Faculté de Physique : L.M.D

Licence de Physique:
L 3

Relativité Restreinte

Chapitre 2

Univers de Minkowski

quadrivecteurs

Mohamed BENDAOUD : Professeur

Les visions de l'espace et du temps, que je vais vous exposer, ont poussé sur le terreau de la physique expérimentale, et c'est cela qui fait leur force. Elles sont radicales.
Dorénavant l'espace en soi, et le temps en soi, sont condamnés à s'évanouir dans l'ombre, et seule l'union des deux pourra avoir un sens en tant que réalité indépendante.

H. MINKOWSKI (conférence de Cologne 21 Sept. 1908)

Hermann Minkowski **1864-1909**

Mathématicien balte

Professeur de Mathématiques d'Einstein à l'ETH (Zurich)

I. Univers de Minkowski

I. 1. Intervalle entre deux événements.

Hypothèse

L'espace est ***homogène*** et ***isotrope***, le temps se déroule de façon ***uniforme***.

Minkowski considère un espace à 4 dimensions où:

un ***"événement"*** est défini par

3 coordonnées *:* du point où il a lieu, et l'instant où il se produit.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right.$$

Point d' univers

Exemples: Emission d'un électron, Choc entre deux particules, etc..

*A tout point d'univers correspond une "**ligne d'univers**" qui est sa trajectoire dans **l'espace-temps.***

Espace- temps ou '***'Univers de Minkowski''***

Dans un repère galiléen (R) :

un 1ier événement: Emission d'un ***photon*** en $x_1, y_1\ z_1$, à l'instant t_1

Le second représente son arrivée en x_2, y_2, z_2 au temps t_2

La distance ***d*** parcourue par ce photon est telle que;

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

D'autre part:

$$d^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = 0$$

Dans l'univers de Minkowski, *on appelle* ***intervalle entre 2 événements*** *quelconques A et B la quantité :*

$$S_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2$$

Dans le cas de la lumière $S_{AB}^{\ 2} = 0$

$$s_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

si $\begin{cases} s_{AB}^2 = 0 \\ s_{AB}^2 \neq 0 \end{cases}$

Intervalle ‘’genre lumière ’’

Cas général

Théorème: *Le carré de l'intervalle, entre 2 événements quelconques, est un invariant dans tout changement de référentiel galiléen.*

$$s_{AB}^2 = s'^2_{AB}$$

Intervalle élémentaire entre 2 événements infiniment voisins :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

Si on pose: $x_1 = x$ $x_2 = y$ $x_3 = z$ $x_4 = ct$

Coordonnées d’un point d’univers

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 \Rightarrow dS^2 = \sum_{i,k} g_{i,k} \, dx_i . dx_k$$

ds^2 est un invariant

$g_{i,k}$ définit la ***métrique* de l'espace-temps**

En Relativité restreinte

$$g_{i,k} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k$$

$$g_{1,1} = g_{2,2} = g_{3,3} = +1 \quad \text{et} \quad g_{4,4} = -1$$

l'espace-temps de Minkowcki est pseudo euclidien

Sa signature est : (+ 1 , + 1 , + 1 , - 1)

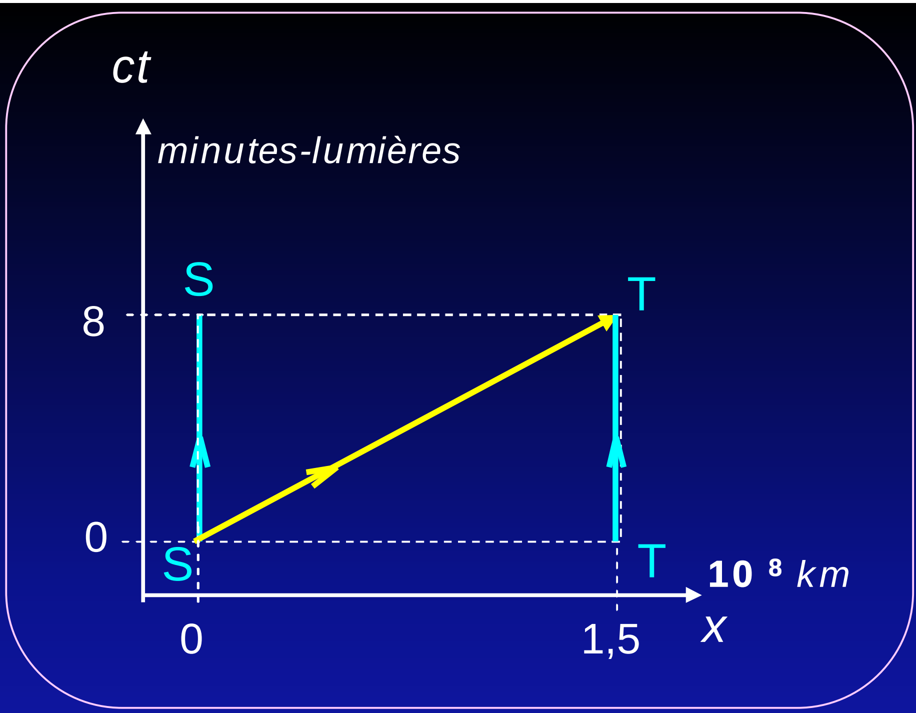
On utilise aussi la signature (- 1 , - 1 , - 1 , + 1)

I. 2. Cône de lumière.

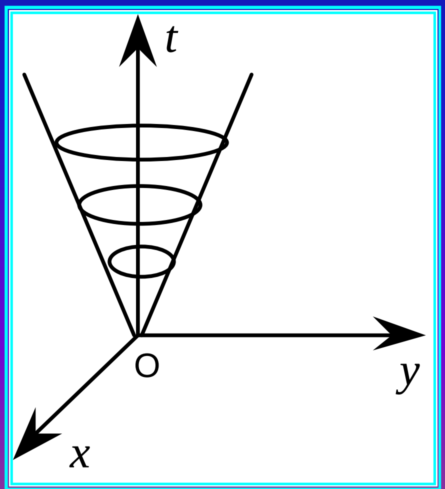
On représente un espace de Minkowski (x,ct) .

Les trajets du soleil S et de la Terre T, à travers l'*espace-temps*, sont des verticales.

Un rayon lumineux, émis par le soleil, est représenté par une diagonale, et met environ 8 minutes pour atteindre la Terre.



Si, dans l'espace réel à 3 dimensions, une source S émet, à $t = 0$, une onde lumineuse, celle-ci sera répartie, quelque soit la vitesse de S, sur des sphères de centre S et de rayon ct .



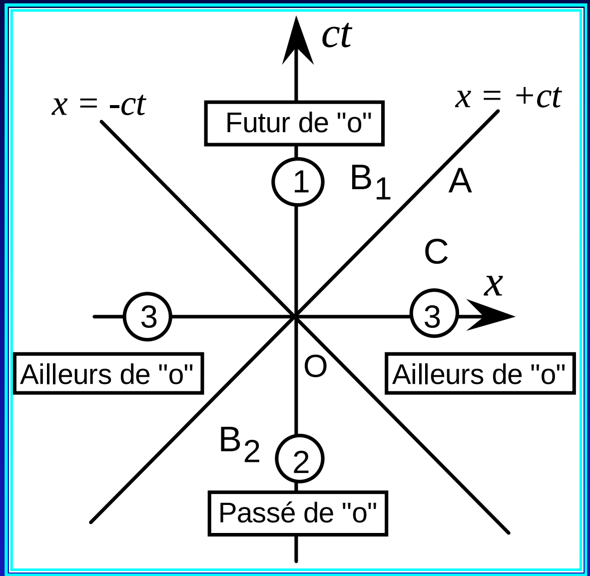
Dans un espace-temps à 3 dimensions (x, y, ct) , les fronts de l'onde lumineuse sont représentés par des cercles dont l'***enveloppe*** est un cône appelé " ***cône de lumière*** ".

De même, si on lance un caillou sur la surface libre d'une eau calme, on obtient des rides circulaires qui se propagent à la surface de l'eau.

Ces rides sont représentées sur la figure , dans un espace-temps (x, y, t) à 3 dimensions.

Dans l'espace temps à 4 dimensions on obtient des cônes de lumière qu'il est impossible de représenter.

La figure représente un espace-temps à 2 dimensions: (***x*, *ct***)



Le point d'univers O ($x = 0$ et $t = 0$) représente un événement origine,

et les deux droites: $x = \pm ct$ la trace du cône de lumière dans le plan de la feuille.

L'intervalle, entre O et tout point d'univers A de ces droites, est tel que

$$S^2_{OA} = x^2 - c^2t^2 = 0$$

Genre lumière

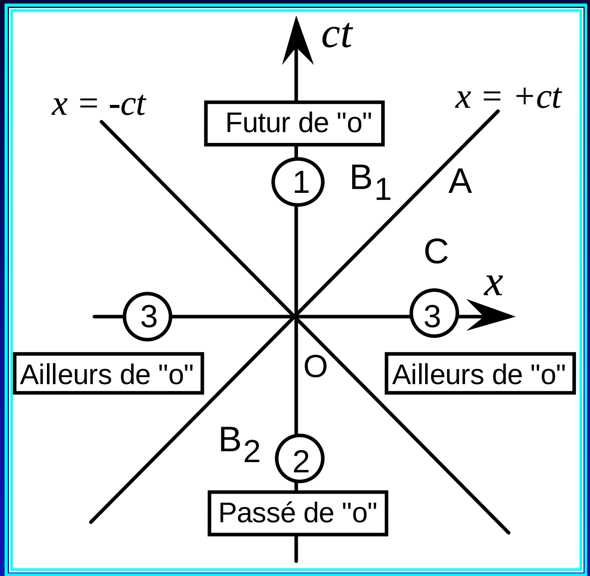
Les deux droites partagent l'espace temps en 3 régions: 1, 2 et 3.

L'intervalle entre un événement B_1, qui se produit dans la région 1, (ou B_2 qui a lieu dans 2) et O, est tel que:

$$S^2_{OB} = x^2 - c^2t^2 < 0$$

Genre temps

Car tout événement B ne peut avoir lieu qu'à un instant t différent du temps $t = 0$ où se produit l'événement O.



Tous les événements B_1 auront lieu dans le ***"futur"*** de O, et les événements B_2 dans le ***"passé"*** de O, quelque soit le repère galiléen (R) considéré.

Les régions 1 et 2 constituent
- le ***"futur absolu"*** de O
- - et le ***"passé absolu"*** de O .

L'événement O peut avoir une relation de ***cause à effet*** avec les points des régions 1 et 2.

L'intervalle entre O et un événement C de la région 3, est donné par:

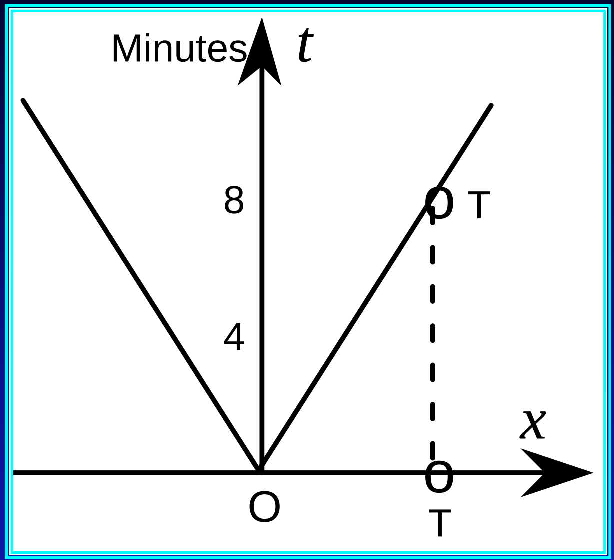
$$S_{OC}^2 = x^2 - c^2t^2 > 0$$

Genre espace

les événements C *ne peuvent se produire qu'en des points différents de celui où a eu lieu* O.

La région 3 constitue l'***"ailleurs"*** de O.

Dans cette région on a : ***x > ct*** ***impossible*** l'événement O n’a aucune influence sur ce qui se passe dans la région 3.



Si, par exemple, à l'instant ***t*** = 0 le soleil cessait brusquement d'exister,

cet ***événement*** O (extinction du soleil) n'aurait aucune influence sur les événements qui se déroulent sur la Terre, la naissance d'un bébé par exemple.

Car cet évènement se trouverait dans " l'***ailleurs***" de O.

La Terre va recevoir la lumière solaire, tourner autour de l'endroit où devrait se trouver le soleil et la vie du bébé va se dérouler normalement jusqu'à ce que la Terre entre dans le "***cône de lumière***" de O.

La ligne d'univers, qui est la trajectoire dans l'espace temps d'un point d'univers, se trouve à l'intérieur du cône de lumière.

II. Quadrivecteurs

II. 1. Quadrivecteur position.

A tout événement, repéré à l'instant t dans un référentiel d'inertie (R) par ses coordonnées x, y, z, correspond dans l'espace de Minkowski,

un point d'univers M de coordonnées:
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = ct \end{cases}$$

et un ***"quadrivecteur position"*** $\vec{R} = (\vec{r}, ct)$ de composantes

auquel on associe le vecteur position $\vec{r}$ *de l'espace euclidien tridimensionnel,*

et la quantité scalaire : $x_4 = ct$.

Lorsqu'on effectue un *changement de référentiel galiléen* en passant de (R) à (R'), les composantes $\boldsymbol{x_i}$ de $\vec{R}$

se transforment en $\boldsymbol{x'_i}$ composantes de $\vec{R}\,'$

conformément à la *transformation de Lorentz*.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\vec{R}\,' = (\boldsymbol{L})\ \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{R} = (\boldsymbol{L})^{-1}\ \vec{R}\,'$$

où $(\boldsymbol{L})$ est *la* ***matrice de Lorentz***

$$(L) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\overrightarrow{R}' = (\mathbf{L})\ \overrightarrow{R}$$ et $$\overrightarrow{R} = (\mathbf{L})^{-1}\ \overrightarrow{R}'$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - \beta\, ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma\,(ct - \beta\, x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma\,(x' + \beta\, ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma\,(ct' + \beta\, x') \end{cases}$$

II. 2. Propriétés des quadrivecteurs

Définition: *On dit que* a_1 , a_2 , a_3 , a_4 *sont les composantes d'un quadrivecteur (4-Vecteur)* $\overrightarrow{A}$ *si elles se transforment comme les coordonnées d'un point d'univers lorsqu'on effectue un changement de référentiel galiléen.*

$$\overrightarrow{A}' = (\mathbf{L})\ \overrightarrow{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1' = \gamma\,(a_1 - \beta\, a_4) \\ a_2' = a_2 \\ a_3' = a_3 \\ a_4' = \gamma\,(a_4 - \beta\, a_1) \end{cases}$$

La ***transformation inverse*** s'effectue comme pour le ''4-vecteur position''

Comme pour le quadrivecteur position $\overrightarrow{R}$ on associe à tout quadrivecteur $\overrightarrow{A}$ un vecteur $\vec{A}$ et, en ce qui concerne la 4ème dimension un scalaire : ***a***

$$\boxed{\overrightarrow{A} = (\vec{A} , a)}$$

Les quatre composantes ont évidemment des dimensions homogènes

Les quadrivecteurs jouissent des propriétés analogues à celles des vecteurs ordinaires.
Comme le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace tridimensionnel euclidien, on définit dans l'espace pseudo-euclidien de Minkowski, *un produit "pseudo-scalaire".*

Le produit pseudo scalaire de :

$$\overrightarrow{A} = (\vec{A} , a) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = (\vec{B} , b)$$

est :

$$\overrightarrow{A} . \overrightarrow{B} = a_1 .b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 - a_4.b_4$$

C'est un scalaire

On démontre que:

Le produit pseudo-scalaire de 2 quadrivecteurs est un invariant dans tout changement de référentiel galiléen

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A'} \cdot \vec{B'}$$

Si : $\vec{A} = \vec{B}$ on a : $\vec{A}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2$

c'est la "***pseudo-norme***" du quadrivecteur $\vec{A}$

La pseudo norme d'un quadrivecteur est un invariant lors d'un changement de référentiel galiléen.

$$\vec{A}^2 = \vec{A}'^2$$

II. 3. Transformation dans le cas général.

La vitesse a une direction quelconque, on utilise les *transformations générales* de Lorentz.

Dans le cas d'un quadrivecteur quelconque:

$$\boxed{\vec{\vec{A}} = \left(\vec{A}\,, a\right)}$$

Les expressions du premier chapitre deviennent

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}'_{//} &= \gamma\left(\vec{A}_{//} - \frac{\vec{v}}{c}a\right) \\ \vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp} \end{aligned}\right\} \quad \vec{A}' = \vec{A} + (\gamma - 1)\frac{\vec{A}\vec{v}}{v^2}\vec{v} - \gamma\frac{\vec{v}}{c}a$$

$$a' = \gamma\left(a - \frac{\vec{v}\vec{A}}{c}\right)$$

II. 3. Temps propre

Soit une particule animée d'une vitesse

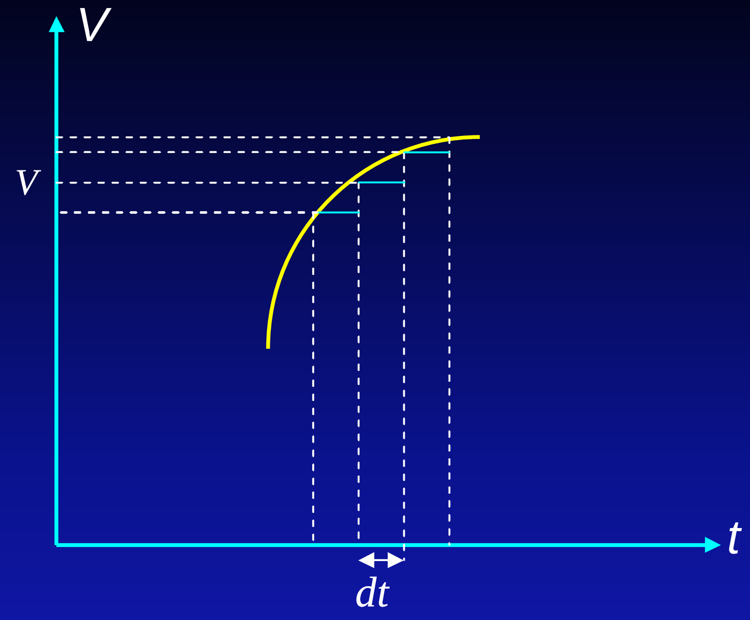
$\vec{V}$ quelconque, repérée

dans un référentiel galiléen (R) .

Ce mouvement, ***varié***, peut être considéré, durant un temps ***dt*** *infiniment petit*, comme un mouvement uniforme.

Ainsi, pendant ce temps ***dt*** ,.

$\vec{V}$ gardera une valeur constante.



Au cours de l'instant ***dt*** suivant, elle prendra une autre valeur très voisine, et ainsi de suite…………

Soit (R_o) un référentiel lié à la particule en mouvement.

Pendant l' instant ***dt*** on peut supposer que (R) et (R_o) sont galiléens, et utiliser la transformation de Lorentz.

Désignons par ***t_o*** *le* ***temps propre*** *de la particule, c. à d. le temps mesuré par une horloge liée à (Ro) , donc liée à la particule.*

L'élément différentiel $\mathbf{dt_o}$ s'exprime en fonction de **dt** , mesuré dans (R) , sous la forme

$$dt = \frac{dt_o + (V/c^2)\, dx_o}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

Or $dx_o = 0$ puisque la particule est au repos dans ***(R_0)***.

$$\boxed{dt = \gamma_o \; dt_o}$$

Avec :

$$\beta_o = \frac{V}{c}$$

$$\gamma_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_o^2}}$$

II. 4. Quadrivecteur vitesse

Le quadrivecteur vitesse $\vec{V}$ d'une particule, en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans (R), est défini, à partir du quadrivecteur position $\vec{R}$ par

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt_o}$$

où t_o est le *temps propre* de la particule

$$d\vec{R} = (d\vec{r},\ c\ dt) \quad \Longrightarrow \quad \vec{V} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt_o},\ c\,\frac{dt}{dt_o}\right)$$

Avec $\boxed{dt = \gamma_o\ dt_o}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{V} = (\gamma_o \vec{v},\ \gamma_o c)}$

$\vec{V}^2$ *est un* ***invariant.*** *En effet :* $\vec{V}^2 = -c^2$

Le quadrivecteur vitesse ***ne s'annule jamais***, car on ne peut pas annuler sa $4^{\text{ème}}$ composante, même si la vitesse de la particule s'annule.

II. 5. Quadrivecteur accélération

On définit le ***'' quadrivecteur accélération''*** par :

$$\vec{A} = \frac{d\,\vec{V}}{dt_o}$$

Dans l'univers de Minkowski, le produit pseudo-scalaire des deux quadrivecteurs vitesse et accélération d'une particule est nul.

$$\vec{V} \cdot \frac{d\,\vec{V}}{dt_o} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{V} = 0$$

On obtient ce résultat en dérivant $\quad \vec{V}^{\,2} = -\,c^2$

par rapport au temps propre de la particule

II. 6. Quadrivecteur d'onde

Soit une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, sinusoïdale, et se propageant dans le vide à la vitesse c .

Dans un référentiel galiléen (R), le champ électrique associé à cette onde s'exprime, en un point M, sous la forme

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_M \, exp\left[j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)\right]}$$

ω est la fréquence mesurée dans (R)

$\vec{k}$ le vecteur d'onde, et

$\vec{r}$ le vecteur position

On sait que: $k = \left|\vec{k}\right| = \omega/c$

La phase : $\theta = \omega t - \vec{k}\ \vec{r}$ est conservée

En l'écrivant sous la forme: $\theta = -\left(\vec{r}\,\vec{k} - ct\,.\,\omega/c\right)$

elle apparaît sous la forme du ***produit pseudo scalaire*** du 4-vecteur position

$$\vec{R} = (\,\vec{r}\,,\, ct\,)$$

et d'un 4-vecteur $\vec{K} = (\,\vec{k}\,,\, \omega/c\,)$ appelé 4-vecteur d'onde

Lors d'un changement de référentiel

$$\vec{K}' = (\boldsymbol{L})\ \vec{K}$$

$$\vec{K} = (\boldsymbol{L})^{-1}\ \vec{K}'$$

$$\begin{cases} k_1' = \gamma\,(\,k_1 - \beta\ k_4\,) \\ k_2' = k_2 \\ k_3' = k_3 \\ k_4' = \gamma\,(\,k_4 - \beta\ k_1\,) \end{cases}$$

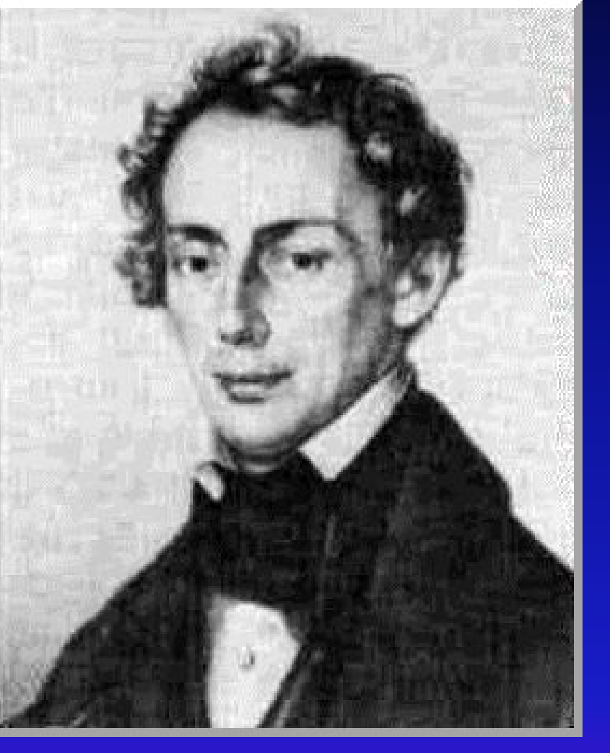
$$\begin{cases} k_1 = \gamma\,(\,k'_1 + \beta\ k'_4\,) \\ k_2 = k'_2 \\ k_3 = k'_3 \\ k_4 = \gamma\,(\,k'_4 + \beta\ k'_1\,) \end{cases}$$

III. Application Effet Doppler

L'effet Doppler acoustique a été étudié dans le cas des ondes sonores en L2.

Ce phénomène est dû au déplacement d'une source de vibrations *S* par rapport à un observateur O.

Celui-ci perçoit une fréquence ω différente de celle ω_S qui est émise par la source *S*.

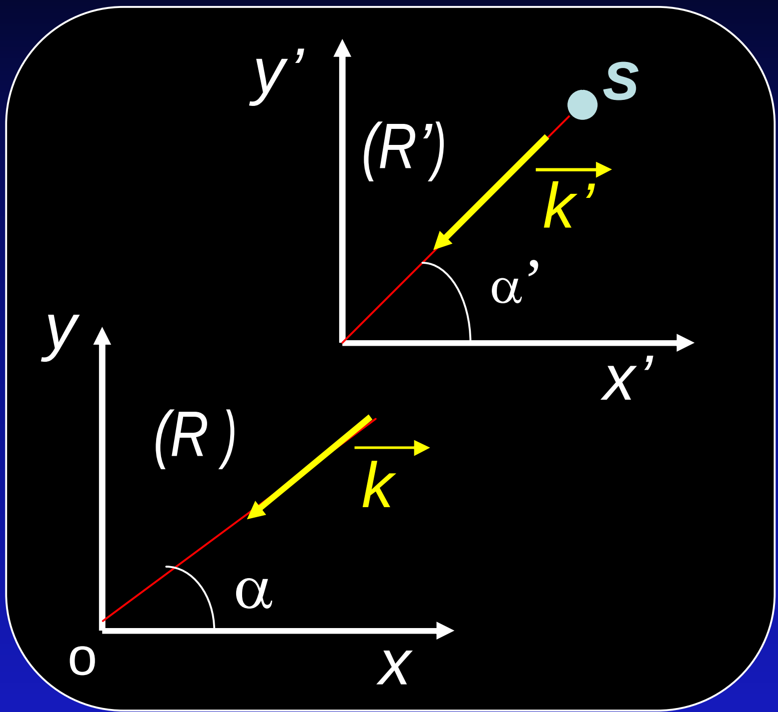


Christian DOPPLER

1803 - 1853

On considère ici une source d'ondes électromagnétiques

Considérons une ***source S de lumière monochromatique*** qui se déplace à une vitesse constante V par rapport à un observateur O.



Désignons par :

(R) le repère lié à l'observateur, et

(R') un repère où la source S est immobile.

Les deux repères sont galiléens.

Dans (R) le quadrivecteur d'onde est:

$$\overrightarrow{K} = (\vec{k}, \omega/c)$$

Dans (R') le quadrivecteur d'onde s'écrit: $\overrightarrow{K}' = (\vec{k}', \omega'/c)$

ω mesurée par l'observateur O

$\vec{k} \rightarrow k_x = - k \cos\alpha = - (\omega/c) \cos\alpha$

$\omega' = \omega_S$ fréquence de la source ***S***

$\vec{k}' \rightarrow k'_x = - k' \cos\alpha' = - (\omega'/c) \cos\alpha'$

T. L

$$\begin{cases} k_1' = \gamma(k_1 - \beta k_4) \\ k_2' = k_2 \\ k_3' = k_3 \\ k_4' = \gamma(k_4 - \beta k_1) \end{cases} \Longrightarrow k_4' = \frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta\ k_x\right)$$

or $k_x = -(\omega / c)\cos\alpha \Longrightarrow \dfrac{\omega'}{c} = \dfrac{\omega_S}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\dfrac{\omega}{c} + \dfrac{V}{c}\dfrac{\omega}{c}\cos\alpha\right]$

soit

$$\boxed{\nu = \frac{\sqrt{1-(V/c)^2}}{(1+(V/c)\cos\alpha)}\,\nu_S}$$

ou

$$\boxed{\lambda = \frac{(1+(V/c)\cos\alpha)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,\lambda_S}$$

C'est la formule de l'effet Doppler relativiste qui donne la fréquence ν

$$(\omega = 2\pi\nu)$$

mesurée par l'observateur, en fonction de ν_S fréquence de l'onde émise par ***S***

La seconde formule donne la longueur d'onde λ *en fonction de* λ_S

$$(\lambda = c/\nu)$$

Les formules de l'effet Doppler relativiste:

$$\nu = \frac{\sqrt{1-(V/c)^2}}{(1+(V/c)\cos\alpha)}\,\nu_S$$

$$\lambda = \frac{(1+(V/c)\cos\alpha)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,\lambda_S$$

deviennent: lorsque l'observateur et la source se déplacent sur une même droite

$\alpha = 0$

$$\nu = \sqrt{\frac{1-(V/c)}{1+(V/c)}}\,\nu_S$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}}\,\lambda_S$$

Si $V > 0 \rightarrow \lambda > \lambda_o$ Les étoiles qui s'éloignent émettent une lumière qui nous apparaît déplacée vers le rouge

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

Ces expressions $\longrightarrow$ un ***effet Doppler transversal*** .
En acoustique (*mécanique non relativiste*) cet effet n'existe pas.

D'autre part, en relativité, on obtient le même résultat que ce soit l'observateur qui se déplace par rapport à la source ou l'inverse. Ce n'est pas le cas en acoustique.

Exercice :

Retrouver les formules du phénomène d'aberration à partir de la transformation de Lorentz du quadrivecteur d'onde

$$\text{T.L}\quad \begin{cases} k_1' = \gamma(k_1 - \beta k_4) \\ k_2' = k_2 \\ k_3' = k_3 \\ k_4' = \gamma(k_4 - \beta k_1) \end{cases}$$

Le phénomène d'aberration est étudié, ici, en considérant la lumière comme une onde électromagnétique.

Au chapitre 1 c'est l'aspect corpusculaire de la lumière qui était pris en compte.