L_2 Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Départements de 2ème Année (GE–GM–GP–GC–Mines)

® 2019−2020

✠–Examen Final de Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 (**10.00 points**) : On a relevé le nombre d'enfants dans N foyers. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$0\ 2\ 2\ 3\ 1\ 3\ 1\ 2\ 0\ 1\ 4\ 0\ 2\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ 2$$

1. Déterminer :
   - La population, sa taille et l'unité statistique.
   - L'étendue, les modalités, le caractère et sa nature.
2. Dresser le tableau statistique de la distribution.
3. Tracer le graphe de cette distribution. Déterminer le mode. Conclure.
4. Tracer la courbe des effectifs cumulés décroissants.
5. Déterminer la fonction de répartition de cette distribution et tracer son graphe.
6. Calculer la médiane, la moyenne ($\overline{X}$), l'écart type ($\sigma(X)$) et l'intervalle interquartile.
7. Déterminer le nombre de foyers ayant un nombre d'enfants compris entre $\overline{X} - 2\sigma(X)$ et $\overline{X} + 2\sigma(X)$.
8. Quelle est la proportion de foyers pour laquelle on a observé un nombre d'enfants :
   - Inférieur ou égale à 2 ?
   - Supérieur à 1 ?

Exercice 2 (**10.00 points**) : Lors d'une enquête on s'est intéressé au poids (en Kg) de 100 étudiants de l'Université de Béjaïa. Les résultats enregistrés sont résumés dans le tableau suivant :

Le poids (en Kg)	[45, 55[	[55, 65[	[65, 75[	[75, 80[
Nombre d'étudiants	15	70	10	n_4

1. Calculer la valeur de n_4 et donner sa signification.
2. Représenter graphiquement cette distribution et calculer le mode.
3. Tracer les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
4. Calculer la moyenne ($\overline{X}$), l'écart type ($\sigma(X)$), la médiane et déterminer l'intervalle interquartile.
5. Quelle est la proportion d'étudiants dont le poids est supérieur ou égal à $\overline{X} + \sigma(X)$?
6. Que deviendrait la moyenne des poids des étudiants, si chaque étudiant a grossi :
   a) d'un Kg.
   b) de 5% de chaque poids.

Une rédaction claire et rigoureuse est exigée

Bonne Chance

Corrigé Examen Prob-Stat 2019-2020

Exo1 : 10 pts

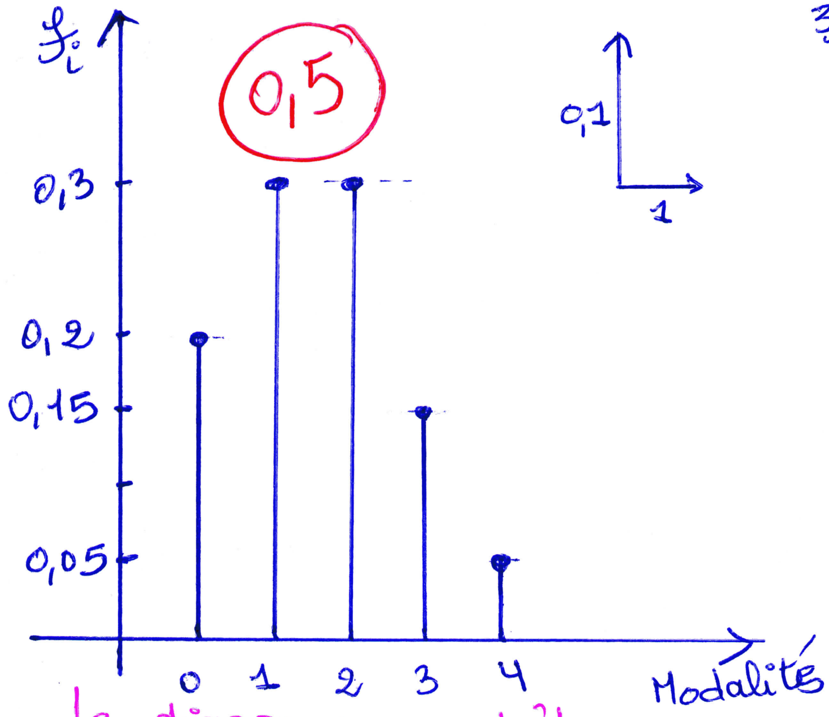
1) Déterminer :

- Population : Les foyers
- Taille : $N = 20$ — 1,75
- Unité statistique : ~~Un~~ foyer
- Etendue : $E = x_{(Max)} - x_{(Min)} = 4 - 0 = 4$
- Modalités : 0, 1, 2, 3, 4
- Caractère : Le nombre d'enfants.
- Nature : quantitative discrète

2) Dresser le tableau statistique : — 1,25

x_i	n_i	f_i	N_i ↙	F_i ↗	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	4	0,2	20	0,2	0	0
1	6	0,3	16	0,5	6	6
2	6	0,3	10	0,8	12	24
3	3	0,15	4	0,95	9	27
4	1	0,05	1	1	4	16
Total	20	1			31	73

3) Représentation Graphique — 0,5



Le diagramme en bâtons.

3) Déterminer le Mode

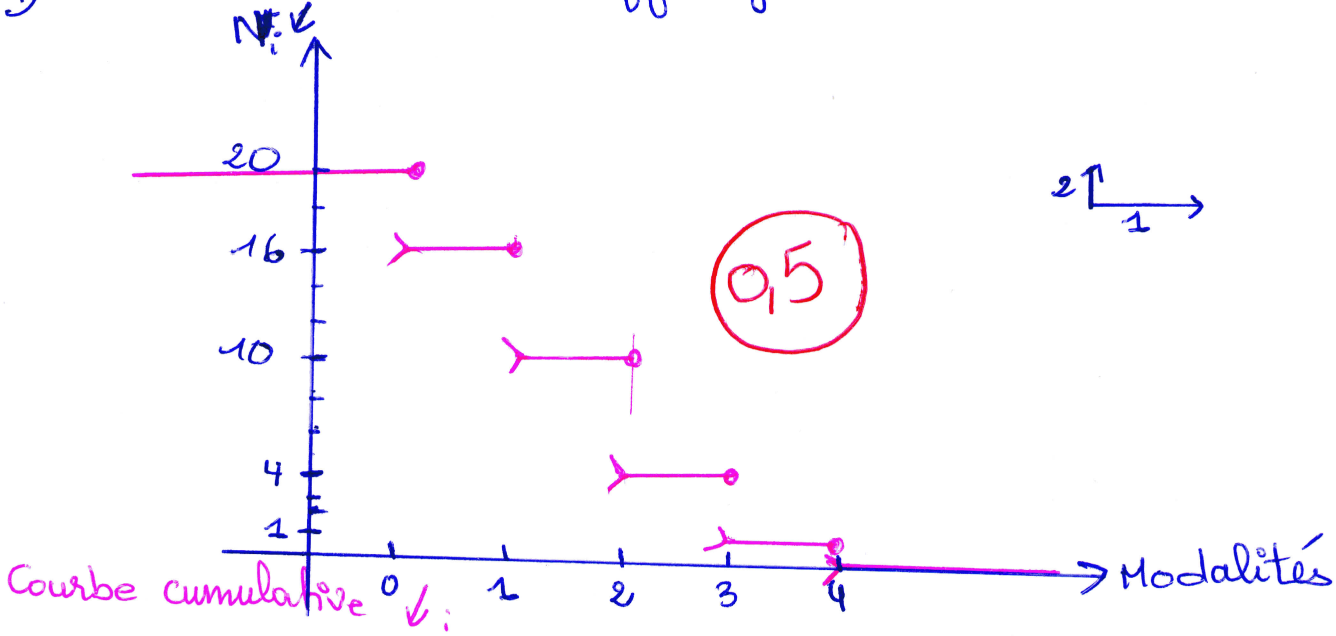
$M_o = 1$

$M_o = 2$ — 0,5

Conclusion :

La série statistique est bi-modale. — 0,5

4) Tracer la courbe des effectifs cumulés décroissants :

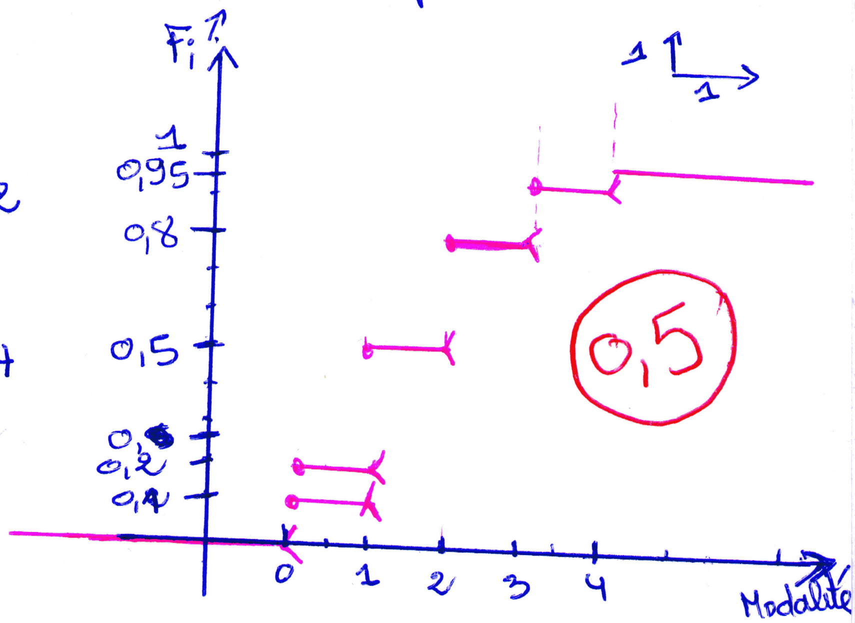


5) La fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,8 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,95 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

1

son Graphe :



6) Médiane (Me) :

$N = 20 = 2 \times \underbrace{10}_{p}$: pair

$$M_e = \frac{x_p + x_{(p+1)}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$\boxed{M_e = \frac{3}{2}}$ 0,5

• Moyenne ($\overline{X}$) :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = \frac{1}{20}(31) = 1.55$$

$\boxed{\overline{X} = 1.55}$ 0,5

• Ecart type :

• Variance : $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{20}(73) - (1.55)^2 = 1.2475$

$\boxed{V(X) = 1.2475}$

Pe

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,2475} = 1.1169$

$\boxed{\sigma_x = 1,1169}$ 0,5

•) Intervalle interquartile :

$Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ $\boxed{Q_1 = 1}$

$Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$ $\boxed{Q_3 = 2}$ 0,5

$Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$

7)- $\bar{X} - 2\sigma_x = 1.55 - 2(1,1169) = -0,6838$ $F(\bar{x} - 2\sigma_x) = 0$

$\bar{X} + 2\sigma_x = 1.55 + 2(1.1169) = 3.7838$ $F(\bar{X} + 2\sigma_x) = 0,95$

$F(\bar{X} + 2\sigma_x) - F(\bar{X} - 2\sigma_x) = 0,95 - 0 = 0,95$

$\left.\begin{array}{l} 100\% \to 20 \\ 95\% \to Nb \end{array}\right\} Nb = \frac{20 \times 95}{100} = 19$

Il y a 19 foyers ayant le nombre d'enfants compris entre $[-0,0838, 3.7838]$. 0,75

8) •) Inferieure au égale à 2 :

$F_3(2) = 0,8$ $\Rightarrow$ il 80% de foyers pour lesquels on a observé un nombre d'enfants inférieur ou égale à 2. 0,25

•) Supérieur à 1 :

$n_3 + n_4 + n_5 = 6 + 3 + 1 = 10 = N_3^4$ 0,5

$\left.\begin{array}{l} 100\% \to 20 \\ x \to 10 \end{array}\right\} x = \frac{10 \times 100}{20} = 50\%$

$\Rightarrow$ Il y a 50% des foyers pour lesquels on a observé un nombre d'enfants supérieur à 1.

Exo2 : 10 pts

1) Calculer la valeur de n_4 :

$$N = n_1+n_2+n_3+n_4 = 15+70+10+n_4 = 95+n_4 = 100$$

$$\boxed{n_4 = 5}$$ 0,25

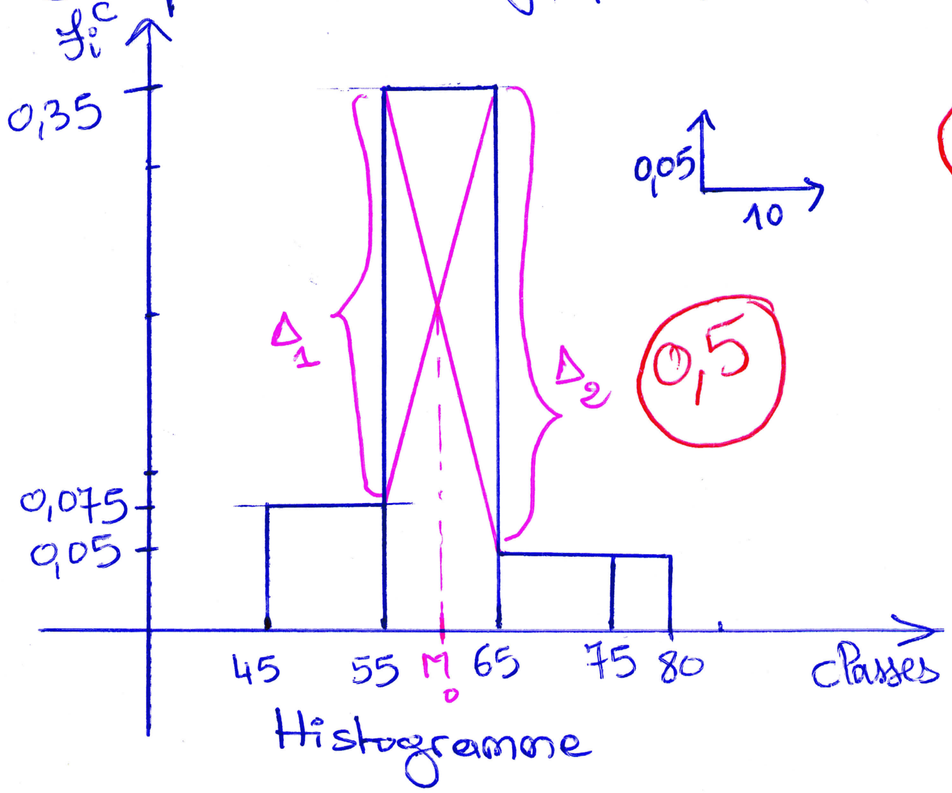
Signification : 0,5 Il y a 5 étudiants dont le poids est compris dans la classe $[75, 80[$ kg.

Tableau statistique : $a = PGCD[10, 5] = 5$ 0,25

1

classes	a_i	x_i	n_i	f_i	f_i^c	$F_i \nearrow$	$F_i \searrow$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[45, 55[$	10	50	15	0,15	0,075	0,15	1	750	37500
$[55, 65[$	10	60	70	0,70	0,35	0,85	0,85	4200	252000
$[65, 75[$	10	70	10	0,10	0,05	0,95	0,15	700	49000
$[75, 80[$	5	77.5	5	0,05	0,05	1	0,05	387,50	30031,25
Total	/	/	100	1	/			6037.5	368531,25

2) Représentation graphique :



Histogramme

0,5

• Mode :

La classe Modale est $[55, 65[$ 0,25

$$M_0 = e_{i-1} + a_i \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}$$

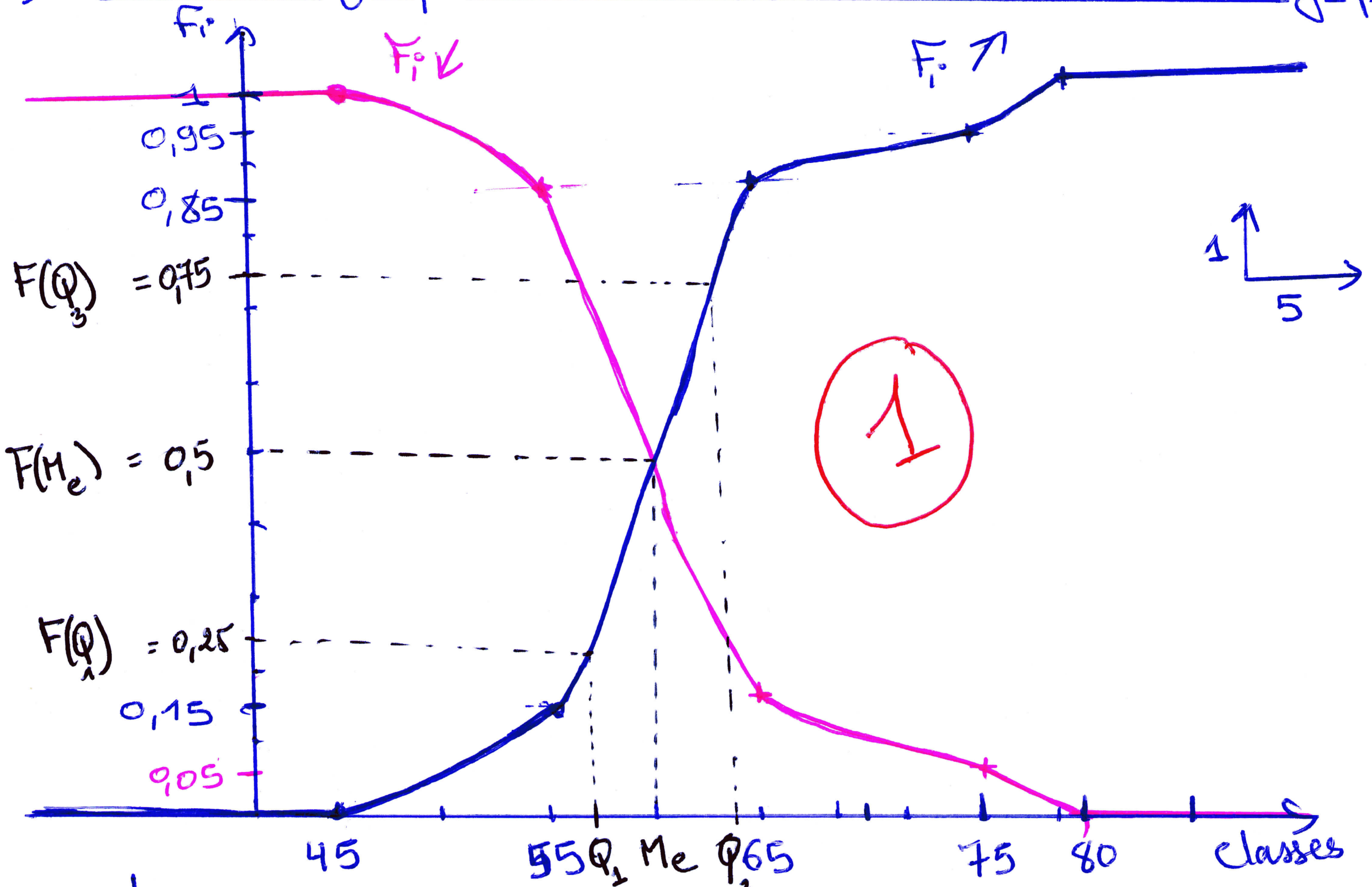
$$= 55 + 10 \frac{0,275}{0,275+0,3}$$

$$= 59,78$$ 0,5

$$\boxed{M_0 = 59,78}$$

P4

3) Calcul des fréquences cumulées ↗ et ↙ et Tracer leurs graphes



Les Courbes des Fréquences cumulées ↗ et ↙

1

5) Moyenne $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \frac{1}{100}(6037,5) = 60,375$$

$\boxed{\bar{X} = 60,375}$

0,5

•) Variance :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100}(36853,25) - (3645,1406)$$

$\boxed{V(X) = 40,1719}$

0,5

•) Ecart type : $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{40,1719} = 6,3381$

$\boxed{\sigma_x = 6,3381}$

•) Médiane : $M_e \in [55, 65[$

0,25

$$M_e = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i}\left(F(M_e) - F(e_{i-1})\right) = 55 + \frac{10}{0,70}(0,5 - 0,15) = 60$$

P_5

$\boxed{M_e = 60}$ 0,5

•) Intervalle interquartile : $F(Q_1) = 0,25$, $F(Q_3) = 0,75$ 0,5

$Q_1 \in [55,65[$ 0,25 , $Q_1 = 55 + \frac{10}{0,70}(0,25 - 0,15) = \boxed{56,4285 = Q_1}$

$Q_3 \in [55,65[$ 0,25 , $Q_3 = 55 + \frac{10}{0,70}(0,75 - 0,15) = \boxed{63,5714 = Q_3}$ 0,5

$Q_3 - Q_1 = 63,5714 - 56,4285 = 7.1429$ 0,25

6) $\bar{X} + \sigma_X = 60,375 + 6,3381 = 66,7131 \in [65,75[$

$F(\bar{X} + \sigma_X) = F(65) + \frac{0,10}{10}(66,7131 - 65) = 0,85 + 0,01713 = 0,867131$ 1,25

$1 - F(\bar{X} + \sigma_X) = 1 - 0,867131 = 0,132869$

Il y a 13,2869 % d'étudiants dont le poids est supérieur à $\bar{X} + \sigma_X$.

7) L'étudiant grossi :

•) 1 Kg : $x_i' = x_i + 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{X}' = \bar{X} + 1 = 60,375 + 1 = 61,375 \\ \boxed{\bar{X}' = 61,375} \end{cases}$ 0,5

•) 5% de chaque poids :

$x_i' = x_i + 0,05 x_i = 1,05 x_i$

$\bar{X}' = 1,05 \bar{X} = 1.05 \times 60,375 = 63,39375$

$\boxed{\bar{X}' = 63,39375}$ 0,5