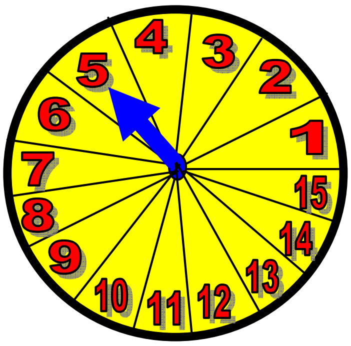
نشاط ثالث

قواعد اللعبة : يدفع اللاعب 20 دينارا و يختار رقما N (من 1 إلى 15) ثم يدار القرص حتى يستقر السهم على رقم ما .
- إذا استقر السهم على الرقم المختار يحصل اللاعب على مائتي دينار
- إذا استقر السهم على رقم مجاور للرقم المختار يحصل اللاعب على ثلاثين دينارا مواساة له
- في الحالات الأخرى لا يحصل اللاعب على أي شيء .(أي يخسر العشرين دينارا التي دفعها)

نرمز للربح المحتمل بالرمز G .

– وضّح أن المخارج الممكنة هي عناصر المجموعة $E = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 15\}$ و عرّف قانون الاحتمال
2– اشرح لماذا تكون قيم G الممكنة هي : **20 - , 10 + , 180 +** (الربح يساوي(20–) أي خسارة 20 ديناراً)
3– نعتبر الحوادث التالية : * " يكون الربح 20 – " نكتب ($G = -20$)
* " يكون الربح 10 " نكتب ($G = 10$)
* " يكون الربح 180 " نكتب ($G = 180$)

➢ أحسب احتمال أن يكون الربح (20 -) أي $P(G = -20)$



4– أكمل الجدول التالي

الربح G	- 20	10	180
الإحتمال	$P_1 =$	$P_2 =$	$P_3 =$

– ما هو احتمال الحادثة ($G \geq 0$) ؟
5– أحسب العدد $E = -20P_1 + 10P_2 + 180P_3$. ماذا يمثل العدد E ؟

1- مصطلحات

- نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

* في تجربة عشوائية ، **مجموعة النتائج الممكنة** تسمى **مجموعة الإمكانيات** و يرمز لها بالرمز Ω .

ليكن **A جزءاً من** Ω ، نقول عندئذ أن A **حادثة** .

- إذا احتوت المجموعة الجزئية A على **عنصر وحيد** فإنها تدعى **حادثة أولية** .
- Ω هي الحادثة الأكيدة و $\varnothing$ هي الحادثة المستحيلة . ($\varnothing$ الجزء الخالي)
- إذا كانت A حادثة ما فإن حادثتها العكسية يرمز لها بـــ $\bar{A}$ و هي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A
- لتكن A و B حادثتين . نرمز بـــ $A \cap B$ للحادثة "A و B " و هي التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B

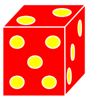
* إذا كانت $A \cap B$ خالية أي $A \cap B = \varnothing$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلائمتين .

- نرمز بـــ $A \cup B$ للحادثة "A أو B " و هي التي تحوي عناصر A و عناصر B أيضا .

مثال : نعتبر التجربة العشوائية التالية

نرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 . المجموعة الشاملة هي : $\Omega=\{ 1,2,3,4,5,6 \}$

- الحادثة A: " الحصول على رقم زوجي ". أي $A=\{ 2,4,6 \}$
- الحادثة B: " الحصول على رقم أكبر أو يساوي 3 ". أي $B=\{ 3,4,5,6 \}$
- الحادثتان A و B هما مجموعتان جزئيتان من Ω .
- الحادثة C: " الحصول على الرقم 6 ". حادثة أولية لأن $C=\{ 6 \}$
- الحادثة $A \cap B$ هي الحادثة: " الحصول على رقم زوجي أكبر أو يساوي 3 ". أي $A \cap B =\{ 4,6 \}$
- الحادثة $A \cup B$ هي الحادثة: " الحصول على رقم زوجي أو أكبر أو يساوي 3 ". أي $A \cup B =\{ 2,3,4,5,6 \}$



2- قانون الاحتمال

تعريف: **قانون احتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل مخرج e_i بعدد موجب p_i مع $i \in \{ 1,2,3,\dots,n \}$**
بحيث يتحقق ما يلي $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$

- **نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال P على Ω**

يسمى العدد p_i احتمال تحقق المخرج e_i

ملاحظة1: بما أن كل عدد p_i موجب فهو أصغر من المجموع 1 و منه $0 \le p_i \le 1$ من أجل كل i طبيعي من 1 الى n
ملاحظة2: إحتمال الحادثة A يرمز له بـــ P(A) و يساوي مجموع إحتمالات الحوادث الأولية للحادثة A .

مثال : نرمي زهرة النرد (المثال السابق)

مجموعة المخارج هي $\Omega=\{ 1,2,3,4,5,6 \}$ بما أن زهرة النرد غير مزيفة (أي أن كل الوجوه لها نفس احتمال الظهور)

فهذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي i من 1 الى n فإن $p_i = \frac{1}{6}$

و احتمال الحادثتين A و B هما $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ على الترتيب .

تمرين محلول 1

يحوي كيس 15 كرية مرقمة من 1 إلى 15 . نسحب عشوائيا كرية واحدة و نسجل رقمها .

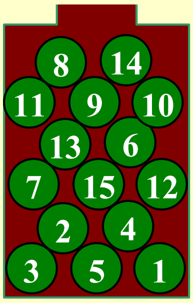
1- عين المجموعة الشاملة Ω .

2- عين الحادثة A : " الحصول على رقم مضاعف للعدد 5 ".

3- عين الحادثة B : " الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 ".

4- عين الحوادث $A\cap B$ و $\overline{A}$ و $\overline{B}$ ثم استنتج الحادثتين $\overline{A}\cap\overline{B}$ و $\overline{A\cap B}$

حيث $\overline{A}$ و $\overline{B}$ و $\overline{A\cap B}$ هي الحوادث العكسية للحوادث A و B و $A\cap B$ على الترتيب



حــــل:

1- Ω هي مجموعة كل النتائج الممكنة أي $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

2- مضاعفات العدد 5 المحصورة بين 1 و 15 هي التي تشكل A أي $A=\{5,10,15\}$

3- مضاعفات العدد 3 المحصورة بين 1 و 15 هي التي تشكل B أي $B=\{3,6,9,12,15\}$

4- $A\cap B=\{15\}$ ، $\overline{A}=\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14\}$ ، $\overline{B}=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14\}$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ ، $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\}$

تمرين محلول 2

زهرة نرد مزيفة ذات أربعة أوجه مرقمة من 1 الى 4 .

نرمز بالرمز p_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i مع $i\in\{1,2,3,4\}$. نعلم أن $p_2=\frac{1}{5}$ و أن الحدو p_1,p_2,p_3,p_4

تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب

-1- أحسب p_1 ، p_3 و p_4 — 2 – أحسب احتمال ظهور رقم فردي

حــــل:

1- ليكن r أساس المتتالية

لدينا $p_2=p_1+r$ ، $p_3=p_2+r$ ، $p_4=p_2+2r$

لكن $p_1+p_2+p_3+p_4=1$ و منه $p_2-r+p_2+p_2+r+p_2+2r=1$

أي أن $4p_2+2r=1$ و بالتالي $r=\frac{1-4p_2}{2}=\frac{1}{10}$

$p_1=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$ و $p_3=p_2+r=\frac{3}{10}$ و $p_4=p_2+2r=\frac{4}{10}$

2- ليكن A الحادثة :" ظهور عدد فردي ".

نعلم أن $p(A)=p_1+p_3$ إذن $p(A)=\frac{2}{5}$

تساوي الإحتمال :

تعريف : **نقول عن تجربة أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع .**

تنبيه يشار إلى تساوي الاحتمال من خلال عبارات تتضمنها نصوص وصف التجربة مثل أن يقال " زهرة نرد غير مزيفة " ، " قطعة نقود متوازنة " ، " كريات لا نفرق بينها عند اللمس " .....

و هذا يعني أن احتمال ظهور أي وجه عند رمي زهرة نرد غير مزيفة هو $\frac{1}{6}$ (كل وجه له نفس الحظ للظهور)

أما عند رمي قطعة نقود متوازنة فإن احتمال ظهور " وجه " هو $\frac{1}{2}$ و احتمال ظهور " ظهر " هو $\frac{1}{2}$ أيضا

و هكذا بالنسبة للكريات ، فلو فرضنا أن الصندوق يحوي n كرية فإن احتمال ظهور أية كرية هو $\frac{1}{n}$

ملاحظة : تساوي الإحتمال يتعلق كذلك بالمجموعة الشاملة (يعني بالسؤال المطروح)

مثال : يحوي كيس 5 كريات (3 بيضاء و سوداوين) [لا نفرق بينها باللمس]
نسحب كرية عشوائيا و نسجل لونها [B أبيض ، N أسود]
* إذا أخذنا المجموعة الشاملة $\Omega = \{ B,N \}$ فإن المخرجين B و N ليس لهما نفس الاحتمال لأن $p(B)=\frac{3}{5}$ بينما $p(A')=\frac{2}{5}$. لكن لو اعتبرنا المجموعة الشاملة $\Omega=\{B_1,B_2,B_3,N_1,N_2\}$
و ذلك بترقيم الكريات تصبح المخارج متساوية الاحتمال .

2- نتيجة :

في حالة تساوي الاحتمال

كل مخرج $\{ e_i \}$ له احتمال p_i حيث $p_i=\frac{1}{n}$

إذا كانت الحادثة A تحوي m عنصرا يكون احتمالها $P(A)$ حيث $P(A)=m\times\frac{1}{n}$

أي أن

$$\mathbf{P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}}$$

ملاحظة : بما أن $p_1+p_2+p_3+.....+p_n=1$ فإن $\mathbf{p(\Omega)=1}$ و نضع $\mathbf{p(\varnothing)=0}$

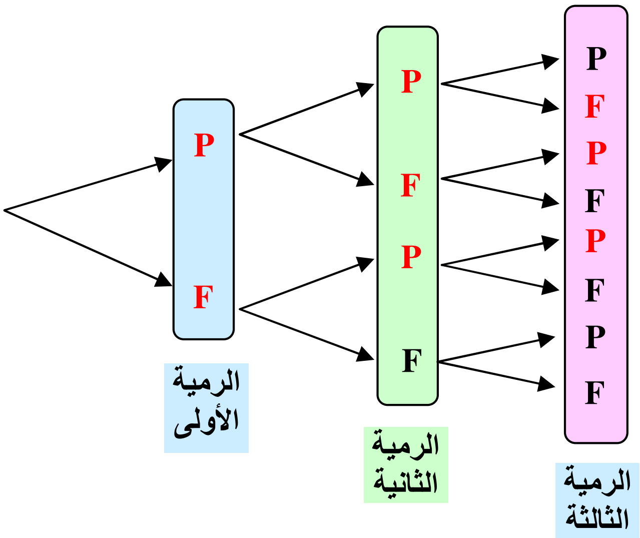
تمرين محلول 3

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية

نعتبر الحادثة A :" الحصول على ظهرين و وجه ." (في أي ترتيب كان) نرمز للظهر بالرمز P و للوجه بالرمز F

1- أنشئ مخططا يوضح كل الحالات .

2- استنتج احتمال الحادثة A .



حـــل:

1- - هناك **8** إمكانيات منها**3** إمكانيات ملائمة للحادثة **A**

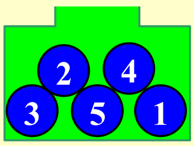
و هي **PPF – PFP – FPP**

2- بما أن التجربة متساوية الاحتمال فإن احتمال الحادثة A

هو : $\dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$ أي $P(A)=\dfrac{3}{8}$

تمرين محلول 4

يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع [أي بعد كل سحبة نرجع الكرية المسحوبة إلى الكيس] . نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة (نحصل على قائمة من 3 أرقام ليست بالضرورة مختلفة مأخوذة من بين 1,2,3,4,5) .



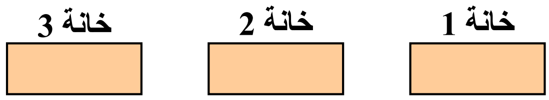
1- ماهو عدد القوائم الممكنة ؟ (أي عدد الحالات الممكنة)

2- نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة ، ما هو عدد الحالات الممكنة (القوائم) ؟

(ملاحظة : في هذه المرّة تكون القوائم ذات 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى)

- ماهو إحتمال الحادثة A :" الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 ".

حـــل:



1- لتعداد المخارج الممكنة نستعمل ملأ الخانات

(3 خانات مرقمة 1 ، 2 ، 3 نملأها بالرقم المسحوب)

هناك 5 إمكانيات بالنسبة للخانة 1 من اجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات للخانة 2(اى أن هناك 25 إمكانية للخانتين 1 و2) ومن اجل كل إمكانية من بين 25 هناك 5 إمكانيات للخانة3.

و بالتالي هناك **$5\times5\times5$** مخرجا ممكنا

2- * بينما في الحالة الثانية هناك **$5\times4\times3$** مخرج ممكن

(الكرية المسحوبة لا ترجع أي أن رقم الخانة 1 لا يمكن أن يتكرر في الخانتين 2 ، 3) و هكذا...

* المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 في الخانة 2 فيبقى إذن 4 إمكانيات للخانة 1 و لكل إمكانية 3 إمكانيات للخانة 3 .

أي عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو **4×3** و منه $P(A)=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

1- خواص الإحتمالات :

لتكن Ω المجموعة الشاملة (النتائج الممكنة) لتجربة عشوائية ،. نزوّد Ω بالاحتمال P .

1- من أجل كل حادثة A فإن $0 \le P(A) \le 1$

2- $P(\Omega)=1$ و $P(\varnothing)=0$

3- إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

4- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين ($A\cap B=\varnothing$) فإن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

5- $P(\bar{A})=1-P(A)$ حيث $\bar{A}$ الحاثة العكسية للحادثة A

6- إذا كانت الحادثة A جزء من الحادثة B ($A\subset B$) فإن $P(A)\le P(B)$

مثال : عند رمي زهرة نرد مكعبة غير مزيفة أوجهها مرقمة من *1* إلى *6* .

نعتبر الحوادث **A:" الحصول على رقم زوجي ."** ، **B:" الحصول على رقم مضاعف لـ 3 ."**

$A=\{2,4,6\}$ ، $B=\{3,6\}$ ، $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ ، $A\cap B=\{6\}$

$$P(A\cup B)=\frac{2}{3}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$$

$\bar{A}$:" الحصول على رقم فردي ". $P(\bar{A})=\frac{1}{2}=1-P(A)$ $\bar{A}=\{1,3,5\}$

تعاريف

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعدادا حقيقية) $\Omega=\{e_1,e_2,e_3,.....,e_n\}$

ليكن P احتمالا على Ω ، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $p_i=P(e_i)$

- أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث $E=\sum_{i=1}^{n}e_ip_i$
- تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث $V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2p_i$
- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد $\sigma=\sqrt{V}$

يمكن كتابة التباين V على الشكل $V=\sum_{i=1}^{n}e_i^2p_i-E^2$

ملاحظة : الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أنّ قيم الطبع هي عناصر Ω و التواترات النظرية هي القيم p_i

تمرين محلول 5

نفرض أن 100.000 كرية مرقمة من 1 إلى 100.000 موضوعة داخل صندوق .
نسحب كرية عشوائيا و نسجل رقمها x . (الكريات لا يمكن التفريق بينها باللمس)
– ما هو احتمال الحادثتين التاليتين ؟
A : " x ليس مضاعفا للعدد 3 ." B : " x ليس مضاعفا للعدد 3 أو ليس مضاعفا للعدد 5 "

حـــل:

1– نختار كمجموعة شاملة مجموعة 100.000 كرية . المخارج متساوية الاحتمال فرضا (في النص السحب عشوائي مع عدم التمييز بين الكريات باللمس) إذن كل الكريات لها نفس الحظ للظهور .
لحساب P(A) ينبغي تعداد كل الأعداد التي ليست مضاعفا للعدد 3 من بين 100.000 كرية
ولهذا من الأفضل حساب $P(\bar{A})$ مع $\bar{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A أي أن $\bar{A}$: " x مضاعف للعدد 3 ."

* أول مضاعف مطلوب هو **3** و آخر مضاعف هو **99999** و منه عدد مضاعفات 3 هو $\frac{99999}{3} = 33333$

و منه $P(\bar{A}) = \frac{33333}{100000}$ و بالتالي $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

2– $\bar{B}$ هي الحادثة : " x مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 5 ." أي " x مضاعف للعدد 15 ."
(نقبل أن كل مضاعف مشترك لعددين أوليين فيما بينهما a و b هو مضاعف لجداءهما ab)

* عدد مضاعفات 15 هو $\frac{99990}{15} = 6666$ و بالتالي $P(B) = 1 - \frac{6666}{100000}$ أي $P(B) = 1 - \frac{3333}{50000}$

تمرين محلول 8

نعتبر $\Omega = \{-1, 0, 2, 5, 6, 10\}$
و نعرف قانون الاحتمال على Ω كما في الجدول

e_i	-1	0	2	5	6	10
p_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	a

1– عين العدد الحقيقي a
2– أحسب الأمل لهذا القانون
3– أحسب التباين ثم الانحراف المعياري لهذا القانون

حـــل:

1– حسب التعريف $\frac{4}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + a = 1$ ومنه $a = \frac{1}{5}$

2– $E = (-1)\times\frac{4}{15} + 0\times\frac{1}{15} + 2\times\frac{1}{15} + 5\times\frac{2}{15} + 6\times\frac{4}{15} + 10\times\frac{1}{5}$

$E = \frac{62}{15} \simeq 4,13$

3– $V = (-1)^2\times\frac{4}{15} + 0^2\times\frac{1}{15} + 2^2\times\frac{1}{15} + 5^2\times\frac{2}{15} + 6^2\times\frac{4}{15} + 10^2\times\frac{1}{5} - E^2$

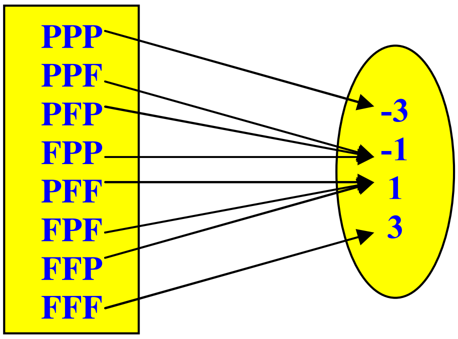
$V = \frac{3686}{225}$, $\sigma = \sqrt{V} ; 4,05$

المتغير العشوائي :

مثال : نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة و نسجل النتيجة " وجه = F " ، " ظهر = P "

مجموعة المخارج هي $E = \{ PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF \}$

نعتبر اللعبة التالية : يربح اللاعب دينارا واحدا كلما ظهر (وجه F) و يخسر دينارا واحدا كلما ظهر (ظهر P)



نعتبر الدالة X التي ترفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسب لها

يسمى X المتغير العشوائي المعرف على E

تعريف1: **Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية . نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة عددية معرفة على Ω**

قانون الإحتمال لمتغير عشوائي :

في المثال السابق نبحث عن احتمال الحادثة ": **يكون الربح دينارا واحدا** ". مثلا ، **نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة (X=1)**

تتحقق هذه الحادثة لما تتحقق الحادثة A حيث $A = \{ PFF,FFP,FPF \}$ لكن $P(A) = \frac{3}{8}$

نكتب عندئذ $P(X = 1) = \frac{3}{8}$

الجدول التالي يمثل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

الربح x	-3	-1	1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عموما :

X متغير عشوائي معرف على Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية

لتكن I مجموعة قيم X أي $I = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

و ليكن p_i احتمال الحادثة ": X يأخذ القيمة x_i ." أي $(X = x_i)$. نبرهن أن $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

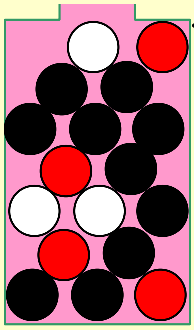
تعريف2: **قانون إحتمال لمتغير عشوائي X هو الدالة المعرفة على I (مجموعة قيم X) و التي ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $p(X=x_i)$**

تعريف3:

- **الأمل الرياضياتي للمتغير X هو العدد E(X) حيث** $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- **التباين للمتغير X هو العدد** $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$
- **الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

و يمكن كتابة $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - (E(X))^2$ **حيث** $p_i = p(X = x_i)$

تمرين محلول 9



يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء ، 4 كريات حمراء و 10 كريات سوداء لا نميز بينها باللمس .
تُسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح الساحب دينارا واحدا إذا كانت الكرية سوداء ،
يربح ثلاثة دنانير إذا كانت حمراء و عشرة دنانير إذا كانت الكرية بيضاء .
نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة

1- عين القيم الممكنة للمتغير X
2- عرّف قانون الاحتمال للمتغير X
3- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير X
4- أحسب الانحراف المعياري للمتغير X

حـــل:

1- قيم X الممكنة هي : **1 ، 3 ، 10**

2- الحادثة "**X=1**" هي " سحب كرية سوداء " عدد الكريات السوداء 10 و عدد كل الكريات 17

ومنه $P(X=1)=\dfrac{10}{17}$ (حالة تساوي احتمال)

بنفس الطريقة نجد : $P(X=3)=\dfrac{4}{17}$ و $P(X=10)=\dfrac{3}{17}$

تجمع النتائج في الجدول التالي :

X_i	1	3	10
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

3- $E(X)=\dfrac{10}{17}+3\times\dfrac{4}{17}+10\times\dfrac{3}{17}=\dfrac{52}{17}\simeq 3,06$ و يمثل هذا العدد متوسط الربح في اللعبة

4- $V(X)=1^2\times\dfrac{10}{17}+3^2\times\dfrac{4}{17}+10^2\times\dfrac{3}{17}-\left(\dfrac{52}{17}\right)^2=\dfrac{3178}{289}$

و بالتالي : $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3178}}{17}\simeq 3,32$

تمرين محلول 10

نقترح اللعبة التالية : يدفع اللاعب M دينارا ثم يرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات 12 وجها مرقمة من 1 الى 12
إذا ظهر رقم زوجي يحصل اللاعب على دينارين اثنين ، إذا ظهر أحد الأرقام 7 ، 9 ، 11 يحصل اللاعب على ثمانية
دنانير أما إذا ظهر أحد الأرقام 1 ، 3 ، 5 فإنه يحصل على ثلاثة دنانير .

1- عين قيمة M حتى تكون اللعبة عادلة (الأمل الرياضياتي معدوم)
2- إذا كان $M=4$ ، هل المشاركة في هذه اللعبة هي لصالح اللاعب ؟

حـــل:

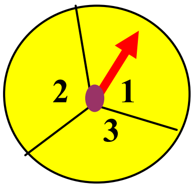
1- القيم الممكنة هي : 2-M ، 3-M ، 8-M باعتبار X هو الربح المحتمل

X_i	2-M	3-M	8-M
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=0$ يعني $M=\dfrac{15}{4}\approx 3,75$

إذا كان الدفع للمشاركة يقدر بـ 4 دنانير فليس
من مصلحة اللاعب المشاركة

بائعة البيض



تريد بائعة بيض توزيع n بيضة

(n عدد طبيعي غير معدوم)

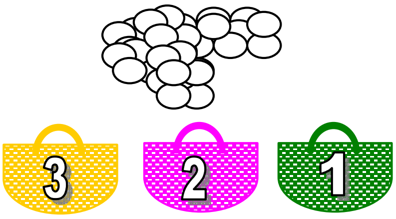
على ثلاث سلات C_1 ، C_2 و C_3 بالطريقة التالية :

تدير قرصا موزعا الى ثلاث قطاعات متساوية المساحة

مرقمة من 1 الى 3 و حيث استقر السهم

فإنها تضع البيضة في السلة التي تحمل الرقم المناسب

(أي الذي استقر عليه السهم) .



[تُدير القرص من أجل كل بيضة ثم تضعها في السلة المناسبة]

نقبل في هذا التمرين أن : من أجل كل حادثتين A و B فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

نرمز بالرمز V_k للحادثة :" في نهاية توزيع كل البيض تبقى السلة C_k فارغة ." مع $k\in\{1,2,3\}$

1- بين أن $P(V_1)=P(V_2)=P(V_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ حيث $P(V_k)$ يرمز لاحتمال الحادثة V_k

2- ماهي الحادثة $V_1\cap V_2$ ؟ أحسب إحتمالها

3- ماهي الحاثة $V_1\cap V_2\cap V_3$ ؟ أحسب احتمالها .

4- نقبل أن :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

أحسب $P(V_1\cup V_2\cup V_3)$

5- نعتبر الحادثة M :" كل سلة تحوي بيضة على الأقل ".

- ماهي الحادثة $\overline{M}$ الحادثة العكسية للحادثة M ؟

- استنتج أن : $P(M)=1-3\,\frac{2^n-1}{3^n}$. ما هي نهاية $P(M)$ لما يؤول n الى إلى ما لا نهاية ؟

- عين العدد n حتى يكون $P(M)$ أكبر تماما من 0,99

(يمكن استعمال مجدول أو الحاسبة +Ti83 لتعيين حدود المتتالية)

الموعد

إتفقا شخصان **A** و **B** أن يلتقيا في مكان ما بين الساعة
الثامنة مساء (20^H) و الساعة التاسعة مساء (21^H) .
كل شخص يختار عشوائيا وقت مجيئه خلال هذه الساعة المحددة
و لا ينتظر الآخر أكثر من ربع ساعة.

في هذه المسألة نريد حساب الإحتمال P كي يلتقيا

نقسم الساعة إلى **4n** مجالا زمنيا و نحاكي وقتي مجيئي **A** و **B** بسحبتين متتاليتين و بالإرجاع من صندوق يحوي كريات مرقمة كما يلي :

1 2 3 .... 4n

هناك إذن $(4n)^2$ مخرجا

إذا كان a و b رقمين مسحوبين ، نعتبر الحادثتين

$F: “\,|a-b| \leq n-1\,”$ و $G: “\,|a-b| \leq n\,”$

و ليكن $x_n = P(F)$ و $y_n = P(G)$ إحتمالي وقوعهما

1- اشرح لماذا تحقق الحادثة **F** يستلزم لقاء **A** و **B**. استنتج أن $x_n \leq p$

2- اشرح لماذا لقاء **A** و **B** يستلزم تحقق الحادثة **G** . استنتج أن : $p \leq y_n$

(نقول أن x_n هو إحتمال التشاؤم و y_n هو احتمال التفاؤل)

3- بين أن عدد المخارج الملائمة للحادثة **F** يساوي على التوالي $n\,;n+1\,;.....;2n-2$ عندما يساوي **a** على الترتيب $1\,;2\,;.....;n-1$.

– أحسب هذا العدد عندما يكون $n \leq a \leq 3n+1$ ثم عندما يكون **a** مساويا على التوالي $3n+2\,;3n+3\,;.....;4n$.

4- استنتج أن : $x_n = \dfrac{15n-7}{16n}$

5- بنفس الطريقة أحسب y_n بدلالة **n**

6- إعط قيمة مدورة الى 10^{-2} للعدد **p** ثم قارن مع محاكاة التجربة .

مسائل محلولة

مسألة محلولة 1 :

يحتوي صندوق على 90 كرية حيث :

- ألوان الكريات هي : الأحمر ، الأسود و الأبيض .
- 30 كرية على الأقل حمراء .
- عدد الكريات الحمراء و السوداء معا هو 60 على الأقل

يشارك شخص في لعبتين و قبل البدء في أية لعبة يُخيّر بين قاعدتين :

اللعبة الأولى

يسحب اللاعب كرية واحدة و حسب لونها و القاعدة المختارة يربح اللاعب :

	كرية حمراء	كرية بيضاء	كرية سوداء
القاعدة A	100 DA	0 DA	0 DA
القاعدة B	0 DA	100DA	0 DA

اللعبة الثانية

يسحب اللاعب كرية واحدة و حسب لونها و القاعدة المختارة يربح اللاعب :

	كرية حمراء	كرية بيضاء	كرية سوداء
القاعدة C	100DA	0 DA	100 DA
القاعدة D	0 DA	100 DA	100 DA

1- ماهي القاعدة المناسبة للرّبح أكثر بالنسبة للعبة الأولى ؟

2- ماهي القاعدة المناسبة للرّبح أكثر بالنسبة للعبة الثانية ؟

الحل :

عموما يختار المشاركون بالنسبة للعبة الأولى القاعدة A و بالنسبة للعبة الثانية للقاعدة D

بتوظيف الأمل الرياضياتي يتبين أن الإختيار مناسب !

نرمز بالرموز $P(R)$, $P(N)$ و $P(B)$ لاحتمالات سحب كرية حمراء ، سوداء و بيضاء على الترتيب .

حسب المعطيات لدينا :

$$P(R)\geq\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad P(R)+P(N)\geq\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad P(R)+P(N)+P(B)=1$$

بالنسبة للعبة الأولى

نعتبر x_1 و x_2 المتغيرين العشوائيين المناسبين للربح حسب القاعدتين A و B على الترتيب

$$E(x_1)=100\times P(R)\geq\frac{100}{3}$$

$$E(x_2)=100\times P(B)$$

$$P(B)=1-(P(R)+P(N))$$

$$P(B)\leq 1-\frac{2}{3} \quad \text{أي أن} \quad P(B)\leq\frac{1}{3}$$

$$\text{و منه} \quad E(x_2)\leq\frac{100}{3}$$

اختيار القاعدة A أفضل

بالنسبة للعبة الثانية

نعتبر y_1 و y_2 المتغيرين العشوائيين المناسبين للربح حسب القاعدتين C و D على الترتيب

$$E(y_1)=100(P(R)+P(N))\geq\frac{200}{3}$$

$$E(y_2)=100(P(B)+P(N))$$

$$P(B)+P(N)=1-P(R)\leq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\text{و منه} \quad E(y_2)\leq\frac{200}{3}$$

اختيار القاعدة D أفضل

مسألة محلولة 2 :

في لعبة يرمي اللاعب قطعة نقود غير مزيفة (متوازنة) ، فإذا كانت النتيجة " وجه " فسيربح 2 دينار و تنتهي اللعبة و إلا فإنه يعيد رمي قطعة النقود مرة أخرى فإذا كانت النتيجة " وجه " فسيربح 2^2 دينارا و تنتهي اللعبة و إلا فإنه يعيد رمي قطعة النقود و هكذا ....

1- نقدم للاعب إقتراحين :

☝ ربح 10.000.000 دينارا

✌ المشاركة في اللعبة السابقة (أي ربح 2^n دينارا بعد n رمية ضرورية للحصول على " وجه ")

– أي الاقتراحين أفضل للاعب ؟

2- نقترح الآن اللعبة التالية : يدفع اللاعب مبلغا ماليا و يرمي القطعة النقدية السابقة :

إذا ظهر " ظهر " فإن اللاعب يربح مثل ما دفع و إلا خسر ما دفع .

يشارك لاعب كما يلي : يدفع 10 دنانير و يرمي القطعة إذا ظهر " ظهر " توقف و إلا دفع 20 دينارا و أعاد الرمية فإذا ظهر " ظهر " توقف عن اللعب و إلا دفع 40 دينارا و أعاد اللعب و هكذا...

(إذا ربح توقف عن اللعب و إلا ضاعف الدفع و أعاد اللعب)

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة عدد الرميات اللازمة للاعب لضمان الربح

① بين أن$P(Y = n)$ يؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى$+\infty$

② هل الربح أكيد (نظريا / واقعيا) ؟

الحـــل :

1- **نحسب الأمل الرياضياتي** **E(X)** باعتبار أن المتغير العشوائي X هو الربح . لدينا قانون الاحتمال :

X	2^1	2^2	2^3	2^4	.....	2^n	.....
P(X = x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	.....	$\frac{1}{2^n}$	.....

$$E(X) = 2^1 \times \frac{1}{2^1} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} + 2^3 \times \frac{1}{2^3} + \ldots + 2^n \times \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = \infty\,!$$

و عليه فالإقتراح الثاني (المشاركة) أفضل للاعب

2-① $P(Y = n) = \frac{1}{2^n}$ 2^n يؤول الى $+\infty$

② نفرض أنه بعد عدد n من الرميات يظهر " ظهر " لأول مرّة عندئذ يكون اللاعب قد خسر من الرمية الأولى الى الرمية (n-1) مبلغا يساوي :

$$10 + 20 + 40 + \ldots + 10 \times 2^{n-1} = 10(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1})$$
$$= 10\,(2^n - 1)\quad DA$$

و يكون قد ربح في الرمية n المبلغ 10×2^n دينارا و هو نفس المبلغ الذي دفعه لأجل الرمية n

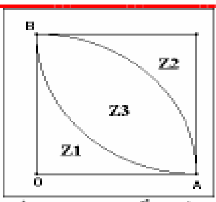
و بالتالي بعد n رمية يكون الربح :

$$10 \times 2^n - 10 \times (2^n - 1)$$

أي 10 دنانير فقط بعد هدر وقت كبير

واقعيا : لا يمكن الاستمرار في اللعب لضمان الربح ما لم يكن بحوزة اللعب مبلغا كافيا .

الهدف من هذا النشاط هو نمذجة وضعية بمقاربتين : إحداهما ترتكز على استدلال بديهي مسبق و الأخرى تستند على أمْثلَةٍ لاحقة للتواترات.



يقوم شخص بتسديد سهم نحو قطعة مربعة ضلعها $1m$، مقسمة إلى ثلاثة مناطق Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، بواسطة ربعي دائرتين مركزاهما رأسي قطر لهذا المربع كما هو موضح في الشكل.
نفرض أنّ السهم يستقر بصفة عشوائية في نقطة ما من هذا المربع.
الهدف هو بناء نموذج احتمالي بطريقتين مختلفتين، واحدة ذات مقاربة نظرية ترتكز على تناسب الحظوظ والأخرى ذات مقاربة تجريبية تستند على ملاحظة التواترات.

الجزء الأوّل:

نختار المناطق Z_1 ، Z_2 ، Z_3 كنتائج ممكنة (مخارج التجربة) لرمية السهم ونرمز بالرموز p_1 ، p_2 ، p_3 إلى حظ استقرار السهم في المناطق Z_1 ، Z_2 ، Z_3 على الترتيب.

1. ما الذي يمكن قوله عن العددين p_1 و p_2 ؟
2. ما الذي يمكن قوله عن توزيع متساو للحظوظ أي $p_1 = p_2 = p_3$ ؟
3. ماذا يمكن أن يساوي المجموع $p_1 + p_2 + p_3$ ؟ لماذا؟
4. استنتج أنّه يكفي معرفة أحد الأعداد الثلاثة لمعرفة بقية العددين؟

الجزء الثّاني: (نمذجة نظرية مسبقة)

يمكن أن نفكر بأنّ توزيع الحظوظ على المناطق الثلاثة متناسب مع مساحاتها.

1. احسب المساحات a_1 ، a_2 ، a_3 للمناطق Z_1 ، Z_2 ، Z_3 على الترتيب.
2. استنتج الأعداد p_1 ، p_2 ، p_3 .

الجزء الثالث: (نمذجة تستند على التجربة)

محاكاة n رمية و حساب تواتر استقرار السهم في المنطقة Z_2 .
نقوم بحجز الطلبيات التالية على مجدول إكسال، حسب ترتيبها.

.1

أ) أثبت أنّه في المعلم $(O;\overline{OA},\overline{OB})$، تنتمي النقطة $M(x;y)$ إلى المنطقة Z_2 ، إذا و فقط إذا كان $x^2+y^2>1$ و $0\leq x\leq 1$ و $0\leq y\leq 1$.

ب) افتح ورقة حساب إكسال ونظمها حسب ما هو وارد أدناه.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	رقم الرمية	x الفاصلة	y الترتيب	x^2+Y^2	x^2+y^2>1		n	fn
2	1						25	
3	2						500	
4	3						5000	

- لمحاكاة الرمية الأولى نحجز في الخانات B2 ، C2 ، D2 ، E2 الطلبيات =Alea( ) ، =Alea( ) ، =B2^2+C2^2 ، =SI(D2>1 ;1 ;0) على الترتيب.

- لمحاكاة الرمية الثانية نحدد الخانات الأربعة السابقة وننقل محتواها إلى السطر الثالث وذلك بسحب الزالقة نحو هذا السطر مع إبقاء الضغط بالإصبع على الزر الأيسر للفأرة.
- نحدد في آن واحد الخانات A2، B2، C2، D2، E2، A3، B3، C3، D3، E3 . وننقل محتواها إلى غاية السطر 5001.
- نحجز في الخانات H2، H3، H4،الطلبيات التالية على الترتيب:
=Somme(E2 :E26)/25 ، =Somme(E2 :E501)/500 ،
=Somme(E2 :E5001)/5000.

2. قانون الاحتمال على $\{z_1,z_2,z_3\}$

أ) بالنقر على اللمسة F9، نحاكي التجربة من جديد، ثمّ نلاحظ تذبذب تواترات استقرار السهم في المنطقة Z_2 من عيّنة إلى أخرى من أجل n ثابت ثمّ لمّا يكبر من 25 إلى 500 إلى 5000، ما تعليقك على هذه المشاهدة؟

ب) نهتم الآن بالعيّنة التي مقاسها $n = 5000$ ، حيث نقرر تقريب التواترات إلى 10^{-2} ، تحقق من ميول هذه الأخيرة نحو الاستقرار والثبات و سجلها من أجل 10 عيّنات مختلفة.

ج) اختر عددا " نظريا" p_2' نعتبره العدد النموذجي أو المثالي الذي يعبر عن تواتر استقرار السهم في المنطقة Z_2 ، ثمّ p_1' و p_3' .

الجزء الرابع: (مقارنة)

لخّص، في جدول، قانوني الاحتمال اللذين تحصلت عليهما في الجزأين الثاني والثالث، ثمّ قارن بين النموذجين من حيث النتائج والإجراءات المتبعة.

حـــل

الجزء الأوّل:

1. يمكن القول أنّ $P_1 = P_2$ ، باعتبار أنّ المنطقتين Z_1 و Z_2 لهما نفس المساحة.
2. لا يمكن أن تكون الحظوظ متساوية لأنّ مساحة المنطقة Z_3 أكبر من مساحة كل من المنطقتين الأخريين.
3. إذا اعتبرنا أنّ الأعداد P_1، P_2 و P_3 هي نسب مئوية، وبما أنّ السهم سيستقر لا محالة (أي بالتأكيد) في المربع المعطى فإنّ نسبة إصابة السهم لهذا المربع هي، من جهة مجموع هذه النسب ومن جهة أخرى هي $100\ \%$ أي $\frac{100}{100} = 1$ ، منه يكون $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.
4. بالفعل إذا علما قيمة P_1 مثلا أصبحت قيمة P_3 معلومة باعتبار أنّ $P_1 = P_2$ حيث نستعمل المساواة $P_3 = 1 - P_1 - P_2$.

الجزء الثّاني: (نمذجة نظرية مسبقة)

1. حساب المساحات a_1 ، a_2 ، a_3 للمناطق Z_1 ، Z_2 ، Z_3 على الترتيب.
بالحساب المباشر نجد $a_1 = a_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$ و $a_3 = \frac{\pi}{2} - 1$.
2. حسب بما أنّ حظ إصابة كل منطقة متناسب مع مساحتها فإنّ :
$P_1 = P_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$ و $P_3 = \frac{\pi}{2} - 1$.

الجزء الثالث: (نمذجة تستند إلى التجربة)

.1

أ) في المعلم $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$، تنتمي النقطة $M(x;y)$ إلى المنطقة Z_2 ، إذا و فقط إذا كان $OM>1$ وحيث $OM=x^2+y^2$

فإنّ : $x^2+y^2>1$ مع الشروط $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ التي تجعل النقطة M داخل المنطقة Z_2 .

ب) بعد إنجاز عمليات الحجز للطلبات الضرورية لمحاكاة التجربة، تظهر النتائج الوارد على على ورقة الحساب إكسال أدناه. مع الملاحظة أنّ هذه النتائج ليس الوحيدة الممكنة بل يمكن أن تظهر نتائج أخرى عندما يقوم شخص ما بنفس العمل.

H3 | f_x =SOMME(E2:E501)/500

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	رقم الرمية	الفاصلة x	الترتيب y	x^2+y^2	x^2+y^2>1		n	fn
2	1	0,598789269	0,80517319	1,006852454	1		25	0,24
3	2	0,917112892	0,817047478	1,508662637	1		500	0,23
4	3	0,290861243	0,689872484	0,560524307	0		5000	0,22
5	4	0,561073611	0,066457323	0,319220173	0			
6	5	0,850387323	0,445933206	0,922015023	0			
7	6	0,512760643	0,25101252	0,325930762	0			
8	7	0,388154568	0,822725158	0,827540654	0			
9	8	0,805204966	0,5863691	0,992183758	0			
10	9	0,356239272	0,384634925	0,274850444	0			
11	10	0,218909639	0,847886898	0,766833621	0			
12	11	0,381910331	0,710165744	0,650190885	0			
13	12	0,424698673	0,844127859	0,892920805	0			
14	13	0,60709754	0,520594928	0,639586503	0			
15	14	0,833739777	0,61044102	1,067760255	1			
16	15	0,341865623	0,700938171	0,608186424	0			
17	16	0,394051314	0,730001359	0,688178423	0			
18	17	0,238251028	0,861256505	0,79852632	0			
19	18	0,520904942	0,241058898	0,329451351	0			
20	19	0,633994791	0,27038537	0,475057643	0			
21	20	0,591652479	0,991799901	1,3337197	1			
22	21	0,846849319	0,71521041	1,2286797	1			

2. أ) عند النقر على اللمسة F9 نشاهد ما يلي:

أولًا: من أجل n ثابت

تأخذ التواترات قيما حقيقية محصورة ضمن القيمتين 0,04 و 0,24	n=25
تأخذ التواترات قيما حقيقية محصورة ضمن القيمتين 0,08 و 0,14	n=500
تأخذ التواترات قيما حقيقية محصورة ضمن القيمتين 0,09 و 0,115	n= 5000

ثانيا: لمّا يتغير n من 25 إلى 500 إلى 5000، نلاحظ أنّ التواترات تصغر أكثر فأكثر حيث أعطت إحدى المشاهدات القيم التالية للتواترات 0,160 ، 0,122 ، 0,112 وذلك من أجل n يساوي 25 ثمّ 500 ثمّ 5000 على الترتيب وأعطت أخرى القيم 0,040 ، 0,090 ، 0,104 على الترتيب، و هكذا.

ب) تسجيل التواترات من أجل 10 عيّنات مختلفة مقاسها $n = 5000$.

التواترات	0,10	0,10	0,10	0,11	0,12	0,11	0,12	0,11	0,12	0,10

جـ) يمكن اختيار عدد يعبر عن تواتر استقرار السهم في المنطقة Z_2 وهو الوسط الحسابي للتواترات العشرة التي سجلناها، فنجده: 0,109

منه : $p'_2 = p'_1 = 0{,}109$ و $p'_3 = 1 - p'_1 - p'_2 = 0{,}782$.

الجزء الرابع: (مقارنة)

جدول تلخيصي لقانوني الاحتمال			
قانون الاحتمال الناتج من الجزء الثاني	p_1	p_2	p_3
	0,21	0,21	0,58
قانون الاحتمال الناتج من الجزء الثالث	p'_1	p'_2	p'_3
	0,11	0,11	0,78

من الواضح أنّ قانون الاحتمال P تم بنائه وفقا لتصور نظري يرتكز على تناسب احتمال إصابة السهم أي منطقة من القطعة المربع مع مساحة هذه المنطقة. بينما تم بناء النموذج الاحتمالي P′ على أساس من التجريب و التخمين الذي يقترب أكثر من الواقع، حيث يأخذ بعين الاعتبار موضع كل منطقة في القطعة ويمسح أكبر قدر من نقط المنطقة Z_2 حيث تمّ تجريب 10×5000 مرّة تسديد السهم نحو القطعة.

يعتبر قانون الاحتمال P′ أكثر مصداقية في نمذجة هذه التجربة من القانون P .

إختيار نمزذج أحتمالي

الهدف من هذا النشاط هو اختيار نموذج احتمالي من خلال مقاربة تجريبية تعتمد على المحاكاة و مقارنة مخططات بالعلب

يحتوي وعاء على كرة حمراء و 4 كرات بيضاء ، نسحب منه كرتين عشوائيا و في آن واحد و نهتم بظهور اللون الأحمر . أي نموذج إحتمالي ، من بين النماذج الثلاثة الآتية ، تراه مناسبا لهذه التجربة ؟

النموذج الثالث		
e_i	كرة حمراء واحدة	لا توجد كرة حمراء
p_i	0,3	0,7

النموذج الثاني		
e_i	كرة حمراء واحدة	لا توجد كرة حمراء
p_i	0,4	0,6

النموذج الأول		
e_i	كرة حمراء واحدة	لا توجد كرة حمراء
p_i	0,5	0,5

1- مرحلة البحث الأولى :

أختيار نموذج احتمالي مناسب لهذه التجربة يعني تعيين مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة و ارفاق كل إمكانية بعدد حقيقي محصور بين 0 و 1 .
من الواضح أ، مجموعة الإمكانيات تشمل على إمكانيتين هما إما طهور كرة حمراء واحدة و إما عدم ظهور أية كرة حمراء . نرمز بالرمز p_0 إلى احتمال عدم ظهور كرة حمراء و بالرمز p_1 إلى احتمال ظهور كرة حمراء واحدة .
ما الذي يمكن قوله عن التوزيع المتساوي لقانون الاحتمال الأول أي النموذج الأول ؟
هل يمكن حصر الاختيار في النموذجين الثاني و الثالث ؟

2- مرحلة التجريب أو المحاكاة :

لترجيح نموذج على آخر ، قمنا بإجراء محاكاة لهذه التجربة بواسطة مجدول كررنا التجربة k مرة و حسبنا التواتر f_k لظهور كرة حمراء ، وذلك من أجل k يساوي 10 ثم 100 ثم 1000 فكانت نتائج التواترات لعشر عينات من كل مقاس من المقاسات الثلاثة كما هي معطاة في الجدول الموالي

f_{10}	0,6	0,4	0,2	0,1	0,3	0,8	0,3	0,2	0,4	0,2
f_{100}	0,42	0,39	0,47	0,44	0,37	0,37	0,50	0,36	0,37	0,44
f_{1000}	0,412	0,409	0,395	0,400	0,402	0,404	0,414	0,397	0,402	0,386

أ) أحسب الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري لكل سلسلة التواترات f_k و ترجم ذلك .
– ماهو النموذج الإحتمالي الذي يبدو أكثر ملاءمة للمعطيات المشاهدة ؟

ب) استخرج المخططات بالعلب لهذه السلاسل بنفس الإعدادات لنافذة الحاسبة البيانية التي تستعمل لهذا الغرض .

حــــل :

1- توجد كرة حمراء واحدة مقابل 4 كرات بيضاء ، إذن منالمرجح أن عدم ظهور كرة حمراء هو الإمكانية الأكثر حظا أي الأكبرإحتمالا . و هذا يسمح لنا بسحب النموذج الأول ذي التوزيع المتساوي للإحتمالات .
غير ا، هذا لا يسمح لنا بالفصل في النموذجين الباقيين حيث نجد في كل منهما أن $p_0 \succ p_1$.

2- نلخص الإجابة في الجدول الموالي :

	مدى السلسلة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
K = 10	0,08 - 0,1 = 0,7	$\overline{f_{10}} = 0,35$	$\sigma_{f_{10}} = 0,20$
K = 100	0,50 – 0,36 = 0,14	$\overline{f_{100}} = 0,413$	$\sigma_{f_{100}} = 0,05$
K = 1000	0,414 – 0,386 = 0,028	$\overline{f_{1000}} = 0,402$	$\sigma_{f_{1000}} = 0,01$

المناقشة و اختيار النموذج المناسب :

- لدينا $0,3 \prec \overline{f_{10}} \prec 0,4$ و بالتالي ليس هنا ما يسمح لنا بتفضيل أي من القيمتين 0,3 و 0,4 للاحتمال $\mathbf{p_1}$ ، على حساب الأخرى . فترجيح أحد النموذجين الثاني أو الثالث غير ممكن لحد الآن .

- نلاحظ 3 مظاهر في نفس الوقت هي :

1- تذبذب العيّنات يقل كلما كبر مقاسها ، إذ يتضاءل المدى من 0,700 ، في العينات التي مقاسها 10 ، الى 0,028 في العيينات التي مقاسها 1000 ، مرورا بالمدى 0,140 للعينات التي مقاسها 100 .

2- تقارب الوسط الحسابي في العينات التي مقاسها 100 مع تلك التي مقاسها 1000 ، مقارنة بالوسط الحسابي في العينات ذات المقاس 10 و العينات ذات المقاس 100 .

3- في المقابل نلاحظ تضاءل الإنحراف المعياري من العينات ذات المقاس الأصغر 10 الى العيّنات ذات المقاس الأكبر 1000 أي $\sigma_{f_{10}} \succ \sigma_{f_{100}} \succ \sigma_{f_{1000}}$

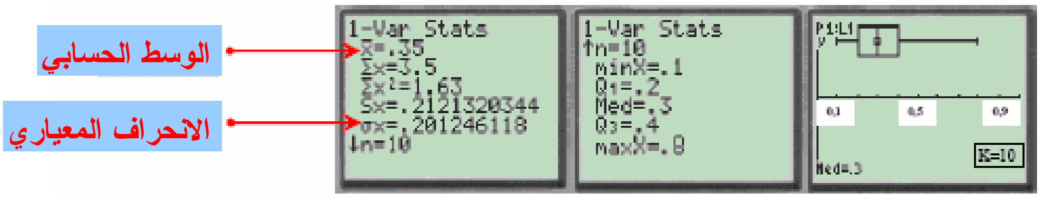
- تعتبر هذه المظاهر ، بالإضافة الى كون $\sigma_{f_{1000}} = 0,01$ ، مؤشرات على ميول التواترات نحو الإستقرارحول الوسط الحسابي $\overline{f_{1000}}$ حيث يمكن كتابة $\overline{f_{1000}} \approx 0,4$

خلاصة :

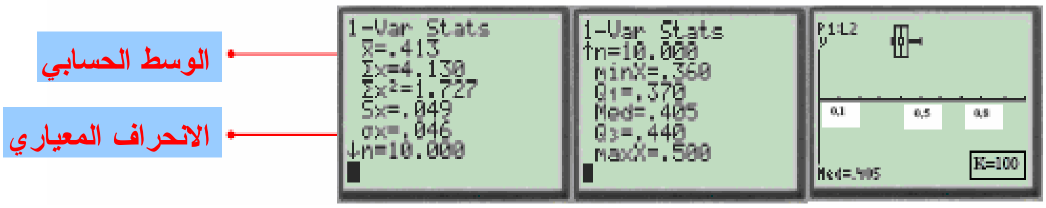
نستنتج أن النموذج الثاني هو الأكبر ملائمة لمعطيات التجربة أي هو الذي نتبناه كنموذج احتمالي لهذه التجربة .

3− ب) تعطي الحاسبة البيانية +TI83 المخططات بالعلب كما هي موضحة في الشاشات الآتية :
هذه المخططات تبدي بوضوح سلوك التواترات ، كما ينص عليه قانون الأعداد الكبيرة (Loi des grand no,bres) و تؤيد في نفس الوقت النتائج التي توصلنا إليها .

- بالنسبة الى السلسلة الأولى حيث $k = 10$ نجد المخطط بالعلبة و بعض المؤشرات :

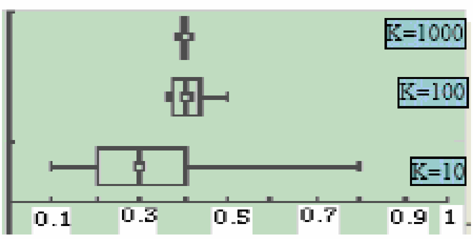


- بالنسبة الى السلسلة الأولى حيث $k = 100$ نجد المخطط بالعلبة و بعض المؤشرات :



- بالنسبة الى السلسلة الأولى حيث $k = 1000$ نجد المخطط بالعلبة و بعض المؤشرات :

* يمكن مقارنة السلاسل الثلاثة و ذلك بتمثيل مخططاتها بالعلب على نفس السلم كما هو موضح في الشكل المقابل ، ثم مقارنة مؤشرات كل سلسلة مع أخرى حيث نلاحظ تقلص الإنحراف الربيعي شيئا فشيئا كلما كبر مقاس العينة ثم ميوله نحو الثبات . بل و نلاحظ أيضا تضاؤل المدى كلما كبر مقاس العينة و هو ما يؤكد خاصية قانون الأعداد الكبيرة .



أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من **1** إلى **6** أجب بصحيح أم خاطئ معللا إجابتك:

نشكل عدداً من ثلاثة أرقام باستعمال الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

احتمال الحصول على:

1 عدد بثلاثة أرقام مختلفة هو 0,48

2 عدد يشمل 3 هو 0,78

3 عدد فردي هو 0,52

4 a ، b و c أعداد حقيقية من المجال $[0;1]$ وهي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية.نرمي زهرة نرد حيث:

$$p(1) = p(2) = a$$

$$p(3) = p(4) = b$$

$$p(5) = p(6) = c$$

إذن $b = \frac{1}{6}$

5 نرمي قطعة نقدية عشر مرات.

احتمال الحصول على عشر مرات "وجه" هو $p = \frac{1}{1000}$

6 إليك جواب تلميذ و يتضمن خطأ على التمرين التالي:

E مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث $1 \leq n \leq 30$

نختار عشوائيا رقم من E .

A : " اختيار رقم زوجي"

B : " اختيار رقم مضاعف لـــ3 "

احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(A \cup B)$

الجواب:

بين 1 و 30 يوجد 15 رقم زوجي و 10 أعداد مضاعفة لـــ 3 ، إذن $p(A) = \frac{1}{2}$ ، $p(B) = \frac{1}{3}$ ،

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{5}{6}$$

أسئلة متعددة الاختيارات

بالنسبة للتمارين من **7** إلى **9** اختر الجواب الصحيح من بين المقترحة :

7 لتكن A ، B و C ثلاث حادثات من المجموعة Ω حيث $p(A) = 0,3$ ، $p(B) = 0,4$ ، $p(C) = 0,7$ ، $p(A \cap B) = 0,2$ ، $p(A \cup B) = 0,7$ ، $p(B \cup C) = 0,7$ ، $p(A \cap C) = 0,2$

1) $p(B \cap C) = ...$

(•) 0,35 ، (•) 0,4 ، (•) 0,5

2) $p(A \cup C) = ...$

(•) 0,8 ، (•) 0,09 ، (•) 0,75

3) $p(\overline{A} \cap C) = ...$

(•) 0,3 ، (•) 0,5 ، (•) 1,02

8 يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5.نسحب كرة و نسجل رقمها و نعيدها إلى الكيس ثم نسحب كرة أخرى و نسجل رقمها.ليكن X المتغير العشوائي المناسب لمجموع الرقمين .

الأمل الرياضياتي للمتغير X هو

1) 5 ، 2) 6 ، 3) 7 ، 4) 5,5

9 a عدد حقيقي ، X متغير عشوائي قانون احتماله موزع كالآتي:

x	-2	1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

تكون قيمة a هي :

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{5}{12}$

10 يحتوي صندوق على ست قريصات مرقمة من 1 إلى 6

1) نسحب من الصندوق قريصة، نسجل الرقم الذي تحمله و نعيدها إلى الصندوق ثم قريصة ثانية و نسجل رقمها.

بواسطة المخطط عين كل الحالات الممكنة .

2) في هذا السؤال لا نعيد القريصة الأولى المسحوبة إلى الصندوق قبل سحب الثانية.

بواسطة مخطط عين كل الحالات الممكنة.

11 A و B حادثتان حيث $p(A)=0,3$ ، $p(A\cup B)=0,7$ ، $p(A\cap B)=0,2$. احسب $p(B)$.

12 A و B حادثتان حيث $p(A)=0,45$ ، $p(B)=0,37$ ، $p(A\cup B)=0,82$

أثبت أن A و B غير متلائمتين.

13 زهرة نرد وجوهها مرقمة من 1 إلى 6، احتمال ظهور الوجوه الست يحقق العلاقة:

$$p(1)=p(2)=2p(3)=3p(4)=p(5)=p(6)$$

احسب احتمال ظهور كل وجه.

14 نظم خمس لاعبين A ، B ، C، D و E منافسة في لعبة الشطرنج.نفرض أن اللاعبين A ، B و C لهم نفس الاحتمال للربح و اللاعبين D و E لهما نفس الاحتمال للربح و أن اللاعب A له ثلاث مرات حظوظ للربح بالنسبة للاعب D.

1)احسب الاحتمال للربح لكل لاعب.

2) احسب الاحتمال لربح D أو E.

3) ما هو احتمال ربح A أو B أو C.

4) ما هو احتمال أن B لا يربح.

15 تضع الطفلة هذه الحروف N، I، H، D في علبة تسحب الطفلة عشوائيا حرفاً و تضعه في الجدول التالي

الرابع	الثالث	الثاني	الأول

احسب احتمال أن تكتب الطفلة اسمها

16 نسحب ورقة من لعبة 32 ورقة .ما هو احتمال الحصول على:

1) عدد فردي؟ 2) بنت ؟ 3) قلب أو شاب ؟

17 نرمي ثلاث قطع نقدية مرقمة 1 ، 2 ، 3 . نسجل النتائج على شكل ثلاثية (مثال PFP، القطعة 1 ظهر، القطعة2 وجه، القطعة3 ظهر) .

1) مثل النتائج بمخطط أو شجرة.

2) ما هو عدد كل الإمكانيات ؟

3) لماذا كل الإمكانيات متساوية الاحتمال؟ احسب احتمال كل إمكانية.

18 يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء ، 4 كرات خضراء و 3 كرات صفراء .نسحب عشوائيا كرة من الكيس.

هل يوجد تساوي احتمال إذا كانت مجموعة الإمكانيات Ω هي:

1) $\Omega=\{B,V,J\}$؟ 2) Ω هي الكرات العشر؟

19 نرمي زهرة نرد حيث وجه واحد مرقم 1 ، وجهين مرقمين2 ، ثلاثة وجوه مرقمة3 .

1) هل هناك تساوي احتمال ؟

2) عين مجموعة الإمكانيات التي يكون من أجلها تساوي احتمال.

20 نرمي نردين واحد أسود و الآخر أخضر .نسمي n رقم الوجه العلوي للنرد الأسود و ℓ رقم النرد الأخضر.

A الحادثة: " $n\le 3$ ". B الحادثة: " $\ell\le 3$ "

C الحادثة: " $n+\ell<3$ أو $\ell>2$ "

احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$

21 الجدول التالي يمثل نتائج امتحان لتلاميذ مؤسسة ما حسب صفتهم داخلي أو خارجي

	خارجي	داخلي
الناجحون	195	212
الراسبون	43	81

1) نختار تلميذا عشوائياً من هذه المؤسسة

ما هو احتمال أن يكون :

أ - داخلي و ناجح ؟ ب - خارجي ؟ جـ - راسب ؟

2) نختار عشوائياً تلميذا داخليا.ما هو احتمال أن يكون ناجحاً؟

3) نختار عشوائياً تلميذا راسبا.ما هو احتمال أن يكون خارجياً؟

22 يحتوي كيس على 3 قريصات بيضاء و 5 قريصات سوداء.نسحب قريصتين من الكيس على التوالي بحيث نعيد إلى الكيس القريصة المسحوبة قبل سحب القريصة الثانية.

1) مثل النتائج بمخطط (أو شجرة).

2) ما هو احتمال الحصول على نفس اللون ؟

23 أعد نفس التمرين السابق و لكن لا نعيد القريصة الأولى قبل السحب الثاني.

24 يحتوي صندوق على 7 كرات منها ثلاث كرات سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 و أربع كرات حمراء مرقمة 1 ، 2 ، 3 ، 4. نسحب عشوائيا كرة من الصندوق

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A: "الكرة المسحوبة سوداء". B: "الكرة المسحوبة حمراء".

C: " الكرة المسحوبة تحمل رقما فرديا"

2) احسب احتمال الحوادث التالية: $A\cap B$ ، $A\cap C$ ، $B\cap C$ ، $A\cup B$ ، $A\cup C$ ، $B\cup C$.

25 A و B حادثتان حيث: $p\left(\overline{A}\right)=0,44$ ، $p\left(\overline{B}\right)=0,63$ و $p\left(\overline{A\cup B}\right)=0,52$. احسب $P\left(A\cap B\right)$

26 نفرض أنه في ولادة هناك نفس الحظوظ حتى تكون بنت أو ولد .

1) باعتبار الترتيب في الولادات عين كل الإمكانيات لعائلة بثلاثة أطفال.

2) احسب احتمال أن تكون عائلة بثلاث أطفال تتضمن بنتين.

27 يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة 1 ، 2 ، 5 ، 7 نسحب كرتين من الكيس على التوالي بحيث نعيد الكرة الأولى إلى الكيس قبل السحب الموالي.نضع X رقم الكرة الأولى و Y رقم الكرة الثانية

1) أعط قائمة الإمكانيات 16 لهذه التجربة.

2) احسب احتمال الأحداث التالية:

A : " $X=5$ ". B : " $X+3Y\leq 3$ ".

C : " $X=2Y$ ". D : " $X+Y$ عدد فردي ".

28 الجدول التالي يمثل توزيع عمال حسب وسيلة تنقلهم إلى عملهم و حسب مكان إقامتهم

	حافلة	سيارة	مشيا على الأقدام
المدينة	23	34	20
القرية	56	18	5

نختار عامل من هذه المؤسسة .ما هو احتمال أن يكون:

1) يسكن في المدينة ويلتحق بمكان عمله مشياً على الأقدام؟

2) يسكن في القرية ؟

3) يذهب بالسيارة ى؟

4) نختار عاملاً يسكن في المدينة.ما هو احتمال أن يلتحق ماشيا علا الأقدام؟

29 في قسم به 45 تلميذاً يوجد 14 تلميذاً في نادي الموسيقى و10 تلاميذ في نادي الرسم و 5 تلاميذ في كلا الناديين.نختار عشوائياً تلميذاً من هذا القسم. احسب احتمال أن يكون هذا التلميذ : 1) من نادي الموسيقى ؟

2) من الناديين؟

3) نختار تلميذاً من نادي الرسم.ما هو احتمال أن يكون من نادي الموسيقى؟

30 نرمي قطعة نقدية مزيفة مرة واحدة. نسمي P الحادث " الحصول على ظهر " و F الحادث " الحصول على وجه".

1) علما أن احتمال الحصول على ظهر هو $p(P)=\frac{1}{3}$، احسب $p(F)=$.

2) نرمي هذه القطعة ثلاث مرات

أ) ضع مخططاً توضح فيه جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة.

ب) ما هو احتمال :- الحصول على " وجه"؟

- الحصول على "مرتين وجه " ؟

31 ينقسم دم الإنسان إلى أربع فصيلات A ، B ، O ، AB وإلى نوعين Rh^{+} و Rh^{-}.

في مجتمع P فصيلات الدم موزعة كالآتي: $A:20\%$ ، $B:25\%$ ، $O:45\%$ ، $AB:10\%$

و توزيع R$hésus$ يكون كالآتي:

	A	B	O	AB
Rh^{+}	80%	85%	83%	90%
Rh^{-}	20%	15%	17%	10%

نختار عشوائيا شخصا من P . احسب الاحتمال حتى يكون

1) من فصيلة O^{+} . 2) من فصيلة B .

3) من Rh^{-} . 4) من Rh^{+} و O .

32 في حقيبة السفر لأحمد يوجد سروالان واحد أبيض والآخر أسود ، معطفان واحد أبيض والآخر أسود وثلاثة أقمصة ، اثنان بيضاوان والآخر أسود.أخذ أحمد بطريقة عشوائية سروالاً و معطفاً و قميصاً.

1) بواسطة شجرة عين كل الإمكانيات التي تسمح لأحمد بارتداء سروال و معطف و قميص.

2) لتكن A الحادثة:" لباس أحمد أسود"

– بين أن $P(A)=\dfrac{1}{12}$

3) احسب احتمال أن يكون أحمد مرتديا سروالا ومعطفا من لونين مختلفين.

4) احسب احتمال ألا يكون أحمد مرتديا قميصا أسودا و لا معطفا أبيضا.

33 في شركة تأمين عقود المسجلين موزعة كالآتي:

72% مسجلين على الأقل في تأمين السيارات

54% مسجلين على الأقل في تأمين السكن

30% مسجلين على الأقل في التأمين على الحياة.

7% مسجلين في التأمينات الثلاث.

25% مسجلين تأمين السكن و السيارات فقط.

31% مسجلين تأمين السيارات فقط .

14% مسجلين تأمين السكن فقط.

1) مثل هذه الوضعية بمخطط.

2) ترسل الشركة مراسلة عن طريق البريد لأحد زبائنها مختار عشوائيا، نضع:

A " المؤمن مسجل في تأمين السيارات "

H " المؤمن مسجل في تأمين السكن "

V " المؤمن مسجل في التأمين على الحياة "

أ– احسب احتمال الأحداث التالية: $A\cap V$ ، $A\cup H$ ، $A\cup H$ ، $A\cap V\cap H$ ، $\overline{A\cup H}$ ، $\overline{A\cup V}$

2) عبر بدلالة A ، H و V على الأحداث التالية:

E " المؤمن مسجل في التأمين عن السيارات والسكن وغير مسجل في التأمين عن الحياة ".

F " المؤمن مسجل فقط في التأمين عن السيارات ".

G"المؤمن مسجل في التأمين عن السيارات والسكن فقط ".

34 في ثانوية يبلغ تعداد تلاميذها 720 ، يوجد230 تلميذاً ذكرا منهم 49 راشداً ، و 51 تلميذة قاصرا.نختار تلميذاً بطريقة عشوائية. احسب احتمال أن يكون هذا التلميذ:

1) بنتا 2) تلميذاً قاصراً. 3) بنتا أو ولدا راشدا.

35 علبة تتضمن 50 حبة حلوى و هي إما مربعة الشكل أو دائرية الشكل و إما بالشكولاطة أو المربى.

30% بالشكولاطة و من بينها 10 مربعة الشكل

و 60% من كل الحلوى هي دائرية الشكل.

1) أملئ الجدول التالي:

المجموع	مربعة الشكل	دائرية الشكل	
			بالشكولاطة
			بالمربى
			المجموع

2) يختار طفل عشوائياً حبة حلوى من العلبة.احسب احتمال الأحداث التالية:

A " يختار حبة حلوى مربعة الشكل "

B " يختار حبة حلوى بالمربى "

C " يختار حبة حلوى مربعة الشكل و بالمربى "

D " يختار حبة حلوى مربعة الشكل أو بالمربى "

3) اختار الطفل حبة حلوى مربعة الشكل .

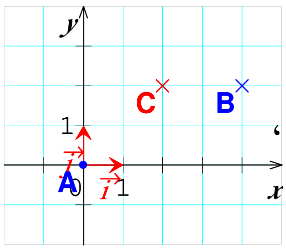
احسب احتمال أن تكون بالشكولاطة.

36 نضع في كيس الحروف A ، M ، H ، T.نسحب الحروف الأربعة على التوالي و نضعها في الجدول التالي

الحرف4	الحرف3	الحرف2	الحرف1

احسب احتمال الحصول على الكلمة " MATH ".

37 تسير نملة من نقطة A إلى النقطة B في كل مرحلة تتحرك بمربع على اليمين أو بمربع نحو الأعلى (مثال الإمكانية يمين ، أعلى ، يمين ، أعلى ، يمين ، يمين) نمثلها بـ$(\vec{i},\vec{j},\vec{i},\vec{j},\vec{i},\vec{i})$.



1) بواسطة مخطط عين كل الإمكانيات للوصول إلى B .

ما هو عدد كل الإمكانيات ؟

2) احسب الاحتمال حتى تمر النملة بالنقطة C .

38 في جيب سليمة $27DA$ ، ثلاث قطع ذات $1DA$، قطعتين ذات $5DA$ ، قطعتين ذات $2DA$ و قطعة واحدة ذات $10DA$.

تأخذ سليمة من جيبها عشوائياً قطعتين.

1) بواسطة جدول عين كل الحالات الممكنة.

2) احسب الاحتمال حتى تأخذ :

- على الأقل $10DA$.
- على الأقل $5DA$

39 سؤالان مطروحان في استفتاء على الناخب أن يختار الجواب "نعم" أو "لا" لكلا السؤالين.نتائج الاستفتاء موزعة كالآتي: 65% أجابوا "نعم" عن السؤال الأول.

51% أجابوا "نعم" عن السؤال الثاني.

46% أجابوا "نعم" عن السؤالين الأول و الثاني.

نختار عشوائياً ناخباً.احسب احتمال أن يكون هذا الناخب أجاب بـــ "لا" عن كلا السؤالين.

40 مؤسسة تضم 600 عاملاً. نميز بين الأشخاص الذين يضعون نظارات "L" والأشخاص الذين يضعون ربطة عنق"C". 150 شخصاً لا يضعون نظارة و لا ربطة عنق.

نختار عشوائياً شخصاً من المؤسسة.

1) احسب احتمال الحادثة " $L\cup C$ " .

2) علماً أن $P(L)=0,5$ و $P(C)=0,4$، احسب احتمال أن نختار شخصاً يضع نظارة و ربطة عنق.

41 يحتوي كيس على 50 كرة مرقمة من 1 إلى 50 .نختار عشوائياً كرة من الكيس. لتكن الأحداث:

A: "رقم الكرة المسحوبة أصغر أو يساوي30 "

B: "رقم الكرة المسحوبة أكبر أو يساوي n " (n عدد طبيعي من المجال $[1;30]$)

1) احسب $P(A\cup B)$. ما ذا يمكن أن تقول عن الحادثة $A\cup B$ ؟

2) علماً أن $P(A\cap B)=0,15$ ، استنتج قيمة العدد الطبيعي n

42 X ، متغير عشوائي قانون احتماله موزع كالآتي:

X	-5	-2	3	4	7
$P(X=x)$	$0,2$	$0,35$	$0,1$	$0,15$	$0,2$

1) احسب الأمل الرياضياتي لــ X .

2) عين تباين X .

43 X ،متغير عشوائي قانون احتماله موزع كالآتي:

X	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	α	α	$\frac{1}{3}$

1) عين قيمة العدد α .

2) احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي لــ X .

3) احسب $V(X)$ انحراف لـــ X و $\sigma(X)$ تباين X .

44 ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم -8 ، 3 ، 4 ، 7 و 9

نضع: $u_1=P(X=-8)$ ، $u_2=P(X=3)$

$u_3=P(X=4)$ ، $u_4=P(X=7)$ و $u_5=P(X=9)$

1) علماً أن u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، عين قانون احتمال X .

2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X .

3) عين تباين المتغير X .

45 صندوق يحتوي على كرة حمراء، كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء. نسحب عشوائياً كرتين على التوالي.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

1) عين قانون احتمال المتغير X .

2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X .

3) احسب تباين المتغير X .

46 يحتوي كيس على 4 قريصات مرقمة من 2 ، 3 ، 6 و 9 . نسحب عشوائيا قريصة ثم نعيدها إلى الكيس ثم نسحب قريصة أخرى ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين المسحوبين .

1) املأ الجدول التالي:

القريصة الأولى / القريصة الثانية	2	3	6	9
2				
3				
6				
9				

1) احسب الاحتمالات التالية: $P(X=12)$ ،
$P(X=36)$، $P(X<9)$ و $P(X\geq 27)$.
2) عين قانون احتمال المتغير X .
3) احسب تباين X

47 يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء ، كرتين صفراوين وكرتين حمراوين.نسحب كرتين على التوالي (بدون إرجاع).
X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة و Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الصفراء المسحوبة.
1) عين القيم الممكنة لـ X.
2) عين قانون احتمال المتغير X.
3) احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير X.
4) أجب عن نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمتغير Y.
5) نعتبر المتغير العشوائي Z حيث $Z=X+Y$ ، وليكن N المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.
• عبر عن Z بدلالة N. • استنتج قانون احتمال Z .
• احسب $E(Z)$ الأمل الرياضياتي لـ Z و $\sigma(Z)$ تباين Z.

مسائل

48 نضع في كيس ثلاث قريصات تحمل الرقم 1، قريصتين تحملان الرقمين 2 وقريصة واحدة تحمل الرقم 3.

الجزء1 :

نسحب عشوائياً قريصتين على التوالي (بدون إرجاع)، نضع Ω مجموعة الإمكانيات، X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين.
1) عين بواسطة مخطط عدد عناصر المجموعة Ω .
2) ما هي القيم الممكنة لـــ X ؟
3) عين قانون احتمال X.
4) احسب الأمل الرياضياتي و التباين للمتغير X.

الجزء2: نسحب عشوائياً قريصتين على التوالي حيث نعيد القريصة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .لتكن Ω' مجموعة كل الإمكانيات و Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين.
1) عين بواسطة مخطط عناصر Ω' .
2) ما هي القيم الممكنة لــــ Y؟
3) عين قانون احتمال Y.
4) احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير Y.
5) عين $P(Y\leq 1)$.

الجزء3:

نسحب قريصتين في آن واحد، Ω'' مجموعة كل الإمكانيات.
Z المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين.
1) عين بواسطة مخطط عناصر Ω'' .
2) ما هي القيم الممكنة لـــ Z؟
3) عين قانون احتمال Z.
4) احسب الأمل الرياضياتي و التباين للمتغير Z.
5) عين $P\left(Z\geq \frac{7}{2}\right)$.

49 نختار عشوائيا عددا محصورا بين 1 و99، X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار مجموع رقمي العدد.
1) أملأ الجدول التالي:

الآحاد / العشرات	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

2) عين قانون احتمال X.
3) استنتج $P(X\geq 5)$.
4) يلعب عمر اللعبة التالية: إذا كان $X\geq 5$ يربح نقطة و إذا كان $X<5$ يخسر 4 نقط.

Y المتغير العشوائي المناسب لربح عمر .
عين قانون احتمال المتغير العشوائي Y.
5) احسب $E(Y)$ و $\sigma(Y)$. هل اللعبة عادلة؟

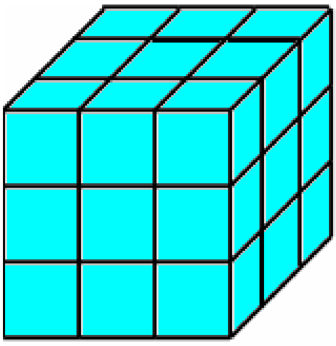
50 نختار عشوائيا عددا محصورا بين 0 و 60 .ليكن X المتغير العشوائي المناسب لرقم الآحاد و Y المتغير العشوائي المناسب لرقم العشرات.
1) عين قانون احتمال X و Y.
2) احسب $P(X=Y)$.
3) احسب $P(XY>17)$.
4) احسب $P(2X+Y=13)$.

51 صندوق يحتوي على 8 كريات :خمس كريات زرقاء مرقمة 1، 2، 3، 4، 5 وثلاث كريات حمراء مرقمة 1، 2، 3 . نسحب على التوالي كريتين بدون إرجاع حيث لا نرجع الكرية الأولى إلى الصندوق. ليكن S المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب اكبر الأرقام المسجلة عند السحب.
1) عين قانون احتمال المتغير العشوائي S.
2) احسب الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي S.

52 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
نعتبر النقط $A(0;1)$ ، $B(1;0)$ و $C(-1;0)$.
نرفق النقط A ، B و C بالمعاملات 1 ، β و δ على الترتيب(β و δ عددان حقيقيان). G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,\beta);(C,\delta)\}$ .... (1)
1) ناقش حسب قيم β و δ وجود النقطة G.
– عين إحداثيتي G.
2) نرمي زهرة نرد مرتين وجوهها مرقمة كما يلي: -3 ، -2 ، -1 ، 1 ، 2 ، 3 ونسمي β العدد المحصل عليه في الرمية الأولى، δ العدد المحصل عليه في الرمية الثانية.
- احسب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) نقطة ترتيبها 1 .
- احسب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) نقطة فاصلتها 0 .

احسب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) ينتمي إلى المنصف الأول.

53 ليكن مكعب طول حرفه $3cm$ ملون بالأزرق.
نقسمه موازيا للوحدة إلى 27 مكعبا طول حرفه $1cm$



نضع المكعبات الــ27 في كيس و نسحب عشوائيا مكعبا.
نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الوجوه الملونة.
1) عين قانون احتمال المتغير X .
2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

54 في امتحان يجيب تلميذ على أسئلة متعددة الاختيارات يشمل ثلاثة أسئلة و لكل سؤال توجد ثلاثة أجوبة مقترحة من بينها يوجد جواب واحد صحيح فقط.
لكل جواب صحيح يحصل التلميذ على $+1$ و لكل جواب خاطئ يحصل على $-\frac{1}{2}$ و في حالة عدم الإجابة يحصل على 0 .التلميذ يجيب عشوائيا على الأسئلة الثلاثة.
1) مثل كل المخارج الممكنة بواسطة مخطط.
ليكن X مجموع النقط المحصل عليها.إذا كان X سالباً يحصل التلميذ على 0.
2) عين القيم الممكنة لــ X
3) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.
4) أعطي الموضوع لــ650 تلميذ يجهلونه و أجابوا كلهم عشوائياً. – ما هو المعدل المنتظر ؟

55 يحتوي كيس على ثلاث كرات مرقمة 0 ، 1 ، 2 نسحب عشوائيا كرة من الكيس. نسجل x رقم الكرة المسحوبة ونعيدها إلى الكيس ، ثم نسحب كرة ثانية ونسجل رقمها y. لكل سحب لكرتين نرفق النقطة $M(x;y)$ من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نسمي (D) القرص الذي مركزه O و نصف قطره $1,7$.
1) عين النقطة المناسبة لمختلف السحبات.
2) احسب احتمال الحوادث التالية:
A : " M تنتمي إلى محور الفواصل "
B : " M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 " .
3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد x^2+y^2.

- عين قانون احتمال X .
- احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.
- أثبت أن احتمال أن تنتمي النقطة M إلى (D) هو $\frac{4}{9}$.

56 يحتوي كيس على n قريصة (n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 7) ، منها 7 قريصات بيضاء والباقي حمراء .
نسحب قريصتين على التوالي (بدون إرجاع).
1) نفرض في هذا السؤال أن: n = 10 .
احسب احتمال الحوادث التالية:
A : " القريصة الأولى بيضاء و الثانية حمراء ".
B : " قريصة بيضاء و قريصة حمراء ".
C : " القريصتان بيضاوان " .
D : " القريصتان من نفس اللون " .
2) في هذا السؤال n عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 8. P_n احتمال أن تكون القريصتان المسحوبتان من لونين مختلفين.
- أثبت أن $P_n=\frac{14(n-7)}{n^2-n}$
- عين العدد الطبيعي n الذي يكون من أجله لـ P_n قيمة حدية عظمى ؟ عين قيمة P_n المناسبة.

57 زهرة نرد مزيفة وجوهها مرقمة من 1 إلى 6 .نسمي p_i احتمال الحصول على الوجه الذي يحمل الرقم i.
يعطى: $p_1=p_5$ ، $p_3=2p_1$ ، $p_5=2p_6$ ، $p_2=0{,}15$ و $p_4=2p_3$.
نرمي الزهرة مرة واحدة و نهتم بالرقم الذي يظهر على الوجه العلوي.
1) بين أن $p_1=0{,}1$.
- استنتج p_3 ، p_4 ، p_5 ، p_6 .
2) عين احتمال الحوادث التالية:
A : " النتيجة تظهر رقم فردي".
B : " النتيجة تظهر رقماً أصغر أو يساوي3 ".
C : " النتيجة تظهر الرقم 2 أو 5 ".
D : " $A\cap C$ " .
E : " $A\cup C$ " .
F : " $\overline{A}$ "
3) نعرف لعبة كما يلي: اللاعب الذي يرمي النرد يربح $40DA$ إذا ظهر الرقم 4 ، يخسر $10DA$ إذا ظهر رقم فردي و يخسر $100DA$ إذا ظهر الرقم 2 أو الرقم 6 .
X هو المتغير العشوائي الذي يعطي الربح أو الخسارة.
أ- عين القيم التي يأخذها المتغير X .
ب- عين قانون احتمال المتغير X.
جـ- احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X .
د- ما هي قيمة الربح المناسبة للعبة عادلة ؟ (أمل رياضياتي معدوم)

58 نعتبر الجملة (S) للمعادلتين الخطيتين ذات المجهولين x و y : $\begin{cases} x-y=3 \\ ax-by=c \end{cases}$
لتعيين a ، b و c ، نرمي ثلاث مرات زهرة نرد وجوهها مرقمة من 1 إلى 6 .الرقم الظاهر الأول يعطي a ، الثاني يعطي b و الثالث يعطي c.
في كل حالة ، احسب احتمال الحادثة و أعط النتيجة على كل كسر غير قابل للاختزال.
أ) A : " الجملة (S) تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول "
ب) B : " الجملة (S) لا تقبل حلولاً ".
جـ) C : " الجملة (S) تقبل حلاً واحداً ".
د) D : " الجملة (S) تقبل الثنائية $(3;0)$ حلاً لها ".