Chapitre 03

Modèle géométrique d'un robot en chaîne ouverte simple

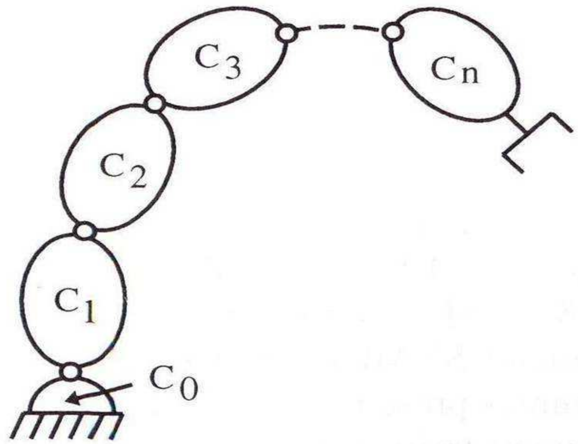
La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques. Tels que :

- **les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot). On distingue :**
  - **Les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement ;**
  - **Les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement ;**
- **Les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.**

La modélisation des robots de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées. La plus rependue est celle de **Denavit-Hartenberg (D-H)** qui facilite la description géométrique du manipulateur, cette dernière nous permet d’aboutir au modèle cinématique et géométrique direct et inverse du robot.

DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE DES ROBOTS A STRUCTU- RE OUVERT SIMPLE

Une structure ouverte simple est composée de n+1 corps notés $C_0, \ldots, C_n$ **et de n articulations. Le corps** C_0 **désigne la base du robot et le corps** C_n **le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation j connecte le corps** C_j **au corps** C_{j-1}



DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE DES ROBOTS A STRUCTU- RE OUVERT SIMPLE

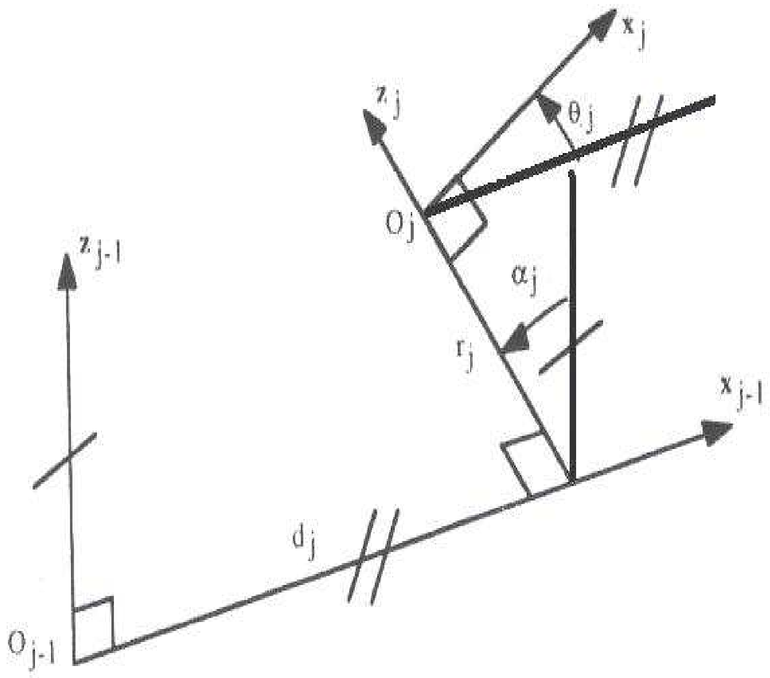
La méthode de description est fondée sur les règles et conventions suivantes:

- **les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatiques ;**
- **le repère R_i est lié au corps C_j ;**
- **la variable de l'articulation j est notée q_j.**

Le repère R_j, fixé au corps C_j est défini de sort que :

- **l'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ;**
- **l'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1} . Si les axes z_j et z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires, le choix de xi n'est pas unique : des considérations de symétrie ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.**

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants :



- α_j **: angle entre axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1};**
- d_j **: distance entre z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1};**
- θ_j **: angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j ;**
- r_j **: distance entre x_{j-1} et x_j long de z_j.**

j **Numéro de la liaisons**	σ_j	α_j degrés	d_j métres	θ_j variable	r_j métres
K	0 ou 1				

La variable articulaire q_j associe à la $j^{iéme}$ articulation est soit θ_j, soit r_j selon que cette articulation est de type rotoïdes ou prismatique, ce qui se traduit par la relation:

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j$$

Avec :

- $\sigma_j = 0$ **si l'articulation j est rotoïdes ;**
- $\boldsymbol{\sigma_j = 1}$ **si l'articulation j est prismatique ;**
- $\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$.

La matrice de transformation définissant le repére R_j dans le repére R_{j-1} est donnée par :

$$^{j-1}T_j = Rot(x,\alpha_j)Trans(x,d_j)Rot(z,\theta_j)Trans(z,r_j)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec : $C\theta_j = \cos\theta_j \,; S\theta_j = \sin\theta_j \,; C\alpha_j = \cos\alpha_j \,; S\alpha_j = \sin\alpha_j$

La matrice $^{j-1}T_j$ est dite : **La matrice de transformation Denavit-Hartenberg .**

PARAMETRES DE DENAVIT-HARTENBERG

Denavit et Hartenberg ont proposé une méthode qui repose sur l'assignation d'un repère unique pour chaque lien. Cette convention est une méthode systématique. Elle permet le passage entre articulations adjacentes d'un système robotique. Elle concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède uniquement un degré de liberté, les surfaces adjacentes restent en contact.. Le choix adéquat des repères dans les liaisons facilite le calcul des matrices homogènes de Denavit-Hartenberg et permet d'arriver à exprimer rapidement des informations de l'élément terminal dans la base et vice versa.

MODELE GEOMETRIQUE DIRECT (MGD)

La modélisation géométrique s’intéresse à l’étude de la géométrie du robot en vu de décrire ses paramètres géométrique : position et orientation sans tenir compte des forces qui le provoque.

L’étude de la géométrie directe des robots manipulateurs comprend plusieurs étapes pour arriver aux objectifs visés par cette modélisation. Dans un premier temps on fixe les repères aux différentes parties du mécanisme et on décrit les relations entre ces repères, et aussi on localise ces repères lorsque le manipulateur s’articule.

MODELE GEOMETRIQUE DIRECT (MGD)

Le modèle géométrique direct (MGD) est l’ensemble des relations qui permettent d’exprimer la situation de l’organe terminale , c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaire dans le cas d’une chaîne ouvert simple , il peut être représenté par la matrice de passage ${}^{0}T_{n}$.

$$ {}^{0}T_{n} = {}^{0}T_{1}(q_{1})\,{}^{1}T_{2}(q_{2})\ldots{}^{n-1}T_{n}(q_{n}) $$

MODELE GEOMETRIQUE DIRECT (MGD)

Le modèle géométrique direct du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$X = f(q)$$

Avec : $X \in R^3$ les coordonnée cartésiennes, et $q \in R^3$ les coordonnées articulaires.

On va admettre quelques hypothèses dans le but de simplifier la modélisation des robots. Ces hypothèses sont les suivants :

- Les liaisons du manipulateur sont rigides ;
- Les jeux dans les articulations sont négligeables ;
- Les capteurs ont un gain unitaire et de dynamique négligeable ;

MODELE GEOMETRIQUE INVERSE (MGI)

Le modèle géométrique inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal.

Le problème posé est le suivant : étant donné la position et l’orientation de l’outil par rapport à la station de travail, comment calculer l’ensemble des angles articulaires qui accomplissent cet objectif**?**

La réponse à cette question constitue le modèle géométrique inverse du robot manipulateur.

MODELE GEOMETRIQUE INVERSE (MGI)

La solution du problème, concernant la recherche des angles articulaires nécessaires pour positionner le repère de l'outil, par rapport au repère de la station de travail, est décomposée en deux parties. En premier lieu, sont déterminées les transformations nécessaires pour trouver le repère du poignet, par rapport au repère de la base et après, le modèle géométrique inverse est utilisé pour trouver les angles des articulations.

Une approche analytique a été utilisée pour le robots de type série, elle consiste à éliminer à chaque étape une des coordonnées généralisées (articulaires) par la multiplication de la matrice de transfert finale ${}^{0}T_{E}$ par les matrices de transformation intermédiaires.

Exemple : Pour le cas d'un robot à trois degrés de liberté la matrice de transformation s'écrit sous la forme :

$$^{0}T_3 = {}^{0}T_1(\theta_1)\,{}^{1}T_2(\theta_2)\,{}^{2}T_3(\theta_3)$$

Pour l'organe terminale (E) la matrice de transformation par rapport au repère trois est donnée par :

$$^{3}T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$l_3 =$; La langueur de deuxième bras.

Donc la matrice de transformation homogène est :

$$^{0}T_{E} = {^{0}T_{3}}\,{^{3}T_{E}}$$

Par exemple la première étape sera comme suit :

On multiplie de part et d'autre par la matrice $^{0}T_{1}(\theta_{1})$, le résultat sera :

$$\left[{^{0}T_{1}}\right]^{-1}\,{^{0}T_{3}} = {^{1}T_{3}}$$

On s'intéresse toujours à la dernière colonne de la matrice, qui contient à chaque étape les équations découplées qui permettent de résoudre le problème du modèle géométrique inverse.

Toutefois le modèle géométrique comporte aussi des inconvénients:

1) **la non unicité du modèle géométrique inverse implique qu’il existe plusieurs “chemins” pour se rendre d’un point à un autre.**
2) **le traitement par incrément peut amener à des imprécisions.**
3) **des singularités, mécaniques et/ou mathématiques apparaissent.**

Ces inconvénients sont évités ou contournés de la manière suivante:

1) **Le problème des multiples solutions du modèle inverse n'intervient pas. En effet, le robot possède une configuration initiale connue, et se rend à une autre position à partir de celle-ci. Il ne sert à rien de calculer des configurations du robot qui seraient impossibles à atteindre depuis la position courante.**
2) **Une haute précision des solutions obtenues n'est pas nécessaire puisqu'il suffit de fournir à l'utilisateur une vision globale, le calcul des accroissements est à chaque fois effectué à partir d'une nouvelle configuration exacte du robot.**
3) **Quant au problème des singularités, il existe plusieurs méthodes mathématiques pour les traiter ou les éviter.**