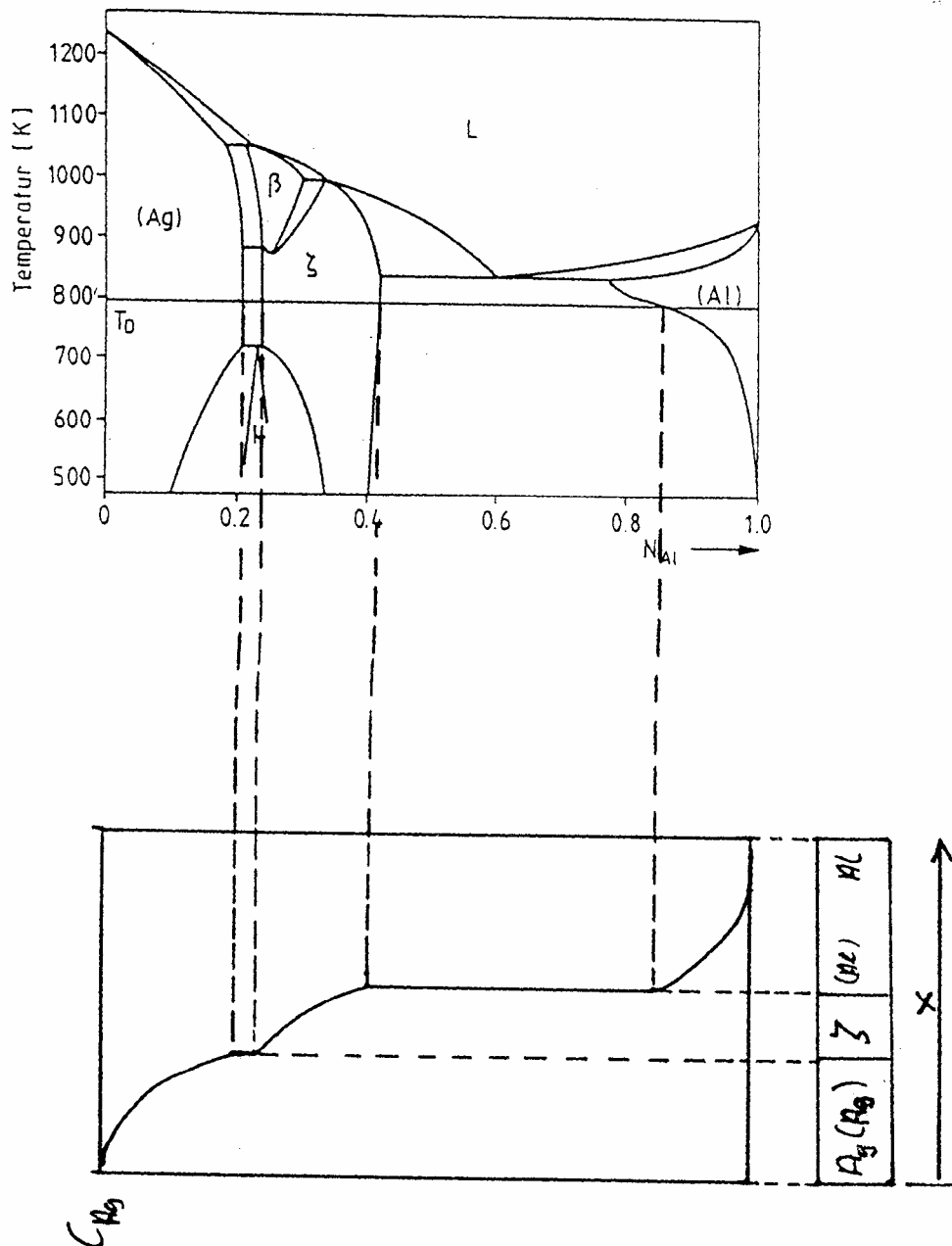




II. CORRIGE DES EXERCICES DE PHENOMENES DE TRANSFERT DE MATIERE

EXERCICE 22



Remarque : La variation de composition est "courbe" dans les phases car le coefficient de diffusion dépend de la composition. A l'interface entre deux phases on observe un saut de la concentration dû au changement de phase.

EXERCICE 23

$$\frac{c - c_s}{c_0 - c_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad \text{équ. 10.9}$$

a) atmosphère oxydante:

Avec $c_s = 0$ et $\frac{c}{c_0} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \Rightarrow c = c_0 \cdot \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$

b) atmosphère avec méthane

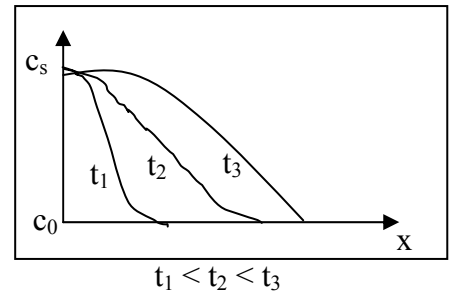
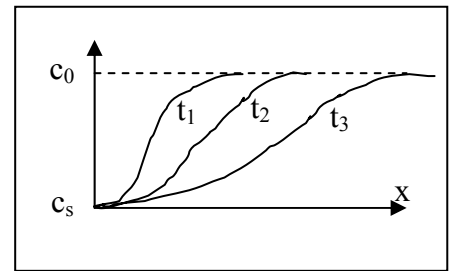
$c_s = \text{cste} > 0$ et $c_0 = 0$

On a donc : $\frac{c - c_s}{c_s} = -\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$

soit $\frac{c}{c_s} - 1 = -\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$

et donc $c = c_s \cdot \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$ (car $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$)

note: $c_s < c_{\text{max}}^{\text{Fe}}$

**EXERCICE 24**

A l'aide de l'interface de Matano (avec la conversion 1 inch \cong 2.54cm (cf. formulaires et tables)) et avec l'équation 10.16:

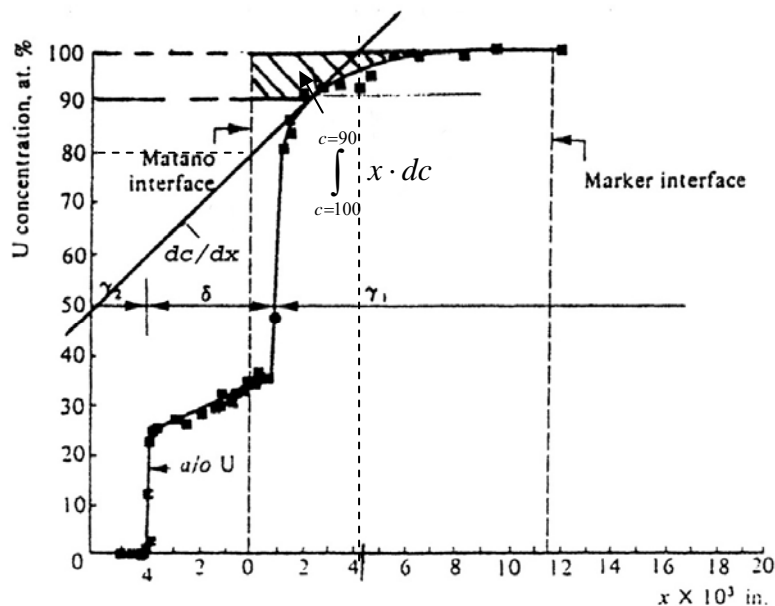
$$D(c) = -\frac{1}{2t} \frac{\int_{c_1}^c x \cdot dc}{\left(\frac{dc}{dx}\right)_c} \quad \text{sur le graphique on prend } \frac{dc}{dx} : \begin{cases} \Delta c = 20 \% \text{ at} \\ \Delta x = 4.2 \cdot 10^{-3} \text{ inches} = 1.067 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{cases}$$

On trouve $dc/dx = 1874.766 \cong 1875$ [% at./cm] reste l'intégrale:

$$\int_{c=100}^{c=90} x \cdot dc = -0.095 \% \text{at cm} \quad (\text{aire} \cong 112 \text{ mm}^2 \text{ avec } 1 \text{ mm}^2 \cong 8.46 \cdot 10^{-4} \% \text{at cm})$$

et avec $t = 48$ jours = 4'147'200 secondes on trouve

$$D = \frac{-1}{2 \cdot 4,147 \cdot 10^6} \frac{-0.095}{1875} = 6.11 \cdot 10^{-12} [\text{cm}^2 / \text{s}]$$



EXERCICE 25

a) à l'aide de l'équ. 10.9 $\frac{c - c_s}{c_0 - c_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$ car la concentration superficielle reste

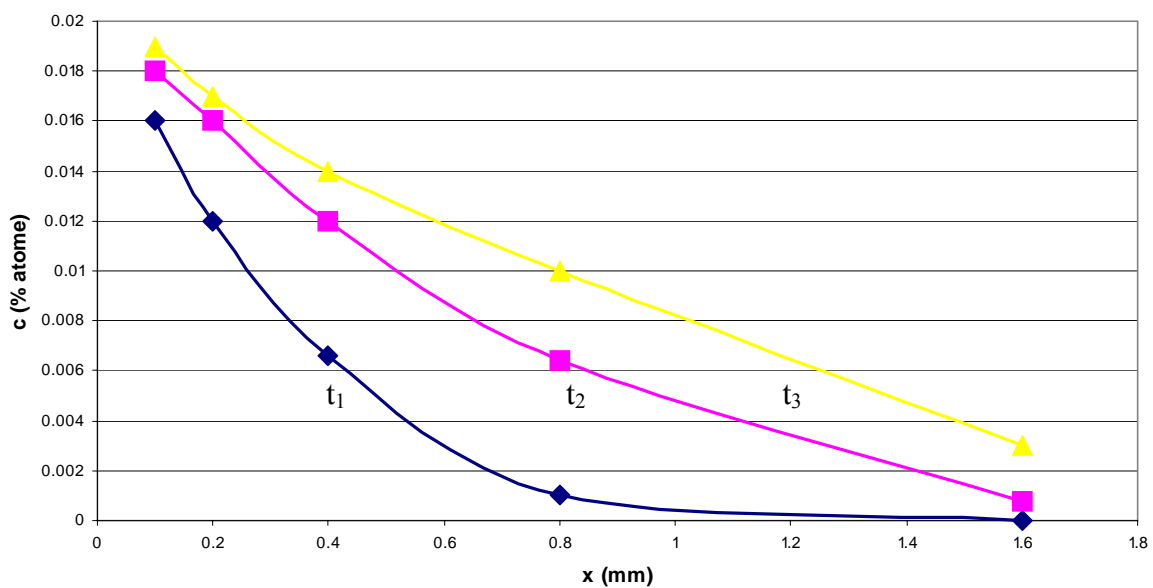
constante. Avec $c_0 = 0$ et $c_s = 2$ [%at.] il reste

$$\frac{c}{c_s} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \text{ et donc } \Rightarrow c(x, t) = c_s \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$$

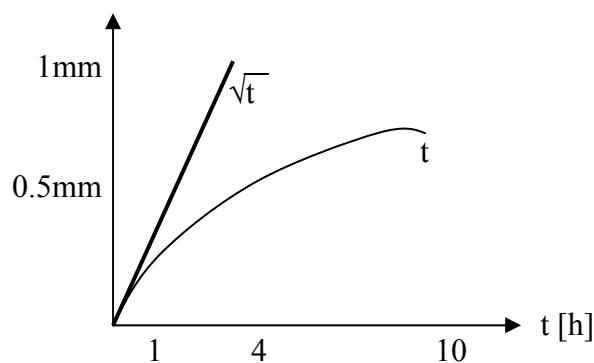
$$c(x, t) = 0.02 \left(\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{2 \cdot 10^{-7} \cdot t}}\right) \right)$$

x (cm)	erfc (t = 3600)	c (x, t ₁ = 3600s)	c (x, t ₂ = 14400s)	c (x, t ₃ = 36000s)
0.01	0.8	0.016	0.018	0.019
0.02	0.6	0.012	0.016	0.017
0.04	0.33	0.0066	0.012	0.014
0.08	0.047	0.001	0.0064	0.010
0.16	→ 0	→ 0	0.0008	0.003

Diffusion du carbone dans le fer



b)



$$x (1\%) = 0.25 \sqrt{t}$$

x en mm si t est en heure!

EXERCICE 26

A l'aide de l'équation d'Einstein (11.20): $D_x = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\zeta} \Gamma_s x_s^2$

On démontre l'équation (11.22): $D = \frac{1}{2} \Gamma_s \left(4 \frac{a^2}{4} + 4 \cdot 0 + \frac{a^2}{4} \right) = \Gamma_s a^2$

Car l'atome peut faire 3 types de saut : 1) un saut en "arrière" (p.r à l'axe x) de $a/2$

2) un saut "profondeur" (nul sur l'axe x)

3) un saut en avant de $a/2$

EXERCICE 27

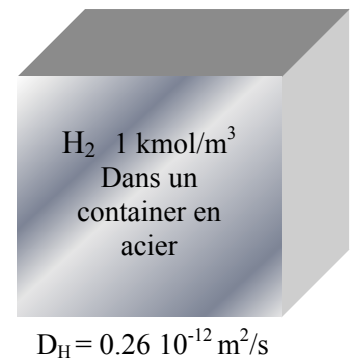
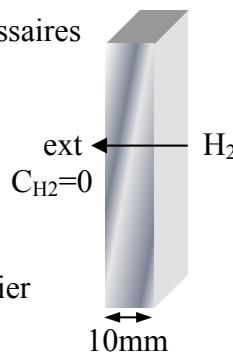
Posons tout d'abord les hypothèses nécessaires à la résolution de ce problème:

- 1) cas stationnaire
- 2) on considère $D_H = \text{constante}$
- 3) Pas de transport
- 4) concentration de H_2 (interne) constante
- 5) concentration nulle à l'extérieur
- 6) aucune réaction chimique entre H et l'acier

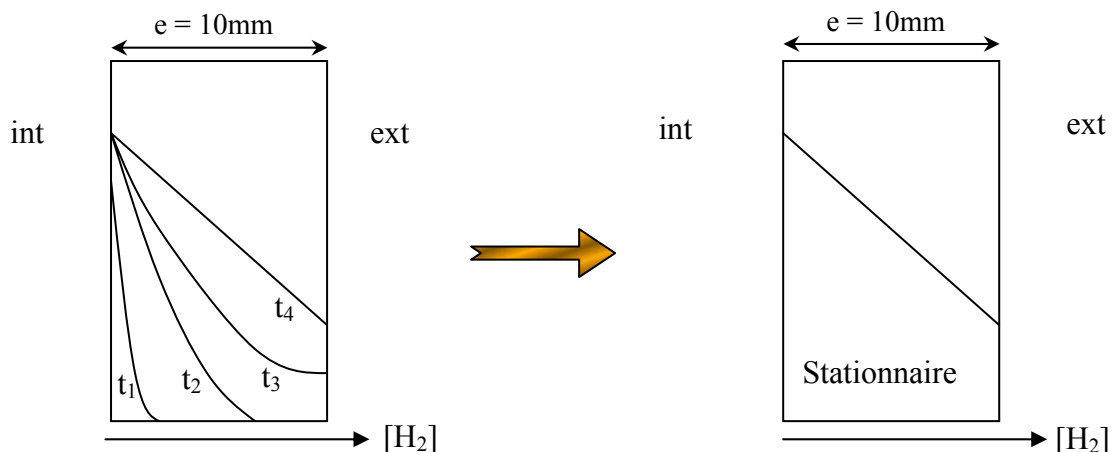
Après toutes ces simplifications on peut aisément calculer le flux molaire de H_2 dans l'acier:

$$J = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c_{\text{int}} - c_{\text{ext}}}{e} = \frac{1000 - 0}{0.01} = 10^5$$

$$J = -0,26 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = -2,6 \cdot 10^{-8}$$



Remarque : si on considère un régime transitoire (concentration de H_2 ($t = 0$) = 0) on aurait, avant l'établissement du régime stationnaire (établi):



En régime transitoire $\frac{\partial c}{\partial x}$ dépend de x et de t et D varie tandis qu'en régime stationnaire

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \text{cste} \quad \text{et} \quad D \text{ est connu et constant}$$

EXERCICE 28

a) Avec l'équation 13.7 : $D = D_0 \exp(-\Delta H / kT)$

$$\ln D_{Co} = \frac{-\Delta H}{k} \cdot \frac{1}{T} + \ln D_0$$

On trace un graphique ($\ln D$ en fct de $1/T$) avec le tableau.

On vérifie la plage de linéarité du graphe ($D = \text{env. } 10^{-15}$ à 10^{-21}).

En prenant 2 valeurs extrêmes dans cette plage on calcule la pente.

$$\text{pente de la droite : } \frac{-\Delta H}{R} = \frac{\Delta \ln D_{Co}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} \cong -35578 [K]$$

Avec $T_1 = 944K$ et $T_2 = 1381K$

Si on veut un résultat en Joules par mole on ne va pas utiliser k mais R (rappel : $k \cdot N_A = R \cong 8.31$) on a donc :

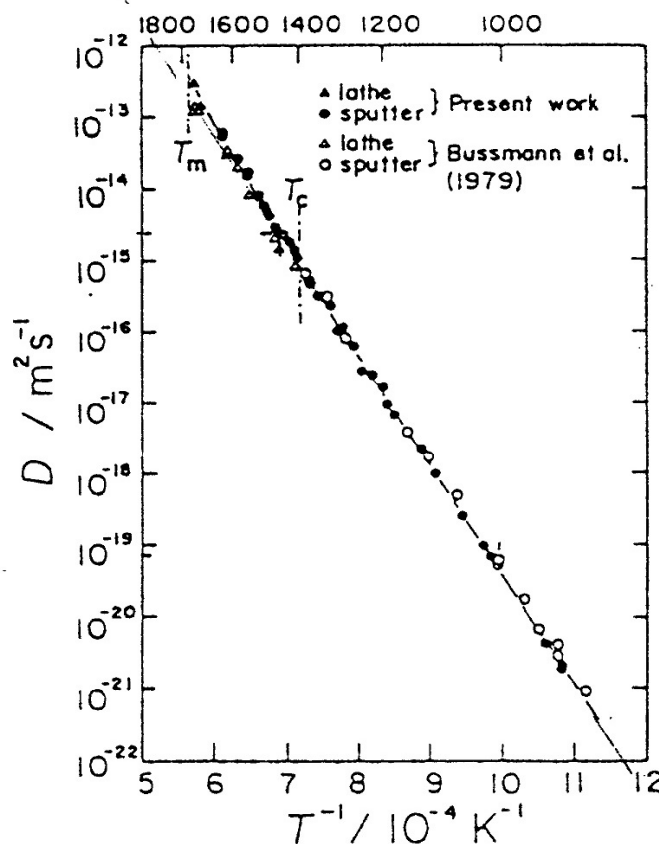
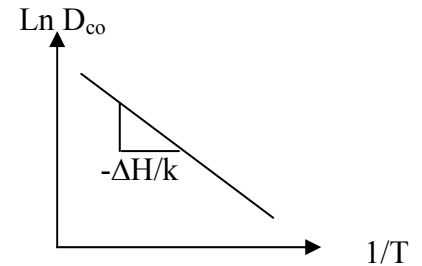
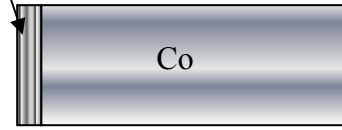
l'énergie d'activation cherchée : $\Delta H = 35578 \cdot 8.31 \cong 296 [kJ / mole]$

on peut avec ce résultat pour calculer D_0 :

$$\ln D_0 = \ln D_{Co} + \frac{\Delta H}{RT} \Rightarrow D_0 = 1.07 \cdot 10^{-4} \text{ (pour } T = 1337K \text{)}$$

Dans la littérature on trouve $D = 2.54 \cdot 10^{-4} \cdot \exp\left(\frac{-304}{RT}\right)$. Nos approximations ne sont donc pas mauvaises.

Co radioactif



Arrhenius plot of self-diffusion coefficient in cobalt. The data by Bussmann et al. are also plotted.

EXERCICE 29

On a $t = 1 \text{ année} = 3.1536 \cdot 10^7$

$T = 510^\circ\text{C} = 783 \text{ K}$

Solubilité de C dans cet acier (à 510°C) = 0.02 %

$D_C = 1.0 \cdot 10^{-9} [\text{cm}^2/\text{s}]$

L'utilisation de l'équation 10.9 bis serait possible dans un cas simple mais ici nous avons un changement de phase, nous devons donc utiliser l'équation 10.33

$$c_\alpha = c_s + \frac{c_0 - c_{\alpha\eta}}{\exp(-\gamma^2)} \sqrt{\pi} \gamma \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_\alpha t}}\right)$$

avec $c_s = 0$

On cherche γ ($0.2 < \gamma < 0.3$) avec l'équation 10.34

$$\gamma \exp(\gamma^2) \cdot \operatorname{erf}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{\alpha\eta} - c_s}{c_0 - c_{\alpha\eta}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{0.02 - 0}{0.2 - 0.02} = 0.0627$$

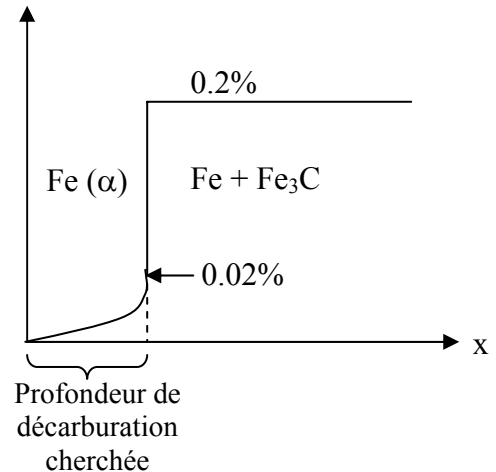
en tâtonnant on trouve $\gamma \approx 0.23$

on peut alors calculer avec $\xi = 2\gamma\sqrt{D_\alpha t}$. (équation en dessous de 10.34) qui représente la profondeur de décarburation cherchée :

$$\xi = 2 \cdot 0.23 \cdot \sqrt{1 \cdot 10^{-9} \cdot 3.1536 \cdot 10^7} = 8.17 \cdot 10^{-2} \cong 0.08 \text{ cm (après une année!!)}$$

Remarque: le profil de concentration est donné (car c_s et $c_{\alpha\eta}$ sont constant) par :

$$\frac{c_x - c_s}{c_0 - c_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

**EXERCICE 30**

On a $D_B = 10^{-14} [\text{cm}^2/\text{s}]$

A l'aide de l'équation 10.11:

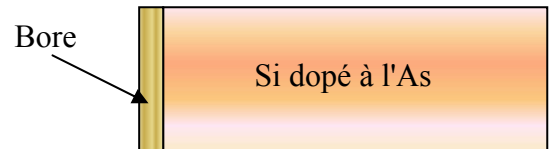
$$\frac{c}{c_s} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \text{ et } c_0 = 0$$

On cherche l'épaisseur (en fonction du temps) à laquelle $c = c_{As} = 10^{16}$ on cherche donc une constante a telle que :

$$\frac{c}{c_s} = \frac{10^{16}}{10^{18}} = 0.01 = \operatorname{erfc}(a) = 1 - \operatorname{erf}(a) \Rightarrow \operatorname{erf}(a) = 0.99$$

On trouve $a \cong 1.9$ on peut écrire l'équation cherchée

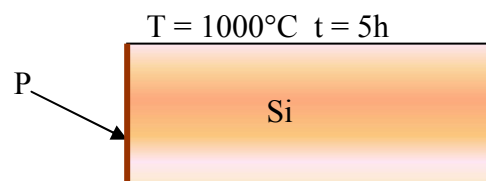
$$\Rightarrow x = a \cdot 2 \cdot \sqrt{Dt} = 3.8 \cdot 10^{-7} \sqrt{t} [\text{cm}]$$

**EXERCICE 31**

Dans cet exercice ce n'est plus une concentration de surface constante mais une couche fine qui est déposée.

On utilise alors l'équation 10.7:

$$c(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$



sans oublier d'enlever le facteur $\frac{1}{2}$ (car ce n'est pas un sandwich)

$$\text{Avec } \int_0^\infty c dx = Q \text{ [atome/m}^2] \Rightarrow Q = N_A \cdot \frac{\rho}{M} \cdot e \left[\frac{\text{atome}}{\text{mole}} \cdot \frac{\text{kg/m}^3}{\text{kg/mole}} \cdot m = \frac{\text{atome}}{\text{m}^2} \right]$$

On peut donc calculer pour le phosphore:

$$Q_P = \frac{2000 \cdot 10^{-6}}{0.03097} = 6.458 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{mole}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\text{et on cherche } X_P = \frac{\text{mole}(P)}{\text{mole}(P) + \text{mole}(Si)} = \frac{C_P}{C_P + C_{Si}} = 0.001 \text{ (avec } C = \text{concentration)}$$

$$\text{soit } C_P = \frac{0.001}{0.999} \cdot C_{Si} = 0.001001 \cdot C_{Si} \text{ avec } C_{Si} = \frac{2300}{0.02809} = 81879.6$$

$$\text{donc } C_P = 81.96 \left[\frac{\text{mole}}{\text{m}^3} \right]$$

En injectant dans l'équation 10.7:

$$c(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \Leftrightarrow 81.96 = \frac{6.46 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\pi \cdot 1.2 \cdot 10^{-17} \cdot 18000}} \exp\left(\frac{-x^2}{4 \cdot 1.7 \cdot 10^{-17} \cdot 18000}\right)$$

$$\ln(1.045 \cdot 10^{-3}) = \left(\frac{-x^2}{8.64 \cdot 10^{-13}}\right) \Rightarrow x = 2.435 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cong 2.4 \mu\text{m}$$

EXERCICE 32

50h à 900°C

C'est le cas d'un placage (chap.10 p.6) et on utilise l'équation 10.13:

$$\frac{c - c_1}{c_2 - c_1} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right]$$

connaissant toute les données, on calcul:

$$2 \cdot \frac{20.205 - 25}{5 - 25} = 0.4795 = \operatorname{erfc}(cste)$$

$$\Rightarrow cste = 0.5 = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \Rightarrow x = \sqrt{Dt} = \sqrt{2 \cdot 10^{-10} \cdot 50 \cdot 3600} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 60 \mu\text{m}$$

Remarque: on a considéré D = cste, la concentration à l'interface reste donc constante

et égale à $\frac{c_1 + c_2}{2}$

Cu 5% Zn	Cu 25% Zn
----------	-----------

