Corrigé type : Matière SA et P.S Master I STN

Questions de cours 16

1) La loi de probabilité gaussienne est caractérisée par sa moyenne m_x et son écart type σ_x (0,5) : $N(m_x, \sigma_x)$, cette loi est donnée par

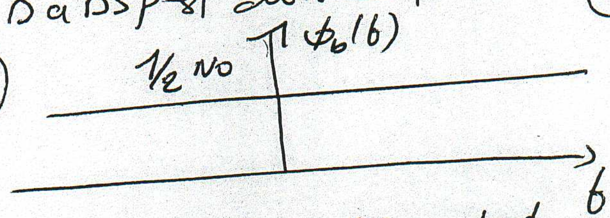
$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (1)$$

2) Un P.S est dit ergodique si ces caractéristiques (moyennes) statistiques sont identiques aux moyennes temporelles (1)

3) Une séquence est dite i.i.d indépendante identiquement distribuée si et ssi $\forall$ ces réalisations aux instants $t_1 \dots t_n$ les v.a $x(t_1) \dots x(t_n)$ ont la même loi de probabilités et elles sont indépendantes (1,5)

4) Un bruit blanc est un P.S SSL dont la DSP est cste pour toutes valeurs de la fréquence f, sa DSP est donnée par : (1)

$$\phi_b(f) = \frac{1}{2} N_0 \quad , |f| < \infty \quad (0,5)$$



Exercice N° 2 : 16

$x(t)$ et $y(t)$ 2 P.S indépendants,

- $Z(t) = x(t) + y(t)$

1) $x(t)$ est SSL ?

$x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \alpha)$, α uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \alpha \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (0,25)$$

- $m_x = E[x(t)] = E[\sin(2\pi f_0 t + \alpha)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_0 t + \alpha)\, d\alpha = 0$ (0,25) (0,25)

- $\sigma_x^2 = E[x(t)^2] - m_x^2 = E[x(t)^2]$ (0,25)

$= E[\sin(2\pi f_0 t + \alpha)^2] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2(2\pi f_0 t + \alpha))\,d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cancel{\cos 2(2\pi f_0 t + \alpha)}\,d\alpha$ (0,25) (0,25)

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} = E[x(t)^2]$ (0,25)

- $R_x(\tau) = E[x(t)\,x(t+\tau)] = E[\sin(2\pi f_0 t + \alpha)\sin(2\pi f_0 (t+\tau) + \alpha)]$ (0,25)

$= \frac{1}{2}E[\cos 2\pi f_0 \tau] - E[\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\alpha)]$ (0,25)

$= \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 \tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cancel{\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\alpha)}\,d\alpha$ (0,25)

$R_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 \tau$ (0,25)

Exo N° 2 (suite)

$m_x = 0 = E[x(t)]$
$\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$
$R_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 \tau$

indépendants du temps donc le processus $x(t)$ est un processus SSL ~~0,25~~ (1/2)

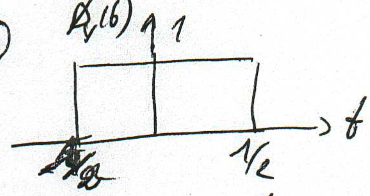
2) a) m_z ? $m_z = E[z(t)] = E[x(t)] + E[y(t)]$ (0,25)

par hypothèse $m_y = 0$ donc $m_z = E[x(t)] = 0$ (0,25)

b) $\sigma_z^2 = E[z(t)^2] - \cancel{m_z^2}^{\,0} = E[(x(t)+y(t))^2] = E[x(t)^2] + E[y(t)^2] + 2E[x(t)$

$= E[x(t)^2] + E[y(t)^2] + 2E[x(t)]\cancel{E[y(t)]}^{\,0}$ (0,25)

$= \sigma_x^2 + E[y(t)^2] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ (0,25)



$E[y(t)^2] = \sigma_y^2 = R_y(0) = ?$ (0,25)

c) $R_y(\tau) = F^{-1}\{\phi_y(f)\}$ (0,25) $= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_y(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$ (0,25) $= \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi f\tau}\, df = 2\int_0^{1/2} \cos 2\pi f\tau\, df$

$R_y(\tau) = \frac{2}{2\pi\tau} \sin 2\pi f\tau \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{\pi\tau} \sin \pi\tau \frac{1}{2} = \text{sinc}\, \pi\tau$ (0,25)

$\sigma_y^2 = R_y(0) = \text{sinc}\, \pi(0) = 1$ (0,25)

$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ (0,25)

3: On a $m_z = 0$, $\sigma_z^2 = 3/2$

$R_z(\tau) = E[z(t)z(t+\tau)] = E[(x(t)+y(t))(x(t+\tau)+y(t+\tau))]$

$= E[x(t)x(t+\tau)] + \cancel{E[x(t)y(t+\tau)]}^{\,0} + \cancel{E[y(t)x(t+\tau)]} + E[y(t)y(t+\tau)]$

$= R_x(\tau) + R_y(\tau)$ (0,25)

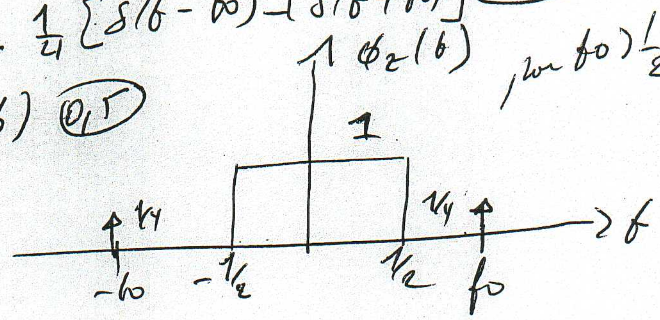
$R_z(\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0\tau + \text{sinc}\, \pi\tau$ (0,25)

m_z, σ_z^2 et $R_z(\tau)$ sont indépendants de t on peut donc confirmer que $z(t)$ est un processus stationnaire au sens large (0,5)

4°) $\phi_z(f) = F\{R_z(\tau)\} = \phi_x(f) + \phi_y(f)$ (0,25)

$\phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = F\{\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 \tau\} = \frac{1}{4}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$ (0,5)

$\phi_z(f) = \frac{1}{4}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] + \text{rect}(f)$ (0,5)



1/10

Exo N° 1/6

X v.a de loi $f_X(x) = k e^{-ax} u(x)$ $u(x)$ echelon unitaire

1) k ? Pour déterminer k il faut que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ 0,5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-ax} u(x)\,dx = \int_0^{+\infty} k e^{-ax}\,dx \quad 0,25 \qquad u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad 0,5$$

$$\int_0^{+\infty} k e^{-ax}\,dx = k\left[-\frac{1}{a} e^{-ax}\right]_0^{+\infty} \; 0,25 \; = k\left[\frac{1}{a}\right] = 1 \Rightarrow k = a \quad 0,25$$

2°) m_x ? $\overset{0,25}{=} E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\,a e^{-ax}\,dx = a \int_0^{+\infty} x e^{-ax}\,dx$ 0,25

$u = x \quad du = dx \quad , dv = e^{-ax}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{a} e^{-ax}$

$$m_x = a\left[-\frac{x}{a} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{a}\int e^{-ax}dx\right] \; 0,25 \; = a\left\{\cancel{-\frac{x}{a} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}} + \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a} e^{-ax}\right]_0^{\infty}\right. \quad 0,25$$

$$= +a\left[\frac{1}{a^2}\right] = \frac{1}{a} = m_x \quad 0,25$$

3)

$\sigma_x^2 = E[x^2] - m_x^2$ 0,25

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx \overset{0,25}{=} \int_0^{\infty} x^2 a e^{-ax}\,dx = a\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx \quad 0,25$$

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$

$v = -\frac{1}{a} e^{-ax} \quad dv = e^{-ax}dx$

$$E[x^2] = a\left[-\frac{x^2}{a} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{a} e^{-ax}dx\right] \quad 0,5$$

$$= a\left[\cancel{-\frac{x^2}{a} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}} + \frac{2}{a}\underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-ax}dx}\right] \quad 0,5$$

$$= a\left[0 + \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a^2}\right] = \frac{2}{a^2} \quad 0,25$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - m_x^2$$

$$= \frac{2}{a^2} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{2-1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \quad 0,25$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{a^2}$$

4°) $$P\,x \in [1,2] = \int_1^2 a e^{-ax}\,dx \; 0,25 \; = a\int_1^2 e^{-ax}\,dx = a\left(-\frac{1}{a} e^{-ax}\right|_1^2 \quad 0,25$$

$$= -\left(e^{-a2} - e^{-a}\right) = -e^{-2a} + e^{-a} = e^{-a}\left(e^{2} - 1\right) \quad 0,25$$

3