Exercices de Phénomènes de Transfert de Chaleur

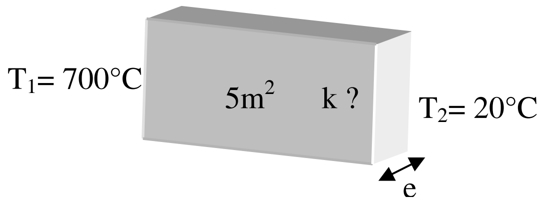
Laboratoire de Technologie des Poudres

Prof H.Hofmann

Corrigés (1- 21, Chaleur)

Exercice 1

$$\begin{cases} q = 300\ kW/m^2 \\ e_{max} = 50cm \\ k = const. \\ k, e = ? \end{cases}$$



avec

$$\boxed{\frac{P}{S} = q = \frac{k}{e}(T_1 - T_2)} \quad \text{et} \quad \boxed{T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{e}x + T_1}$$

équ. 3.14 et 3.15

$$q = 300 \cdot 10^3 = \frac{k}{e} \cdot 680$$

$$\frac{k}{e} = 441,2\left[\frac{W}{m^2 °C}\right]$$

$$k_{max} = 441,2 \cdot 0,5 = 220\left[W/m°C\right]$$

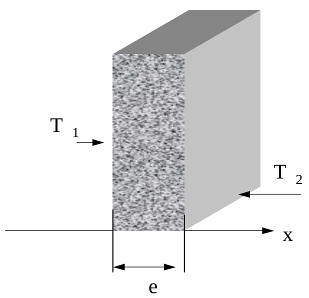
On cherche donc un matériau ayant une conductivité thermique $k \leq 220$ [W/mK]

Cu, Al, Zn pas possible (voir Fig 7.9)

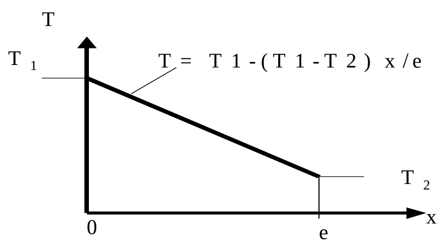
Acier doux $k_{(350°C)} = 33\left[W/m°C\right]$; $e = 7,5cm$

Acier inox. $k_{(350°C)} = 20\left[W/m°C\right]$; $e = 4,5cm$

Magnésie $k_{(350°C)} \approx 3\left[W/m°C\right]$; $e = 0,68cm$



Problème

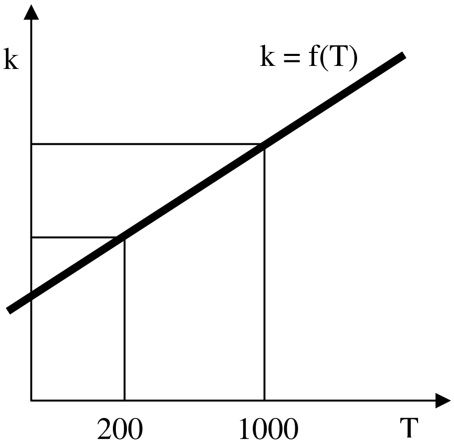


Solution

Exercice 2

$$k_{moyen} = \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT \text{ (équ.3.34)}$$

$$T(x) = T_1 - \frac{[k_m]_{T_1}^{T_2}}{[k_m]_{T_1}^{T_x}} \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{e} \cdot x$$



avec $k(T) = k_0 + k_1 \cdot T$

$$k_m = \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2}(k_0 + k_1 T)dT$$

$$k_m = \frac{1}{T_2 - T_1}\left[k_0 T + \frac{k_1}{2}T^2\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$k_m = \frac{1}{T_2 - T_1}\left[k_0 T_2 + \frac{k_1}{2}T_2^2 - k_0 T_1 - \frac{k_1}{2}T_1^2\right]$$

$$k_m = \frac{1}{T_2 - T_1}\left[k_0(T_2 - T_1) + \frac{k_1}{2}(T_2^2 - T_1^2)\right]$$

$$k_m = k_0 + \frac{k_1}{2}(T_2 + T_1)$$

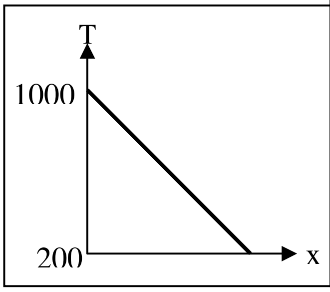
$$k_m\Big|_{1000}^{200} = 0,55 + \frac{0,025}{2}\big((1000 - 200) + (200 - 200)\big) = 10,55 \ [\frac{W}{m°C}]$$

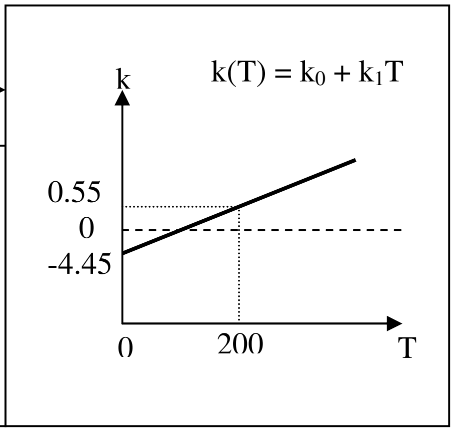
$$k_m\Big|_{1000}^{T(x)} = 0,55 + 0,0125\big((1000 - 200) + (T(x) - 200)\big)$$

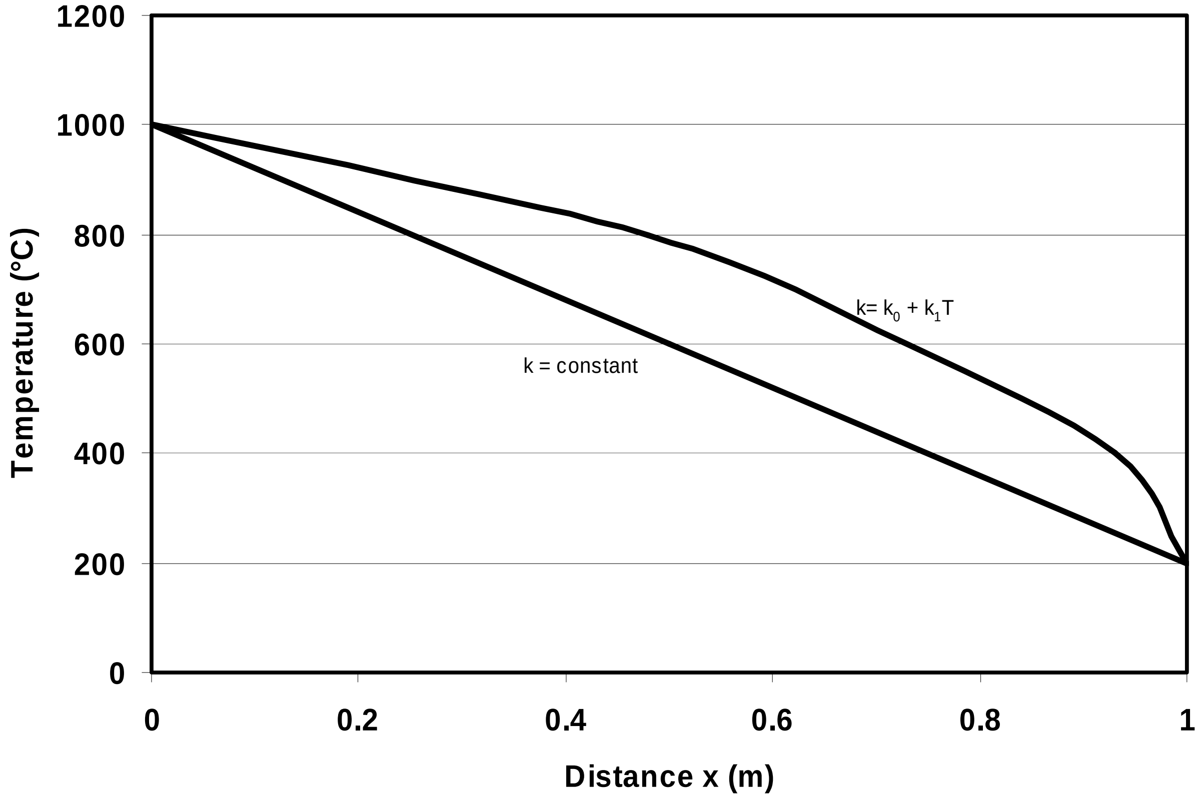
$$T(x) = 1000 - \frac{10,55}{0,55 + 0,0125\left[(1000 - 200) + (T(x) - 200)\right]} \frac{(1000 - 200)}{1} \cdot x =$$

$$= 1000 - \frac{10,55 \cdot 800}{0,55 + 0,0125\left[(T(x) - 200) + (800)\right]} \cdot x$$

autre interprétation (plus « mathématique ») :
de k(T) = $k_0 + k_1$T on tire le « vrai » k_0 (le « b » de y = ax + b)
$k_0 = k(T) - k_1T = 0.55 - 0.025x200 = -4.45$
pour se ramener à un graphique « simple »
il faut ramener l'origine à zéro :
on a donc :
k(T) = -4.45+0.025 T et on trouve pour
k_m= -4.45+(0.025/2)1200=10.55
(avant on avait k=k_0+k_1(T-200))







x (m)	T (°C)
0	1000
0,48	800
0,73	600
0,92	400
1	200

Exercice 3

5,0% du poids céramique ≡ 6,4 % vol.

$$\left.\begin{array}{l} 6g = 1cm^3 \longrightarrow 5g = 0.833cm^3 \\ 7.8g = 1cm^3 \longrightarrow 95g = 12.18cm^3 \end{array}\right\} V_d = \frac{0.833}{12.18+0.833} = 0.0640$$

a) k composite (équation 7.33)

$$k_{comp} = k_c \left[\frac{1 + 2V_d \left(\frac{1 - k_c / k_d}{2k_c / k_d + 1} \right)}{1 - V_d \left(\frac{1 - k_c / k_d}{k_c / k_d + 1} \right)} \right]$$

Avec les indices suivants :

$$\begin{cases} c = \text{phase continue} \\ d = \text{phase dispersée} \\ V_i = \text{volume de la phase i} \end{cases}$$

$$k_{comp} = k_{acier} \cdot 0,899 = 16,91 \frac{W}{m°C}$$

b) $P = S \cdot \frac{k}{e} \cdot (T_1 - T_2)$

$$P = 2 \cdot \frac{16,91}{0,1}(500 - 300) = 67,6 \ kW$$

$$q = \frac{P}{S} = 33,8 \ \frac{kW}{m^2}$$

c) équ. 7.34

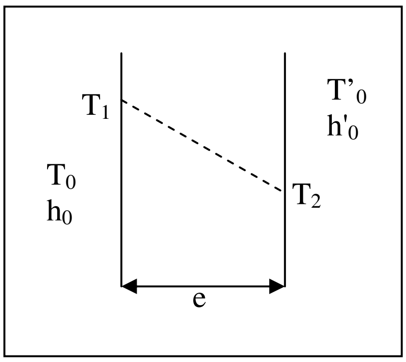
$$k_{eff} = k_c (1 - P) = 18,8 \cdot (1 - 0,064) = 17,6 \frac{W}{m°C}$$

$$P = q \cdot S = S \frac{k}{e}(T_0 - T_1)$$

$$P = 2 \cdot \frac{17,6}{0,1}(200) = 70,4kW$$

Exercice 4

On calcule pour le cas régime stationnaire:



$$q = \frac{T_0 - T_1}{1/h_0} = \frac{T_1 - T_2}{e/k} = \frac{T_2 - T'_0}{1/h'_0} = cste$$

$$\text{soit: } q = \frac{T_0 - T'_0}{1/h_0 + e/k + 1/h'_0} = \frac{500 - 20}{1/20 + 0,1/1 + 1/5} = 1371 \frac{W}{m^2}$$

De plus, $\frac{500 - T_1}{1/20} = 1371$ d'où $T_1 = 431°C$

et $\frac{T_2 - 20}{1/5} = 1371$ d'où $T_2 = 294°C$

Si maintenant e = 20 cm:

$$q' = \frac{500\text{-}20}{\frac{1}{20} + \frac{0,2}{1} + \frac{1}{5}} = 1066 \frac{W}{m^2}$$

$T_1' = 446°C$ et $T_2' = 233°C$

Ainsi q a diminué de 23% (et non de moitié), T_1 a augmenté et T_2 diminué.

Ces résultats sont loin d'être intuitifs.

Exercice 5

a)Briques réfractaires $\begin{cases} e_1 = 10cm \\ k_1 = 1 \dfrac{W}{m \cdot °C} \end{cases}$ Isolant $\begin{cases} e_2 = 2cm \\ k_2 = 0,1 \dfrac{W}{m.°C} \\ T_1 = 1100°C, T_3 = 20°C \end{cases}$

On a donc :

$$\text{Ici, q} = \frac{1100\text{-}20}{\frac{0,1}{1} + \frac{0,02}{0,1}} = cste = 3600 \frac{W}{m^2}$$

$$\text{et donc q} = 3600 = \frac{1100 - T_2}{\frac{0,1}{1}} \text{ d'où } T_2 = 740°C$$

b) Briques réfractaire : $\begin{cases} e_1 = 7cm \\ k_1 = 1W/m°C \end{cases}$ Isolant réfractaire : $\begin{cases} e_2 = 3cm \\ k_2 = 0,5 \dfrac{W}{m.°C} \end{cases}$

Isolant : $\begin{cases} e_3 = 2cm \\ k_3 = 0,1 \dfrac{W}{m.°C} \end{cases}$

Avec à nouveau :

$T_1 = 1100°C, T_4 = 20°C$

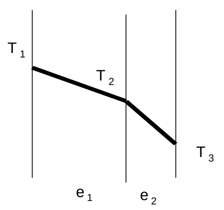
Nous trouvons :

$$q' = \frac{1100 - 20}{\frac{0,07}{1} + \frac{0,03}{0,5} + \frac{0,02}{0,1}} = 3273 \frac{W}{m^2}$$

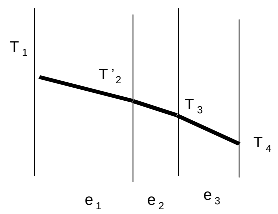
$q' \approx 0,91q$

$$\text{et } 3273 = \frac{1100 - T'_2}{\frac{0,07}{1}} \text{ d'où } T'_2 = 870°C,$$

a)



b)



$$\text{de plus } 3273 = \frac{T'_2 - T'_3}{\frac{0,03}{0,5}}, \text{ donc } T'_3 = 674°C \ \left(T'_3 < T_2\right).$$

On se rend compte qu'il convient de se méfier des solutions intuitives ou "évidentes" et qu'il vaut mieux les étayer par un calcul, même approximatif.

<u>Exercice 6</u> (mur avec production de chaleur)

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}_p}{k}$ en intégrant deux fois on trouve : $T(x) = \frac{-\dot{q}_p}{2k}x^2 + Ax + B$

avec la 1$^{\text{ère}}$C.L on a : $T(0) = T_0 \Rightarrow B = T_0$ on a donc $T(x) = \frac{-\dot{q}_p}{2k}x^2 + Ax + T_0$

avec $q = -k\frac{dT}{dx} = \dot{q}_p x - Ak \;\Rightarrow\; q_1 = \dot{q}_p e - Ak$ et donc : $A = \frac{\dot{q}_p e - q_1}{k}$

$T(e) = \frac{-\dot{q}_p e^2}{2k} + \frac{\dot{q}_p e^2}{k} - \frac{q_1 e}{k} + T_0$ on trouve l'équation cherchée

$$T(e) = \frac{\dot{q}_p e^2}{2k} - \frac{q_1 e}{k} + T_0$$

<u>Exercice 7</u>

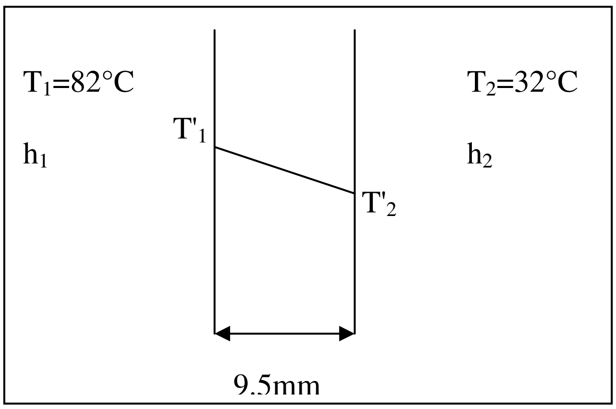
$$\begin{cases} e = 0,0095m \\ h_1 = 2340 kcal/hm^2°C \\ h_2 = 6100 kcal/hm^2°C \\ T_1 = 82°C \\ T_2 = 32°C \\ k = 344,5 kcal/hm°C \\ q = \dfrac{T_1 - T_2}{\Sigma \dfrac{e}{\lambda} + \Sigma_{rj} + \Sigma \dfrac{1}{h_k}} \\ \Sigma_{rj} = 0 \end{cases}$$

$$q = \frac{82-32}{\frac{0,0095}{344,5} + \frac{1}{2340} + \frac{1}{6100}} = 80793\,[\frac{kcal}{hm^2}]$$

$q = 93922.5\,[W/m^2]\,(inutile\ ici)$

avec $q = \frac{T_1 - T_1'}{\frac{1}{h_1}}$ ou $\frac{T_2' - T_2}{\frac{1}{h_2}}$

on trouve alors : $T_1' = 47,5°C$ *et* $T_2' = 45,2°C$



Exercice 8

a) Puissance calorifique

$$P = U \cdot I,\ \ U = R \cdot I \Rightarrow P = RI^2 \ \ \textit{et comme } \dot{q}_i \textit{ est la puissance par unité de volume}$$

$$\dot{q}_i = \frac{RI^2}{V}$$

avec $R = \rho_{\mathrm{el}} \dfrac{l}{S},\ V = S \cdot l = \dfrac{\pi}{4} d^2 \cdot l$

$$\dot{q}_i = \frac{\rho_{\mathrm{el}} \cdot l \cdot I^2 \cdot 4}{S \cdot \pi \cdot d^2 \cdot l} = \frac{\rho_{\mathrm{el}} \cdot 4 \cdot I^2 \cdot 4}{\pi \cdot d^2 \cdot \pi \cdot d^2} = \rho_{\mathrm{el}} \frac{16 I^2}{\pi^2 d^4}$$

$$\dot{q}_{Cu} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 500^2}{\pi^2 \cdot 1} \cdot 10^6 \quad \left[\frac{\Omega cm \cdot A^2}{cm^4} = \frac{VA^2}{Acm^3} = \frac{W}{cm^3} \Rightarrow \frac{W}{m^3} \right]$$

$$\dot{q}_{Cu} = 689{,}683\,[kW/m^3]$$

$$\dot{q}_{\mathrm{Graphite}} = \frac{1{,}375 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 500^2}{\pi^2 \cdot 1} \cdot 10^6 = 0{,}547 \cdot 10^9 \ [W/m^3]$$

$\dfrac{\textit{Graphite}}{\textit{Cuivre}} = 793!!$ *c'est pourquoi on utilise le graphite dans les fours (car le dégagement de chaleur par effet joule est très important (mauvais conducteur))*

b)

$$T = -\frac{\dot{q}_i r^2}{4k} + B \qquad \textit{équ.}3.25$$

Condition aux limites : $T = T_2$ si $r = r_2$ $(T_2 = T_{ext}$ *et* $r_2 = R_{ext} = \dfrac{d}{2})$

$$T_2 = \frac{-\dot{q}_i r_2^2}{4k} + B \Rightarrow B = T_2 + \frac{\dot{q}_i r_2^2}{4k}$$

$$T(r) = \frac{-\dot{q}_i r^2}{4k} + T_2 + \frac{\dot{q}_i r_2^2}{4k} = T_2 + \frac{\dot{q}_i}{4k}\left(r_2^2 - r^2\right)$$

$$\Delta T = T(r=0) - T(r_2) = T_2 + \frac{\dot{q}_i}{4k} r_2^2 - T_2$$

$$\Delta T = \frac{\dot{q}_i}{4k} r_2^2$$

$$\Delta T = \frac{\rho_{el}}{k} \cdot \frac{16 I^2 r^2}{4\pi^2 d^4} = \frac{\rho_{el}}{k} \cdot \frac{16 \cdot I^2 \cdot d^2}{4\pi^2 d^4 4} = \frac{\rho_{el}}{k} \cdot \frac{I^2}{\pi^2 d^2}$$

$$\text{Cuivre : } \Delta T = \frac{689683}{4 \cdot 418} \cdot 0{,}005^2 \left[\frac{Wm°Cm^2}{m^3 W} = °C \right] \Rightarrow \Delta T = 0{,}01°C$$

$$\text{Graphite : } \Delta T = \frac{0{,}54710^9 \cdot 0{,}005^2}{4 \cdot 34 \cdot 4{,}18} = 24°C$$

Exercice 9

c. L.

$$\begin{cases} x=0 & T=0 \\ x=L & T=0 \\ y=\infty & T=0 \\ y=0 & T=T_A \sin\frac{\pi x}{L} \\ T(x,y)? \end{cases}$$

Cas général :

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right) y} \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \quad (\acute{e}qu.4.21)$$

avec $T_1 = 0$

$$T(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cdot y} \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x$$

avec c.L y=0 T=f(x)

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x$$

Multiplication des deux côtés par $\sin\frac{m\pi}{L} x$ et intégration entre x=0 et x=L.

$$\int_{x=0}^{x=L} f(x) \cdot \sin\frac{m\pi}{L} x dx = \underbrace{\int_{x=0}^{L} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{m\pi}{L} x \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \, dx}_{\substack{=0 \text{ si } n \neq m \\ = \frac{LA_n}{2} \text{ si } n=m}}$$

Remplacer f(x) par $T_A \sin\frac{\pi x}{L}$

$$\int T_A \sin\frac{\pi x}{L}\cdot\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx = \frac{A_n\cdot L}{2}$$

$$A_n = \frac{2T_A}{L}\int_{x=0}^{x=L}\sin\frac{\pi x}{L}\cdot\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx$$

avec la relation trigonométrique :

$$\int \sin\frac{m\pi}{L}x\cdot\sin\frac{\pi}{L}x dx = \int\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(1-m)\pi x}{L}-\frac{\cos(1+m)\pi x}{L}\right)dx$$

$$A_n = \frac{2T_A}{2L}\int_0^L\left(\cos\frac{(1-n)\pi}{L}x-\cos\frac{(1+n)\pi}{L}x\right)\cdot dx$$

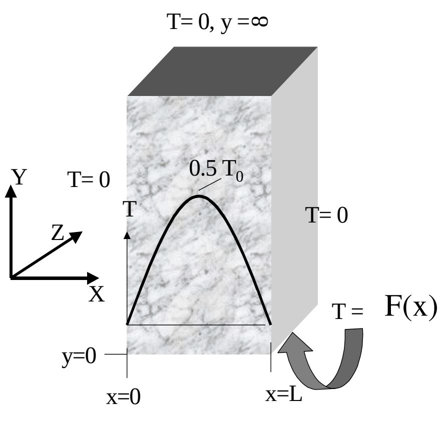
Intégration :

$$A_n = \frac{T_A}{L}\left[\frac{L}{(1-m)\pi}\sin\left(\frac{(1-m)\pi}{L}\cdot x\right)-\frac{L}{(1+m)\pi}\sin\left(\frac{(1+m)\pi}{L}x\right)\right]_0^L$$

$$A_n = \frac{T_A}{\pi}\left[\underbrace{\frac{\sin((1-m)\pi)}{(1-m)}}_{\substack{m=0\Rightarrow 0\\ m=2,\,3,\ldots\Rightarrow 0\\ \mathrm{m}=1\ \Rightarrow \lim\limits_{m\to 1}\frac{\sin(1-m)\pi}{1-m}=\pi}}-\underbrace{\frac{\sin((1+m)\pi)}{(1+m)}}_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots\Rightarrow 0}\right]$$

$$A_1 = \frac{T_A\pi}{\pi} = T_A$$

$$T(x,y) = T_A e^{-\frac{\pi}{L}y}\cdot\sin\frac{\pi}{L}x$$



Exercice 10

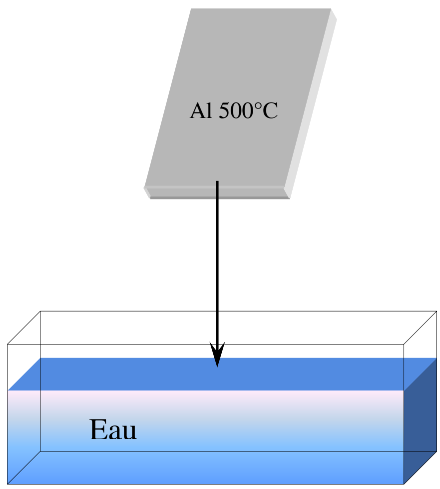
$$On\ calcul\ en\ tout\ premier\ Biot = \frac{hL}{k} = \frac{510 \cdot 0,025}{237} = 0,0054$$

$$\Rightarrow refroidissement\ "Newtonien"\ (car\ Biot \leq 0.1)$$

$$A = 2 \cdot 0,3 \cdot H\ ;\ V = 0,005 \cdot 0,3 \cdot H\quad (note: ici\ on\ néglige\ les\ 4\ bords: 4(0.005 \cdot H))$$

$$avec\ l'équ. 5.4\ et\ avec\ le\ rapport: \frac{A}{V} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot H}{0,005 \cdot 0,3 \cdot H} = \frac{2}{0,005}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{V} = \frac{1}{L}\ \text{avec}\ \frac{e}{2} = L\ (la\ demi\ épaisseur)$$



$$V \cdot \rho \cdot Cp \frac{dT}{dt} = hA\left(T - T_f\right) \qquad avec\ \frac{dT}{dt} = taux\ de\ refroidissement\ [°C/s]$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{V \cdot \rho \cdot Cp}\left(T - T_f\right)$$

a)

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{510 \cdot (315 - 90) \cdot 2}{0,005 \cdot 2702 \cdot 900}\left[\frac{Wm^2 m^3 °Ckg°C}{m^2 °Cm^3 kgJ}\right] = \left[\frac{J°C}{sJ}\right] = \left[\frac{°C}{s}\right]$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{315} = -18,8[°C/s]$$

b)

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{150} = -\frac{2550 \cdot (150 - 90) \cdot 2}{0,005 \cdot 2702 \cdot 900} = -25,1[°C/s]$$

c)

$$\frac{T\text{-}T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(-\frac{hAt}{\rho CpV}\right) = \exp\left(-\frac{h \cdot t \cdot 2}{\rho Cpe}\right) \quad \text{équ. 5.5 avec } e = épaisseur$$

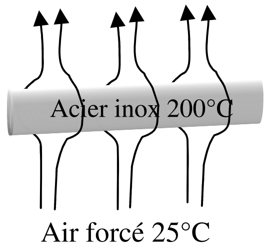
$$t = -\frac{\rho \cdot Cp \cdot e}{2h} \cdot \ln\left(\frac{T - T_f}{T_i - T_f}\right)$$

$$\begin{cases} 1^{\text{ère}}\ \text{étape}:\ t_1 = -\dfrac{2702 \cdot 900 \cdot 0,005}{510 \cdot 2} \cdot \ln\left(\dfrac{260 - 90}{500 - 90}\right) = 10,5\ \text{s} \\ 2^{\text{ème}}\ \text{étape}:\ t_2 = -\dfrac{2702 \cdot 900 \cdot 0,005}{2550 \cdot 2} \cdot \ln\left(\dfrac{120 - 90}{260 - 90}\right) = 4,15\ \text{s} \end{cases}$$

$t_{tot} = t_1 + t_2 \cong 14,6$ s

Exercice 11

$$\begin{cases} t_i = 200°C \\ t_f = 25°C \\ T = 35°C \end{cases}$$



$$B_i = \frac{h \cdot r}{\lambda} = \frac{142 \cdot 0.05}{15.5} = 0,45$$

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \frac{35 - 25}{200 - 25} = \frac{10}{175} = 0,057$$

Avec diagramme 5.3a

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{r^2} \cong 4 \quad \Rightarrow t = \frac{4r^2}{\alpha} = \frac{4 \cdot 0,05^2}{4,5 \cdot 10^{-6}} = 2222.\overline{22} \text{ s}$$

Température superficielle :

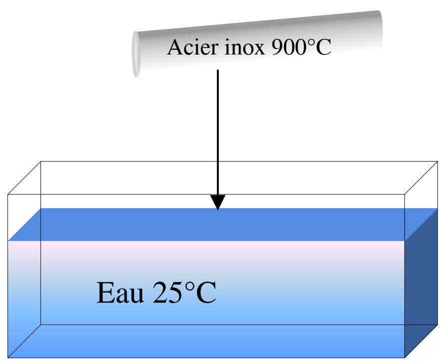
$$\frac{T - 25}{200 - 25} = 0,05$$ (Diagramme 5.3b) [avec $F_0 = 4$, $B_i = 0,45$]

T = 0,05·175 + 25 = 33,75°C

Exercice 12

$$\begin{cases} r = 0,01m \\ T_1 = 900°C \\ T_F = 25°C \\ h_{eau} = 4500W / m^2k^{-1} \\ h_{huile} = 1700W / m^2k^{-1} \end{cases}$$

avec $\alpha = \frac{k}{\rho Cp}$ $\quad$ $\text{Fo} = \frac{kt}{\rho \cdot Cp \cdot r^2}$



$$Bi_{eau} = \frac{h \cdot r}{k} = \frac{4500 \cdot 0,01}{15,5} = 2,9$$

$$Bi_{huile} = \frac{1700 \cdot 0,01}{15,5} = 1,096 \simeq 1.1$$

$$F_0 = \frac{15,5}{7780 \cdot 444 \cdot (0,01)^2} \cdot t = 0,044 \cdot t$$

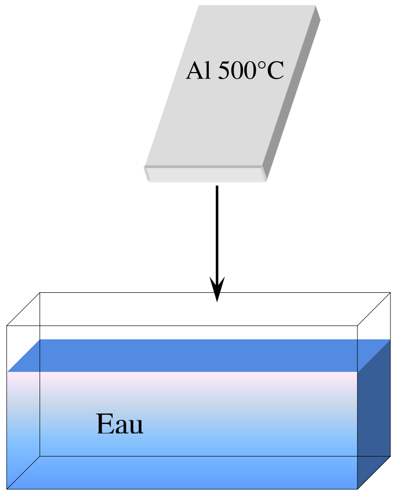
t (s)	F_0
1	0,044
2	0,088
5	0,220

Avec Diagramme 5.3 b et $\theta = \frac{(T - T_f)}{(T_i - T_f)}$

	1 s	2 s	5s
θ_{eau}	0,6	0,4	0,3
T (°C)	550	375	288
θ_{huile}	0,88	0,7	0,6
T °C)	795	638	550

On remarque bien que le refroidissement dans l'eau est bien plus rapide que celui dans l'huile (le coefficient de transfert de chaleur h est donc plus élevé pour l'eau)

Exercice 13



a) équ. 5.19

$$\frac{T\text{-}T_f}{T_i - T_f} = 2\sum_{n=1}^{n=2} \frac{\sin \hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_n + \sin \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n} \cos\left[\hat{\lambda}_n \xi\right] \exp\left[-\hat{\lambda}_n^2 \cdot F_0\right]$$

pour x = 0 $\quad \xi = 0 \Rightarrow \cos\left[\hat{\lambda}_n \xi\right] = 1$

$$B_i = \frac{h \cdot L}{k} = \frac{2550 \cdot 0,025}{237} = 0,268;$$

$$F_0 = \frac{k \cdot t}{\rho C p L^2} = \frac{237 \cdot 10}{2702 \cdot 900 \cdot 0,025^2} = 1,56$$

avec tableau 5.1 (il faut faire une interpolation graphique ou numérique (Excel…))
avec (pour une plaque) L = e/2 (demi épaisseur) (attention d'utiliser les valeurs du tableau en radian)

$\lambda_1 \cdot L = \hat{\lambda}_1 = 0,57$ $\qquad$ $\lambda_2 \cdot L = \hat{\lambda}_2 = 3,28$

$\frac{\sin \hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_1 + \sin \hat{\lambda}_1 \cos \hat{\lambda}_1} = 0,56$ $\qquad$ $\frac{\sin \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_2 + \sin \hat{\lambda}_2 \cos \hat{\lambda}_2} = -0,04$

$$\frac{T-T_f}{T_i-T_f}=2\left[\underbrace{0,56\cdot\exp\left[-\left(0,57^2\right)\cdot 1,56\right]}_{0,337}-\underbrace{0,04\cdot\exp\left(-3,28^2\right)\cdot 1,56}_{2,05\cdot 10^{-9}}\right]$$

$$\frac{T-T_f}{T_i-T_f}=0,674$$

$$T=0,674(500-90)+90=366°C$$

b) méthode graphique
Avec diagramme 5.2a

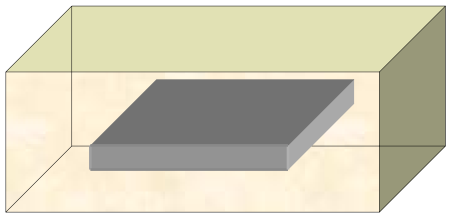
$$\frac{T-T_f}{T_i-T_f}=0,75$$

$$T=0,75\left(500-90\right)+90=397.5°C$$

$$\Delta T\left(\text{calculer-graphique}\right)\simeq 30°C$$

Exercice 14

Equation 6.8



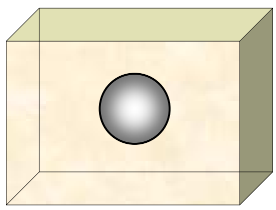
$$t=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho_l\cdot H_f}{T_m-T_0}\right)^2\frac{1}{\rho\cdot k\cdot c_p}\left(\frac{V}{A}\right)^2$$

1) plaque

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\frac{a\cdot b\cdot l}{2ab+2al+2bl}$$

$$t=\frac{\pi}{4}\left(\frac{246\cdot 10^3\cdot 6600}{(1148-20)}\right)^2\cdot\frac{1}{1600\cdot 0,8\cdot 1500}\cdot\underbrace{\left(\frac{0,1}{2,4}\right)^2}_{1.736\cdot 10^{-3}}=1475\ \ \mathrm{s}$$

$$t=24,5\,\mathrm{min}$$



2) sphère

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2}=\frac{r}{3}=\frac{0,05}{3}=1.\overline{6}\cdot 10^{-2}$$

Soit environs 6 fois moins que la plaque (6.25 fois exactement)

$$t=235s\approx 4\,\mathrm{min}$$

On remarque que la différence de temps de solidification pour deux pièces de même épaisseur peut être très différente. Le rapport du volume sur l'air est donc très important (de plus ce terme est au carré !). Ici la différence de volume à aussi son importance car pour un volume égal (sphère de r = ~28cm) il faut 2h 10min de solidification.

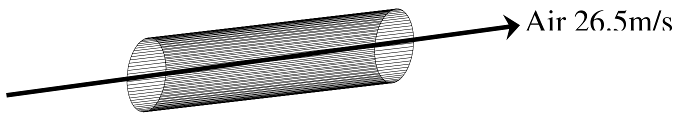
Exercice 15

$$\Pr = \frac{\mu Cp}{k} = \frac{1,9\cdot 10^{-5}\cdot 0,24}{6,2\cdot 10^{-6}} = 0,735\left[\frac{kg\cdot m\cdot s\cdot kcal\cdot m\cdot s\cdot °C}{m^2\cdot s^2\cdot kg\cdot kcal\cdot °C} = -\right] \text{(sans dimension)}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m\cdot d\cdot \rho}{\mu} = \frac{26,5\cdot 0,04\cdot 1,2}{1,9\cdot 10^{-5}} = 66947\left[\frac{m\cdot m\cdot kg\cdot s^2\cdot m^2}{s\cdot m^3\cdot kg\cdot m\cdot s} = -\right] \text{(écoulement turbulent)}$$

$$Nu = 0,023\,\mathrm{Re}^{0,8}\cdot \Pr^{0,4} = 147,5$$

$$Nu = \frac{h\cdot d}{k}$$

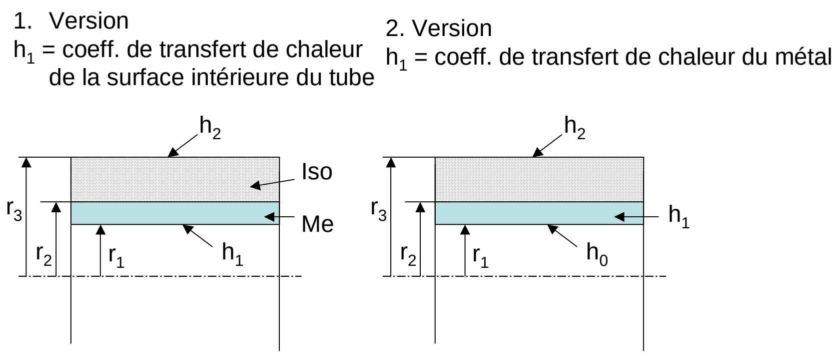


$$\Rightarrow h = 2,286\cdot 10^{-2}\left[\frac{kcal}{m^2 s°C}\right]$$

$$h = 95,68\left[\frac{W}{m^2 °C}\right]$$

Exercice 16

Cet exercice a deux solutions, parce que la définition de h_1 n'est pas assez claire.



Version a) :

$$h_1 \equiv h_{\text{vapeur - métal}}$$

$$h_1(\text{vapeur-solide}) = 9760\frac{kcal}{hm^2 °C} = 11'346\frac{W}{m^2 °C}$$

$$h_2 \text{ solide-air (convection naturelle)} = 11,3\left[\frac{T_p - T_{air}}{2r}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{W}{m^2 °C}\right] \quad (\textit{formule } 8.50)$$

$$k_{iso} = 0,14\frac{kcal}{hm°C} = 0,163\frac{W}{m°C}$$

$$T_{vapeur}\Big|_{3,8bar} = 139°C$$

$$P = \frac{T_{vapeur} - T_{air}}{\Sigma R} \quad \text{(pas de résistance entre les couches))}$$

Cas stationnaire (équ 3.37):

$$P=\frac{T_{Vapeur}-T_{Me(V)}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L}}=\frac{T_{Me(V)}-T_{Me(Iso)}}{\frac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi k_{Me}L}}=\frac{T_{Iso(Me)}-T_{Iso(Air)}}{\frac{\ln\left(r_3/r_2\right)}{2\pi k_{Iso}\cdot L}}=\frac{T_{Iso(Air)}-T_{Air}}{\frac{1}{1,3\left(\frac{T_{Iso}-T_{Air}}{2r_3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot 2\pi r_3 L}}$$

Estimations :

Lorsque h_1 est très grand, la résistance entre la vapeur et le solide et très petite, donc $T_{vapeur} \approx T_{Me(V)}$

Lorsque k_{Me} *est* très grand $T_{Me(V)} \approx T_{Me(Iso)}$; donc le gradient de la température dans le métal est négligable $\Rightarrow T_{Iso(Me)} \approx T_{Vapeur}$ (et la résistance à l'interface métal isolant est aussi négligeable)

$$\begin{cases} T_{Iso(Me)}=139°C \\ T_{Iso(Air)}=T_2 \\ T_{Air}=21°C \end{cases}$$

$$P=\frac{(139-T_2)}{\frac{\ln\frac{0,035}{0,03}}{2\pi\cdot 0,162\cdot 1}}=\frac{(T_2-21)}{\frac{1}{1,3\left(\frac{T_2-21}{0,07}\right)^{1/4}\cdot 2\pi\cdot 0,035\cdot 1}}$$

$$P=\frac{(139-T_2)}{0,1514}=\frac{(T_2-21)}{\frac{1}{0,555(T_2-21)^{1/4}}}$$ et on trouve en tatonnant ou à l'aide d'un graphique

$$T_2=114,5°C$$

$$\boxed{P=161,8\ W/m\ tube}$$

Vérification des estimations:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_{Vapeur-Métal}<0,09°C \\ \Delta T_{Me}\left(k\approx 30\frac{W}{m°C}\right)\approx 0,12°C\end{array}\right\}\text{négligeable!!}$$

Flux de vapeur : $\frac{\pi 0,052}{4}\cdot 3\cdot 3,8\cdot 0,568=0,014kg/s$

$$\Delta T_{Vapeur}=\frac{p}{m\cdot c_p}=5,7°C/m\ tube$$

Version b) :

Solutions pour le cas où h_1 = coeff. de transfert de chaleur du tube

$$h_1 = 9760 \frac{kcal}{hm^2 °C} = 11370 \left(\frac{J}{sm^2 °C} = \frac{W}{m^2 °C} \right)$$

$$k_{Iso} = 0,14 \frac{kcal}{hm^2 °C} = 0,162 \left(\frac{J}{sm^2 °C} = \frac{W}{m^2 °C} \right)$$

$$T_{Vapeur} = 139°C \,(412k)$$

$$h_2 = 1,3 \left[\frac{T_p - T_{air}}{2r} \right]^{1/4} \cdot \left(\frac{W}{m^2 °C} \right)$$ équ. 8.50 (convection naturelle)

$$h_0 = ?$$

Régime turbulent ou laminaire ? donc il faut calculer Re

$$\begin{cases} \mathrm{Re} = \dfrac{\mathrm{u_m} \cdot d \cdot \rho}{\mu} \\ \mathrm{u_m} = 3 \ \ [\mathrm{m/s}] \\ d = 0,052 \, [\mathrm{m}] \\ \rho \approx 1,81 \, [\mathrm{kg/m^3}] \quad \text{(Il faut chercher les valeurs pour vapeur saturée)} \\ \mu \approx 13,4 \cdot 10^{-6} \ \ [\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \times s}}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re} = 21'071 \ \text{ donc turbulent!!}$$

$$\mathrm{h_0} = \frac{Nu \cdot k}{d}$$

$$Nu = 0,026 (\mathrm{Re\,Pr})^{3/4} = 0,026 \cdot (21071 \cdot 1,054)^{3/4}$$ Pr pour vapeur sat. 139°C = 1,054

Nu = 47,3

$$\mathrm{h_0} = \frac{47,3 \cdot 28,2 \cdot 10^{-3}}{0,052} \quad [\frac{W}{m^2 K}]$$ k pour vapeur sat. 139°C = 28,2 10^{-3}

$$h_0 = 25,65 \ \ [\frac{W}{m^2 k}]$$

Pertes?

$$P = \frac{T_{vapeur} - T_{air}}{\Sigma R}$$

$$P = \frac{139 - 21}{\dfrac{1}{25,65 \cdot 2\pi 0,026 \cdot 1} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,03}{0,026}\right)}{2\pi (9760 \cdot 0,004) \cdot 1} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,035}{0,030}\right)}{2\pi \cdot 0,162 \cdot 1} + \dfrac{1}{1,3 \left(\underbrace{T_{iso}}_{\substack{\text{Problèmes} \\ \text{car inconnu}}} - T_{air} \right)^{1/4} 2\pi 0,035}}$$

ΔT dans le métal très petit

$\mathrm{T_{Me(V)}} \approx T_{Me(Iso)} \Rightarrow \cong 139°\mathrm{C}$

Cas stationnaire :

$$\mathrm{P} = \frac{(139\text{-}\mathrm{T_2})}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{0,035}{0,03}\right)}{2\pi\cdot 0,162}} = \frac{(T_2-21)}{\dfrac{1}{1,3\left(\dfrac{T_2-21}{0,07}\right)^{1/4}\cdot 2\pi\cdot 0,035}}$$

$$P = \frac{139-T_2}{0,1514} = \frac{(T_2-21)}{\dfrac{1}{0,555(T_2-21)^{1/4}}}$$

$T_2 \approx 114,5°C$

$P = 161,7 \quad [\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ tube}}]$

Vérification des estimations :

$\Delta T_{vapeur-métal}$

$$161,7 = \frac{139-T_{me}}{\dfrac{1}{25,65\cdot 2\pi\cdot 0,026}} \qquad T_{me} = 100,4°C$$

$T_{me} \neq T_{vapeur}$ Parce que la différence est trop grande on fait une nouvelle estimation:

$\mathrm{T_{Me(V)}} = T_{Me(Iso)} = T_{Isolant(Me)}$

$\Rightarrow$ ΔT dans le métal est négligeable

$$\frac{139\text{-}\mathrm{T_{me}}}{\dfrac{1}{25,65\cdot 2\pi\cdot 0,026}} = \frac{T_{me}-T_{iso}}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{0,035}{0,030}\right)}{2\pi\cdot 0,162}}$$

$$\frac{139-T_{me}}{0,23} = \frac{T_{me}-T_{iso}}{0,154}$$

$$T_{iso} = 1,66T_{me} - 91,5 \qquad T_{me} = \frac{(T_{iso}+91,5)}{1,66}$$

Calcul de la température de la surface d'isolant $\mathrm{T_{iso(Air)}}$:

$$\frac{\dfrac{(\mathrm{T_{iso}}+91,5)}{1,66} - T_{iso}}{\dfrac{\ln\dfrac{0,035}{0,03}}{2\pi\cdot 0,162}} = \frac{T_{iso}-21}{\dfrac{1}{1,3\left[\dfrac{\dfrac{T_{iso}+91,5}{1,66}-21}{2\cdot 0,35}\right]^{1/4}\cdot 2\pi\cdot 0,035}}$$

$\Rightarrow$ (graphique, par interpolation) $T_{iso(Air)} = 42°C$

$$P = \frac{42-21}{\dfrac{1}{1{,}3\left[\dfrac{42-21}{2\cdot 0{,}035}\right]^{1/4}\cdot 2\pi\cdot 0{,}035}} = 25\ W/m\ tube$$

Vérification si ΔT dans le tuyau est négligeable :

$$25 = \frac{\Delta T}{\dfrac{\ln\dfrac{0{,}030}{0{,}026}}{2\pi\cdot 39}}$$

$\Rightarrow \Delta T = 0{,}014°C \Rightarrow$ négligeable

Conclusion

On comprend mieux après cet exercice pourquoi les isolants à l'amiante ont été interdit… ☺

Exercice 17

$$\begin{cases} f(a,\rho,p,\mu) = 0 & \text{avec } a = \text{vitesse du son} \\ a = LT^{-1} & \\ p = ML^{-1}T^{-2} & \left(\dfrac{N}{m^2} = \dfrac{kgm}{s^2m^2} = \dfrac{kg}{s^2m}\right) \\ \rho = ML^{-3} & \\ \mu = ML^{-1}T^{-1} & \left(Pa\cdot s = \dfrac{N\cdot s}{m^2} = \dfrac{kgm\cdot s}{s^2m^2} = \dfrac{kg}{s\cdot m}\right) \end{cases}$$

$a)$ $n = 4$ (grandeur : a, ρ, p, η)

$b)$ $k = 3$ (Dimension : M, L, T)

$c)$ il y a donc $m = 4 - 3 = 1$ paramètre sans dimension

$\pi_1 = \mu^\alpha p^\beta \rho^\gamma a$

$d)$ $M^\alpha L^{-\alpha} T^{-\alpha} M^\beta L^{-\beta} T^{-2\beta} M^\gamma L^{-3\gamma} L^1 T^{-1} \equiv 1$

pour M: $\alpha+\beta+\gamma=0$

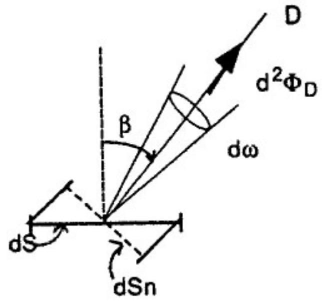
$$\begin{cases} \text{pour L: } -\alpha-\beta-3\gamma+1=0 \\ \text{pour T: } -\alpha-2\beta-1=0 \\ \text{M+L} \quad -2\gamma=-1 \quad \gamma = 1/2 \end{cases}$$

L-T $\quad \beta = -1/2$

$\alpha = 0$

$$\pi_1 = a\sqrt{\frac{\rho}{p}} \Rightarrow a = \pi_1\sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Exercice 18



La fraction de flux émise dans la direction D s'écrit:

$$d^2\Phi_D = \frac{e}{\pi} dS \cdot \cos\beta d\varpi \quad équ.9.5$$

Avec e pour un corps noir : $\sigma \cdot T^4$ équ. 9.12, 9.14 et 9.20

$$\Rightarrow d^2\Phi_D = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} dS \cdot \cos\beta d\varpi$$

Exercice 19

a) émissivité ε_c lié au CO_2

$P_c = 0{,}15 \cdot 2 = 0{,}3 atm$

$P_c L = 0{,}3 \cdot 1{,}5 = 0{,}45\ m \cdot atm$

$T_g = 1773K$

$\Rightarrow$ Diagramme CO_2 (Fig 9.4 a) $\Rightarrow \varepsilon = 0{,}12$

correction : $P_{total} = 2atm \Rightarrow C_{CO_2} = 1{,}1$ (Fig. 9.4 b)

$\varepsilon_{CO_2} = 1{,}1 \cdot 0{,}12 = 0{,}13$

Absorbtion liée au CO_2

$\Phi_R = 1{,}16 \cdot 10^6 W/m^2 = \sigma T_R^4 \Rightarrow T_R = 2127K$

$\Rightarrow T_R > T_g$!!

parce que $T_g < \underbrace{T_R}_{\text{Température de rayonnement}} \Rightarrow (P_cL)^* = P_cL \cdot T_R/T_g$

$\varepsilon' = f(P_c L^*, T_R)$

$\alpha_{CO_2} = \varepsilon' - \left(T_g/T_R\right)^{0{,}65}$

$(P_c L)^* = 0{,}3 \cdot 1{,}5 \cdot \left(2127/1773\right) = 0{,}54$

Diagramme $CO_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = 0{,}1$

Correction identique $C_c = 1{,}1 \Rightarrow \varepsilon' = 0{,}11$

$\alpha_{CO_2} = 0{,}11\left(2127/1773\right)^{0{,}65} = 0{,}124$

Important : $\alpha_{CO_2} \neq \varepsilon_{CO_2}$!! Note : le gaz N_2 est transparent

b) ε et α d'eau

Emission liée à la vapeur d'eau

$P_{eau} = 0{,}20 \cdot 2 = 0{,}4\ atm$

$P_{eau} \cdot L = 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}60\ m \cdot atm$

$T_g = 1773K$

Diagramme $H_2O \Rightarrow \varepsilon = 0{,}19$ (Fig. 9.5)

Correction

$$\frac{P_e + P_t}{2} = 1{,}2 \Rightarrow C_{eau} = 1{,}4 \text{ (Fig. 9.5)}$$

$$\varepsilon_{eau} = 1{,}4 \cdot 0{,}19 = 0{,}266$$

Absorbtion liée à la vapeur d'eau

$$\varepsilon' = \mathrm{f}\left(\mathrm{T_R} P_{eau} L\right)$$

$$\alpha_{eau} = \varepsilon' C_{eau}$$

$$T_R = 2127K$$

$$P_e L = 0{,}60$$

$$\Rightarrow \varepsilon' = 0{,}15$$

$$\alpha = 1{,}4 \cdot 0{,}15 = 0{,}21$$

$$\alpha_{eau} \neq \varepsilon_{eau}$$

c)

$$\varepsilon_{gas} = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{eau} - \underbrace{\Delta\varepsilon}_{Correction}$$

$$\alpha_{gas} = \alpha_{CO_2} + \alpha_{eau} - \Delta\alpha$$

$$\Delta\alpha, \Delta\varepsilon = f\left(\left[\frac{P_{eau}}{P_{CO_2} + P_{eau}}\right], \left[\left(P_{eau} + P_{CO_2}\right) \cdot L, \right] T\right) \text{ (Fig 9.6)}$$

$$\frac{P_{eau}}{P_{CO_2} + P_{eau}} = \frac{0{,}4}{0{,}3 + 0{,}4} = 0{,}57$$

$$\left(P_{eau} + P_{CO_2}\right) \cdot L = 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 1{,}05$$

$$T > 940$$

$$\Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\alpha = 0{,}052$$

$$\varepsilon_{gas} = 0{,}13 + 0{,}266 - 0{,}052 = 0{,}344$$

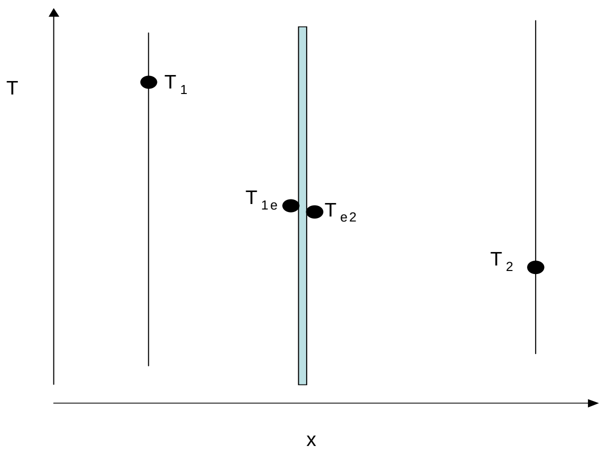
$$\alpha_{gas} = 0{,}124 + 0{,}21 - 0{,}052 = 0{,}282$$

<u>Exercice 20</u>

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 0{,}21 \ (\grave{a}\ 2000K) \\ \varepsilon_2 = 0{,}06 \ (\grave{a}\ 600K) \\ T_1 = 2000K \\ T_2 = 600K \\ \sigma = 5{,}6703 \cdot 10^{-8} W/m^2K^4 \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{1 - (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \cdot \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = 44{,}05\ [kW/m^2]\ \acute{e}qu.\ 9.48$$

Avec écran :



Cas stationnaire : $q_{1\to e_1} = q_{e_1 \to e_2} = q_{e_2 \to 2}$

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_{e_1}}{1-\left(1-\varepsilon_1\right)\left(1-\varepsilon_{e_1}\right)}\sigma\left(T_1^4 - T_{e_1}^4\right) = \frac{k}{e}\left(T_{e_1} - T_{e_2}\right) = \frac{\varepsilon_{e_2} - \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot \left(T_{e_2}^4 - T_2^4\right)}{1-\left(1-\varepsilon_{e_2}\right)\left(1-\varepsilon_2\right)}$$

$k \approx 108\ [W/mK]$

$\varepsilon_1 = 0,21 \qquad \varepsilon\left(T\right) = 1,05 \cdot 10^{-4} T + cste \quad$ (interpolation linéaire)

$\varepsilon_2 = 0,06$

$$q = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{e_1}}{1-\left(1-\varepsilon_1\right)\left(1-\varepsilon_{e_1}\right)}\sigma\left(T_1^4 - T_{e_1}^4\right)$$

$$q = -\frac{k}{e} T_{e_1}$$

avec k ≈ 108W/mK, $\varepsilon_{e_1} = 1,05 \cdot 10^{-4} T_{e_1}$

$T_{e_2} \approx T_{e_1} \Rightarrow$ aucune influence de la conduction sur le flux de chaleur

$\Rightarrow$ e = 0

$$q = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_e}{1-\left(1-\varepsilon_1\right)\left(1-\varepsilon_2\right)}\sigma\left(T_1^4 - T_e^4\right) = \frac{\varepsilon_e \cdot \varepsilon_2}{1-\left(1-\varepsilon_e\right)\left(1-\varepsilon_2\right)}\sigma\left(T_e^4 - T_2^4\right)$$

$\Rightarrow$

$T_e \approx 1830°C, \quad$ k ≈ 92,7(W/mK) (Littérature)

$\boxed{q = 30,25\,[kW/m^2]}$

Vérification :

$$\Delta T = T_{e_1} - T_{e_2} = q\frac{e}{\lambda} = \frac{30250 \cdot 0,003}{92,7} = 0,97°C \approx 1°C$$

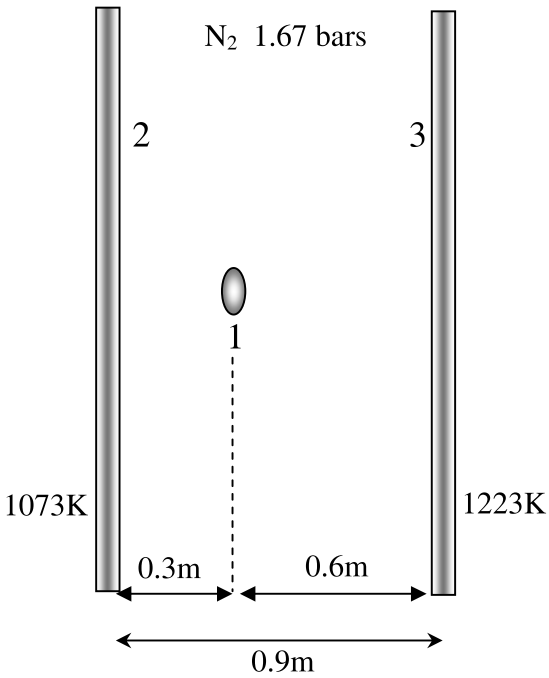
$T_{e_1} = 1830,5$

$T_{e_2} = 1829,5$

Exercice 21

1 Thermocouple
2 Alumine (ε à 1073 K = 0,8)
3 Graphite (corps noir ε = 1)

L'azote est transparent (donc aucune influence)



Avec équation 9.63 :

$$T_1^4 = \frac{\varepsilon_2 T_2^4 + \varepsilon_3 T_3^4 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2}\left(T_3^4 + T_2^4\right)}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}$$

$\underline{T_1 = 1169{,}8\ K \cong 1170K}$