Univ. A. Mira-Béjaia
F.S.E., Dpt de Maths
Master 1, An. Maths

2019/2020

Corrigé de l'examen d'Optimisation Avancée

Exercice 1:

1°/ (G sans circuit) $\Leftrightarrow$ (G possède $|X|$ comp. f.c.) G admet des boucles (triviales). Pour G sans boucles, (a) $\Rightarrow$?

- G ne peut pas avoir un nbre de comp. f. connexes sup. strict à $|X| = n$. 0,5
- Supposons que G admet un nbre de comp. f. connexes < à $|X|$.

Donc il existe une comp. f. connexe engendrée par un nbre de sommets > à 1. Notons X_1 cette comp. f. connexe et ~~soit~~ soient i, j deux élts de X_1. Alors il existe un chemin C_1 allant de i vers j et un chemin C_2 allant de j vers i. Donc $C = C_1 \cup C_2$ est un circuit de G passant par i et j. Ce qui est en contradiction avec l'hyp. que G est sans circuit. D'où le résultat. 1,5

(b) $\Leftarrow$?

Supposons que G possède un ou plusieurs circuits. Comme G est sans boucle, alors un circuit de G passe par au moins 2 sommets. Donc le nbre de comp. f. connexes est inférieur strictement à $n = |X|$.

Ce qui est en contradiction avec l'hyp. que le nbre de comp. f. connexe est égale à $|X|$.

1,5

2°/ $A_1 = (X, V_1)$ et $A_2 = (X, V_2)$ deux arbres de $G = (X, U)$, G connexe, tels que : $V_1 \neq V_2$. Soit $u \in V_1 - V_2$.

On montre qu'il existe $v \in V_2 - V_1$ tels que : $V_1 - \{u\} \cup \{v\}$ et $V_2 - \{v\} \cup \{u\}$ sont des arbres de G.

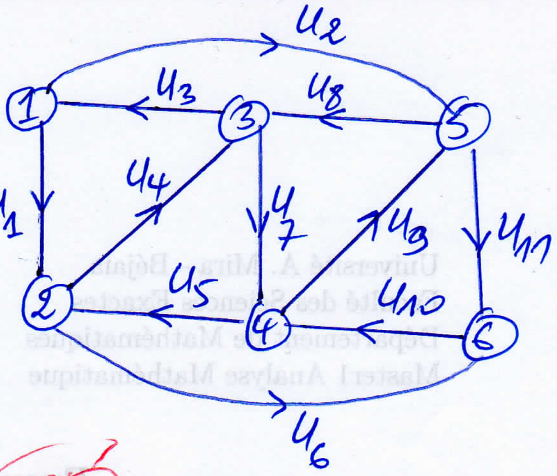
Si on ajoute à l'arbre A_2 l'arc u, $V_2 \cup \{u\}$ n'est plus un arbre et il contiendra un cycle élémentaire μ passant par u.

Alors il existe un arc v de μ tel que $V_2 \cup \{u\} - \{v\}$ soit un arbre.

D'autre part $V_1 \cup \{v\} - \{u\}$ ne possède pas de cycle et il est connexe, donc c'est un arbre.

Question 2 : Bonus 1,5 pt

Exercice 2:



1°/ $A = \{2,3,4,5\}$

- $\omega(A) = \{u_1, u_2, u_3, u_6, u_{10}, u_{11}\}$ 0,5
- Son vecteur représentatif:

  $\omega = (-1,-1,1,0,0,1,0,0,0,-1,1)$ 0,5
- $\omega(A)$ n'est pas élémentaire car il contient un sous ensemble d'arcs qui forme un cocycle exp: $\{u_1, u_2, u_3\}$. 0,5
- $\omega(A) = \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{u_6, u_{10}, u_{11}\}$. 0,5

2°/ $\Omega_1 = \{u_2, u_4, u_5, u_6, u_9, u_{10}\}$

- Ω_1 n'est pas un cocycle car ce n'est pas un ensemble déconnectant 0,75
- $\Omega'_1 = \Omega_1 \cup \{u_3\} \setminus \{u_9, u_{10}\}$ est un cocycle $= \omega(\{1,2,3\})$ 0,75

3°/ $\Omega_2 = \{u_2, u_5, u_6, u_8, u_9\}$

- Ω_2 n'est pas un cocycle car ce n'est pas un ensemble déconnectant. 0,75
- $\Omega'_2 = \Omega_2 \cup \{u_7\} \setminus \{u_9\} = \omega(\{1,2,3\})$ est un cocycle 0,75

4°/ ⊛ $d^+(1) = 2 \neq d^-(1) = 1$ alors G n'admet pas le circuit

⊛ $d^+(2) = d^-(2) = 2 = d^+(3) = d^-(3) = d^+(4) = d^-(4)$
$= d^+(5) = d^-(5)$

et $d^+(1) = 2 = d^-(1) + 1$

$d^+(6) = d^-(6) - 1$

1

Donc G admet un chemin eulerien allant de 1 vers 6.

⊛ On détermine un chemin eulerien de G.

- On part de 1 et $C = \phi$.
- $\Gamma^+(1) = \{2, 5\}$, on choisit $u_1 = (1,2)$ car ce n'est pas un pont, $C = \{(1,2)\}$, puis on supprime u_1.
- $\Gamma^+(2) = \{3, 6\}$, on choisit $u_4 = (2,3)$, $C = \{(1,2), (2,3)\}$
- $\Gamma^+(3) = \{1, 4\}$, on choisit $u_3 = (3,1)$, puis $u_2 = (1,5)$

$C = \{(1,2), (2,3), (3,1), (1,5)\}$

- $\Gamma^+(5) = \{3, 6\}$, on choisit $u_8 = (5,3)$ puis $u_7 = (3,4)$

$C = \{(1,2), (2,3), (3,1), (1,5), (5,3), (3,4)\}$

- $\Gamma^+(4) = \{2, 5\}$, on choisit $u_9 = (4,5)$, puis $u_{11} = (5,6)$, puis $u_{10} = (6,4)$, puis $u_5 = (4,2)$ et enfin $u_6 = (2,6)$.

$C = \{(1,2), (2,3), (3,1), (1,5), (5,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,4), (4,2), (2,6)\}$

2

$= (u_1, u_4, u_3, u_2, u_8, u_7, u_9, u_{11}, u_{10}, u_5, u_6)$

Exercice 3 :

$G=(X,U)$ graphe de matrice d'adjacence

$$M=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

1°/ ⊕ G n'est pas réflexif car $m_{11}=0$. 0,25

⊕ G n'est pas symétrique car $m_{21}=1 \neq m_{12}=0$ 0,25

⊕ G est anti-symétrique car $m_{ij}=m_{ji}=0,\ \forall i\neq j$ 0,25

⊕ G n'est pas transitif car $m_{13}=1$ et $m_{36}=1$ mais $m_{16}=0$. 0,25

2°/ ⊕ On vérifie que G est sans circuit

$$M=\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \hline 1 & 0&0&1&0&1&0\\ 2 & 1&0&1&1&0&1\\ 3 & 0&0&0&0&0&1\\ 4 & 0&0&1&0&0&1\\ 5 & 0&0&1&0&0&1\\ 6 & 0&0&0&0&0&0 \end{array}$$

$X(0)=\{6\}$

$X(1)=\{3\}$

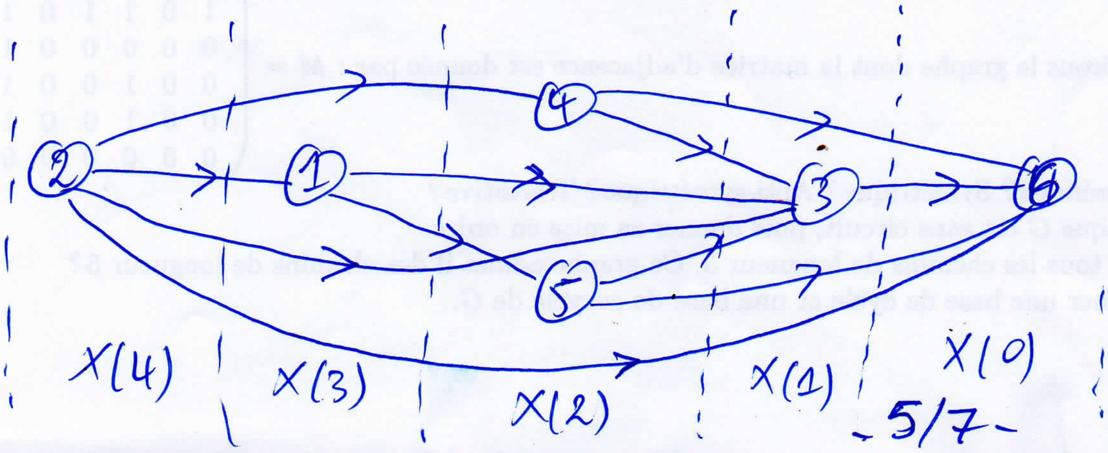
$X(2)=\{4,5\}$ 1,5

$X(3)=\{1\}$

$X(4)=\{2\}$

La dernière matrice étant nulle alors G est sans circuit.

⊕ Mise en ordre de G.



0,5

3°/ ⊕ Tous les chemins de longueur 3. $0{,}25 \times 5 = 1{,}25$

$L_1 = \{(1,5), (5,3), (3,6)\}$; $L_2 = \{(2,4), (4,3), (3,6)\}$;

$L_3 = \{(2,1), (1,3), (3,6)\}$; $L_4 = \{(2,1), (1,5), (5,6)\}$;

$L_5 = \{(2,1), (1,5), (5,3)\}$.

⊕ G n'admet pas de chemins de longueur 5 car il contient 5 niveaux, donc la longueur maximale d'un chemin de G est égale à 4. $0{,}5$

4°/ ⊕ Base de cycle de G.

Arc ajouté	cycle crée
(1,3)	—
(1,5)	—
(2,1)	—
(2,3)	$C_1 = ((2,3), (1,3), (2,1))$
(2,4)	—
(2,6)	
(3,6)	$C_2 = ((3,6), (2,6), (2,1), (1,3))$
(4,3)	$C_3 = ((4,3), (1,3), (2,1), (2,4))$
(4,6)	$C_4 = ((4,6), (2,6), (2,1), (1,3))$
(5,3)	$C_5 = ((5,3), (1,3), (1,5))$
(5,6)	$C_6 = ((5,6), (2,6), (2,1), (1,5))$

$0{,}25 \times 6 = 1{,}5$

⊕ Base de cocycle de G.

A_i	w^i
$A_1=\{1\}$	$w^1=\{u_1,u_2,u_3\}$
$A_2=\{1,2\}$	$w^2=\{u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$
$A_3=\{1,2,3\}$	$w^3=\{u_2,u_8,u_7,u_5,u_6\}$
$A_4=\{1,2,3,4\}$	$w^4=\{u_2,u_8,u_9,u_{10},u_6\}$
$A_5=\{1,2,3,4,5\}$	$w^5=\{u_{11},u_{10},u_6\}$

$0{,}5\times 5=2{,}5$