Université A. Mira Bejaia

Faculté des Sciences Exactes 10/03/2020

Département de Mathématiques

Master 2 (A.M)

Examen de Statistique Inférentielle

Durée 1h 30mn

Exercice 1. (07 points)

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le carré $\mathbf{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 1\}$ et on désigne par $\mathbf{1_K}$ la fonction indicatrice de $\mathbf{K}$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \alpha \mathbf{1}_K(x,y)$. Pour quelle valeur de α, f est elle une densité de probabilité ?

La valeur α étant ainsi déterminée, on considère le couple de v.a. (X,Y) ayant la densité de probabilité $f(x,y) = \alpha \mathbf{1}_K$.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer la densité de la variable aléatoire $X+Y$. Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. (05 points)

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\forall n \geq 1$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}xp(\lambda_n = n)$.

a) Calculer la fonction de répartition de $Y_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers 0.

2. Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}\, T_k$. Justifier pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème central limite pour l'étude de la convergence en loi de la suite (S_n).

3. Etudier la convergence en loi de la suite (S_n).

Exercice 3. (08 points)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple issu d'une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{\theta}}, & x > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où θ est un paramètre réel inconnu strictement positif.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T_n de θ.

2. On pose $Y = \ln X$. Déterminer la loi de Y. Déduire (sans faire de calcul) $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$. Quelle est alors la loi de $\frac{Y}{\sqrt{\theta}}$?

3. Montrer que T_n est un estimateur sans biais convergent et efficace de θ.

4. Construire pour $n = 10$ un intervalle de confiance pour θ de niveau 0.95.

5. Application numérique: Quelles estimations ponctuelle et par intervalle de confiance pour θ proposeriez-vous après avoir observé $\ln x_i = i$ pour $i = \overline{1, 10}$?

(**Rappel**: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

Bon courage