

Examen durée 1h30Min

Module PRF

MI Sections 1..10

Exercice 1

1) Montrez que la fonction suivante est primitive récursive, et donnez-en une dérivation

primitive récursive : $f = \lambda xy. \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ x * (x + 1) * (x + 2) * \dots * y & \text{sinon} \end{cases}$

On considère les fonctions vues en cours comme primitives récursives.

2) Rappelons qu'un ensemble E est primitif récursif si et seulement si sa fonction

caractéristique $Car_E = \lambda u. \begin{cases} 1 & \text{si } u \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est primitive récursive.

Montrer que l'ensemble suivant est primitif récursif : $E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x > y\}$.**Exercice 2**

A- Soit la machine de Turing MT donnée par les instructions :

Ins={	1/q ₀ 0 q ₁ ,	13/ q ₀ 0 * q ₈ ,	24/ q ₁₃ 0 G q ₁₄ ,	1) Quel est le traitement
	2/ q ₁ 0 D q ₂ ,	14/ q ₈ * D q ₉ ,	25/ q ₁₄ # 1 q ₁₅ ,	réalisé par les instructions de 1/
	3/q ₂ 1 0 q ₃ ,	15/ q ₉ 1 # q ₁₀ ,	26/ q ₁₅ 1 G q ₁₄ ,	à 12/ ? Dérouler pour x=3.
	4/q ₃ 0 D q ₄ ,	16/ q ₁₀ # G q ₁₀ ,	27/ q ₁₄ * G q ₁₄	2) Quel est le traitement
	5/q ₄ 1 D q ₄ ,	17/ q ₁₀ * G q ₁₁ ,	28/ q ₁₄ 1 G q ₁₄ ,	réalisé par les instructions de
	6/ q ₄ 0 D q ₅ ,	18/ q ₁₁ 1 G q ₁₁ ,	29/ q ₁₄ 0 D q _t	13/ à 23/ ? Dérouler pour 3
	7/ q ₅ 1 D q ₅ ,	19/ q ₁₁ 0 1 q ₁₂ ,	30/ q _t 0 1 q ₆	barres en supposant que la tête
	8/ q ₅ 0 1 q ₆ ,	20/ q ₁₂ 1 D q ₁₂ ,		de Lecture/Ecriture se pointe
	9/ q ₆ 1 G q ₆ ,	21/ q ₁₂ * D q ₁₃ ,		sur le premier blanc à gauche
	10/ q ₆ 0 G q ₇ ,	22/ q ₁₃ # D q ₁₃ ,		de la barre la plus à gauche.
	11/ q ₇ 1 G q ₇ ,	23/ q ₁₃ 1 # q ₁₀ ,		3) Dans quel cas
	12/ q ₇ 0 D q ₀ ,			l'instruction 30/ est exécutée ?

4) En déduire la fonction d'arité 1 calculée par cette machine.

B- Donner les instructions de la MT qui calcule la fonction binaire **Inv** définie comme suit :

$$\text{Inv} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

Exercice 3

A-

1) Ecrire en Caml une fonction **Etendlistes** qui prend en entrée un élément x, et une liste de listes l et qui rajoute x en tête de chacune des listes de l.

Exemple d'utilisation : # Etendlistes 3 [[1;2];[4];[5;6]];
- : int list list = [[3; 1; 2]; [3; 4]; [3; 5; 6]]

2) Ecrire en Caml une fonction **Rallongelistes** qui prend en entrée une liste a et une liste de listes b, et qui construit la liste de toutes les listes obtenues en ajoutant un élément de a en tête d'une liste d'éléments de b.

Exemple d'utilisation : # Rallongelistes [1;2] [[3];[4;5]];
- : int list list = [[1; 3]; [1; 4; 5]; [2; 3]; [2; 4; 5]]

B-

1) Quel est le type inféré par CAML des deux fonctions suivantes ?

let lg x = string_length x;;

let supp ch x y = if x+y<2lg ch then ""

else (sub_string ch 0 y) ^ (sub_string ch (x+y) ((lg ch) - (x+y)));;

2) Calculer: supp "ABCDEFGH" 2 4.

3) En déduire que fait cette fonction.

C- Corrigez éventuellement l'instruction suivante et évaluez là :

true=(5=5) & true or 6<2;;