Corrections de l'examen de traitement du signal (signaux aléatoires) du lundi 25 novembre 2013.

Partie 1 : **quelques questions simples**

Enoncé

1) On suppose que A et B sont deux variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles et de variances $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$. On construit le signal

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

où ω est une constante positive. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire ? Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$.

2) On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_X(f) = 2a$, où a est une constante positive. Le signal $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de $X(t)$ avec un filtre de transmittance

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

Déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance du signal $Y(t)$.

3) On considère un signal aléatoire gaussien stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle, de puissance $E[X^2(t)] = \sigma^2$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t) = \exp[X(t)]$ en fonction de $R_X(\tau)$ et d'une constante multiplicative notée C. Déterminer ensuite cette constante multiplicative.

Indication : on rappelle que si Z est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, alors

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right).$$

4) On considère une suite d'instants aléatoires $\{t_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ constituant un processus de Poisson (homogène) de paramètre λ. On appelle $N(t,\tau)$ le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $[t, t+\tau[$

- Que représente le paramètre λ ?
- Déterminer la probabilité d'avoir $N(t,\tau) = 0$.
- Déterminer la probabilité d'avoir $N(t,\tau)$ pair

Correction

1) (3pts) La moyenne du signal $X(t)$ est

$$E[X(t)] = E[A]\cos(\omega t) + E[B]\sin(\omega t) = 0.$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est définie par

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(t-\tau)] &= E\{[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)][A\cos(\omega(t-\tau)) + B\sin(\omega(t-\tau))]\} \\
&= E\left[A^2\right]\cos(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + E[AB]\cos(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)] \\
&\quad + E[AB]\sin(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + E\left[B^2\right]\sin(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)].
\end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires A et B sont indépendantes et de moyennes nulles, on a

$$E[AB] = E[A]\,E[B] = 0.$$

De plus, $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$, d'où

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \sigma^2 \{\cos(\omega t)\cos[\omega(t-\tau)] + \sin(\omega t)\sin[\omega(t-\tau)]\} \\ &= \sigma^2 \cos(\omega\tau) \\ &= R_X(\tau). \end{aligned}$$

Puisque la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ sont indépendantes du temps, le signal $X(t)$ est stationnaire. Sa fonction d'autocorrélation a été déterminée ci-dessus. La densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ est

$$\begin{aligned} s_X(f) &= \mathrm{TF}[R_X(\tau)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[\delta\left(f - \frac{\omega}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\omega}{2\pi}\right)\right]. \end{aligned}$$

2) (2pts) D'après la relation de Wiener-Lee, la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ est

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f)\,|H(f)|^2 \\ &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ est donc

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \mathrm{TF}^{-1}[s_Y(f)] \\ &= e^{-a|\tau|} \text{ (voir tables)} \end{aligned}$$

et par suite la puissance de $Y(t)$ est

$$E\left[Y^2(t)\right] = R_Y(0) = 1.$$

3) (3 pts) En utilisant le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}\frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right] \\ &= E\left[e^{X(t)}e^{X(t-\tau)}\right] \\ &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= R_Y(\tau). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$$

soit

$$\ln[|R_Y(\tau)|] = R_X(\tau) + \text{constante}$$

et en conséquence

$$R_Y(\tau) = C\exp[R_X(\tau)].$$

Pour déterminer la constante multiplicative C, il suffit comme d'habitude de faire $\tau = 0$ dans la relation ci-dessus. On a alors

$$C = \frac{R_Y(0)}{\exp\left[R_X(0)\right]} = \frac{R_Y(0)}{\exp\left(\sigma^2\right)}.$$

Mais

$$R_Y(0) = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[e^{2X(t)}\right].$$

En utilisant le rappel, puisque $X(t)$ est un processus aléatoire gaussien, on en déduit

$$R_Y(0) = \exp\left(2\sigma^2\right).$$

D'où

$$C = \exp\left(\sigma^2\right).$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est donc

$$R_Y(\tau) = \exp\left[\sigma^2 + R_X(\tau)\right].$$

4) (2pts) Ces trois questions ont été traitées en cours

- λ est le nombre moyen d'instants dans un intervalle de largeur $\tau = 1$ puisque

$$E\left[N(t,\tau)\right] = \lambda\left|\tau\right| \Longrightarrow \lambda = E\left[N(t,\tau=1)\right]$$

- Puisque $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$, on a

$$P\left[N(t,\tau)=0\right] = \frac{\left(\lambda\left|\tau\right|\right)^0}{0!}\exp\left(-\lambda\left|\tau\right|\right) = \exp\left(-\lambda\left|\tau\right|\right)$$

- Puisque $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$, on a

$$\begin{aligned}
P\left[N(t,\tau) \text{ pair}\right] &= P\left[N(t,\tau)=0 \text{ ou } N(t,\tau)=2 \text{ ou } N(t,\tau)=4 \text{ ou } ...\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left[N(t,\tau)=2k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda\left|\tau\right|\right]^{2k}}{(2k)!}\exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right] \\
&= \exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]\operatorname{ch}\left(-\lambda\left|\tau\right|\right) \\
&= \exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]\frac{\exp\left[-\lambda\left|\tau\right|\right]+\exp\left[\lambda\left|\tau\right|\right]}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\exp\left(-2\lambda\left|\tau\right|\right)\right].
\end{aligned}$$

Exercice 2 : **Fonction d'ambiguité**

Enoncé

On considère un signal déterministe à énergie finie noté $s(t)$ représentant un signal émis par un radar. Ce signal intercepte une cible de vitesse v_0 située à la distance R_0 de la source et est réflèchi en direction du radar. Le signal reçu par le radar s'écrit

$$x(t) = y(t - t_a) + n(t)$$

avec

$$y(t) = s(t) \exp\left[j2\pi \left(f_0 + f_a\right) t\right]$$

où $t_a = 2R_0/c$ (c est la vitesse de l'onde radar), $v_0 = \pi\lambda f_a$ (λ est la longueur d'onde du signal radar), f_0 est la fréquence porteuse et $n(t)$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de variance σ^2. L'objectif de ce problème est d'étudier une méthode permettant d'estimer R_0 et v_0 à partir du signal reçu $x(t)$.

1) (3pts) A quelle classe de signaux appartient le signal $y(t)$? Déterminer la fonction d'autocorrélation de ce signal en fonction de f_0, f_a et $R_s(\tau)$, puis sa densité spectrale en fonction de f_0, f_a et $S_s(f)$.

2) On corrèle le signal reçu $x(t)$ avec une version décalée en temps et en fréquence du signal $s(t)$ en formant

$$R\left(t_h, f_h\right) = \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*\left(t - t_h\right) \exp\left[-j2\pi \left(f_0 + f_h\right)\left(t - t_h\right)\right] dt$$

On appelle fonction d'ambiguité la transformée

$$\Lambda\left(\tau, \nu\right) = \left|E\left[R\left(t_h, f_h\right)\right]\right|$$

Montrer que FA s'écrit

$$\Lambda\left(\tau, \nu\right) = \left|\int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u - \tau) \exp\left(-j2\pi\nu u\right) du\right| \tag{1}$$

avec $\tau = t_h - t_a$ et $f = f_h - f_a$. Puisque la fonction d'ambiguité ne dépend que de τ et de f, on la notera dans la suite FA$= \Lambda\left(\tau, f\right)$.

3) Déterminer $\Lambda\left(\tau, \nu\right)$ lorsque $s(t)$ est un pulse défini par

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et tracer $\Lambda\left(0, \nu\right)$ et $\Lambda\left(\tau, 0\right)$. Montrer que $\Lambda\left(\tau, \nu\right)$ admet son maximum en $\tau = 0$ et $\nu = 0$ et en déduire une méthode permettant d'estimer R_0 et ν_0 à partir de la fonction d'ambiguité.

Réponses

1) (3pts) Puisque $s(t)$ est un signal à énergie finie, on a

$$E = \int_{\mathbb{R}} \left|s(t)\right|^2 dt < \infty.$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}} \left|y(t)\right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \left|s(t)\right|^2 dt = E.$$

Le signal $y(t)$ est donc aussi à énergie finie. La fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(t)y^*(t-\tau)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t)\exp\left[j2\pi\left(f_0+f_a\right)t\right]s^*(t-\tau)\exp\left[-j2\pi\left(f_0+f_a\right)(t-\tau)\right]dt \\ &= \exp\left[j2\pi\left(f_0+f_a\right)\tau\right]\int_{\mathbb{R}} s(t)s^*(t-\tau)dt \\ &= \exp\left[j2\pi\left(f_0+f_a\right)\tau\right]R_s(\tau). \end{aligned}$$

La densité spectrale d'énergie de $y(t)$ est donc

$$\begin{aligned} s_y(f) &= \mathrm{TF}\left[R_y(\tau)\right] \\ &= \delta\left(f-(f_0+f_a)\right)*s_s(f) \\ &= s_s(f-(f_0+f_a)). \end{aligned}$$

2) (2pts) Comme la réplique $y(t-t_h)$ est un signal déterministe, on a

$$\begin{aligned} E\left[R\left(t_h,f_h\right)\right] &= E\left[\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*\left(t-t_h\right)\exp\left[-j2\pi\left(f_0+f_h\right)\left(t-t_h\right)\right]dt\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} E\left[x(t)\right]y^*\left(t-t_h\right)\exp\left[-j2\pi\left(f_0+f_h\right)\left(t-t_h\right)\right]dt. \end{aligned}$$

Comme le bruit $n(t)$ est blanc, il est de moyenne nulle d'où

$$\begin{aligned} E\left[x(t)\right] &= y(t-t_a) \\ &= s(t-t_a)\exp\left[j2\pi\left(f_0+f_a\right)\left(t-t_a\right)\right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E\left[R\left(t_h,f_h\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}} s(t-t_a)\exp\left[j2\pi\left(f_0+f_a\right)\left(t-t_a\right)\right]s^*(t-t_h)\exp\left[-j2\pi\left(f_0+f_h\right)\left(t-t_h\right)\right]dt \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} s(t-t_a)s^*(t-t_h)\exp\left[-j2\pi\left(f_h-f_a\right)t\right]dt\right]\exp\left[j2\pi\left(f_0+f_h\right)t_h-j2\pi\left(f_0+f_a\right)t_a\right)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda\left(\tau,\nu\right) &= \left|E\left[R\left(t_h,f_h\right)\right]\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} s(t-t_a)s^*(t-t_h)\exp\left[-j2\pi\left(f_h-f_a\right)t\right]dt\right| \\ &= \left|\left[\int_{\mathbb{R}} s(u)s^*(u+t_a-t_h)\exp\left[-j2\pi\left(f_h-f_a\right)u\right]du\right]\exp\left[-j2\pi\left(f_h-f_a\right)t_a\right]\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} s(u)s^*(u-\tau)\exp\left[-j2\pi\nu u\right]du\right| \end{aligned}$$

puisque $\nu = f_h - f_a$.

3) (5 pts) Lorsque $s(t)$ est un pulse défini par

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u-\tau) \exp[-j2\pi\nu u]\, du = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(u-\tau) \exp[-j2\pi\nu u]\, du.$$

Différents cas se présentent selon la valeur de τ. Le pulse $s^*(u-\tau)$ a pour support $\left]\tau - \frac{T}{2}, \tau + \frac{T}{2}\right[$ donc lorsque

$$\Lambda(\tau,\nu) = \begin{cases} 0 \text{ si } \tau + \frac{T}{2} < \frac{-T}{2} \text{ ou } \tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\tau+T/2} \exp[-j2\pi\nu u]\, du \text{ si } \tau \in [-T, 0] \\ \frac{1}{T} \int_{\tau-T/2}^{T/2} \exp[-j2\pi\nu u]\, du \text{ si } \tau \in [0, T] \end{cases}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir le résultat suivant

$$\Lambda(\tau,\nu) = \begin{cases} 0 \text{ si } \tau \notin [-T, T] \\ \frac{T+\tau}{T} \sin c\left[\pi\nu(T+\tau)\right] \text{ si } \tau \in [-T, 0] \\ \frac{T-\tau}{T} \sin c\left[\pi\nu(T-\tau)\right] \text{ si } \tau \in [0, T] \end{cases}$$

ou sous forme condensée

$$\Lambda(\tau,\nu) = \frac{T - |\tau|}{T} \sin c\left[\pi\nu(T - |\tau|)\right] I_{[-T,T]}(\tau)$$

où $I_{[-T,T]}(\tau)$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $[-T, T]$. La courbe représentative de la fonction

$$\tau \longmapsto \Lambda(\tau, 0) = \frac{T - |\tau|}{T} I_{[-T,T]}(\tau)$$

est un triangle d'amplitude 1 en $\tau = 0$ et s'annulant en $\tau = \pm T$. La courbe représentative de la fonction

$$\nu \longmapsto \Lambda(0,\nu) = \sin c\left[\pi\nu T\right]$$

est un sinus cardinal d'amplitude 1 en $\nu = 0$ et dont les premiers zéros sont en $\nu = \pm\frac{1}{T}$. Quelle que soit la valeur de τ fixée, la fonction

$$\sin c\left[\pi\nu(T - |\tau|)\right]$$

admet son maximum en $\nu = 0$. De plus pour $\nu = 0$, la fonction est maximale en $\tau = 0$. On en déduit que $\Lambda(\tau,\nu)$ admet son maximum en $\tau = 0$ et $\nu = 0$. Pour estimer R_0 et ν_0, il suffit de chercher le maximum de la fonction d'ambiguité en évaluant $R(t_h, f_h)$ pour différentes valeurs de t_h et f_h. Ce maximum est obtenu pour

$$\begin{aligned} \tau &= 0 \Longleftrightarrow t_h = t_a = 2R_0/c \Longleftrightarrow R_0 = \frac{t_h c}{2} \\ \nu &= 0 \Longleftrightarrow f_h = f_a = \frac{v_0}{\pi\lambda} \Longleftrightarrow v_0 = \pi\lambda f_h \end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer R_0 et ν_0.