3ème Année ELT+ELM

Solution EFS (SALC – 28/01/2020)

Partie 1. (11pts)

1) $$\frac{d^2y(t)}{dt}+4\frac{dy}{dt}+13y(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}+5\delta(t)$$ avec $y(0)$, $\dot{y}(0)=0$ et $\delta(0)=0$

La transformée de Laplace de l'équation ci-dessus donne : $p^2Y(p)+4pY(p)+13Y(p)=p+5$ 0,5

$\Rightarrow Y(p)=\dfrac{p+5}{p^2+4p+13}$ donc Y(p) peut être écrit sous la forme suivante :

$$Y(p)=\frac{p+5}{(p+2)^2+9}=\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}+\frac{3}{(p+2)^2+3^2}\Rightarrow L^{-1}[\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}]+L^{-1}[\frac{3}{(p+2)^2+3^2}]$$ 0,5 0,5

D'où $\boxed{y(t)=e^{-2t}\cos 3t+e^{-2t}\sin 3t}$ 0,5

2) $s(t)=\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\sin 4t}{e^{-2t}}\right]$ selon le théorème de dérivation on :

$$L(\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin 4t}{e^{-2t}}\right])=pL\left[e^{+2t}\sin 4t\right]-\left.\frac{\sin 4t}{e^{-2t}}\right|_{t=0}$$ 0,5 et en vertu du théorème de décalage fréquentiel

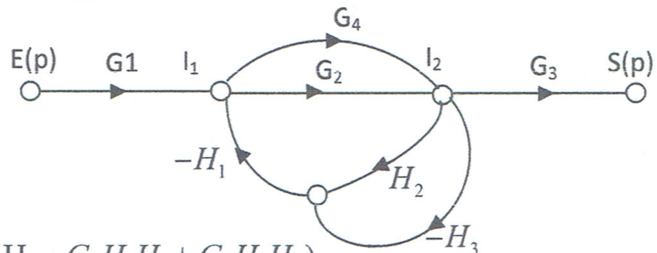
on obtient: $L\left[e^{+2t}\sin 4t\right]=F(p+2)=\dfrac{4}{(p+2)^2+16}$ 0,5 où $F(p)=\dfrac{4}{p^2+16}$

$$\Rightarrow L(\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin 4t}{e^{-2t}}\right])=\frac{4p}{(p+2)^2+16}$$ d'où $\boxed{G(p)=\dfrac{8p^2}{(p+2)^2+16}}$ 0,5

3) Nombre de boucles est égale à 4 et leurs gains sont :

boucle1 : $\ell_1=-G_2H_1H_2$; boucle 2 : $\ell_3=-G_4H_1H_2$

boucle3 : $\ell_2=G_2H_1H_3$; boucle4 : $\ell_4=G_4H_1H_3$ 1



- Calcul de Δ (Équation caractéristique du système) :

$$\Delta=1-\sum\ell_i=1-(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)=1-(-G_2H_1H_2+G_2H_1H_3-G_4H_1H_2+G_4H_1H_3)$$
$$\Rightarrow\Delta=1+G_2H_1H_2-G_2H_1H_3+G_4H_1H_2-G_4H_1H_3=1+(G_2H_1+G_4H_1)(H_2-H_3)$$ 0,5

- Nombre de chemins directs : $N=2\Rightarrow\begin{cases}P_1=G_1G_2G_3\\P_2=G_1G_4G_3\end{cases}$ 0,5

Calcul des cofacteurs Δ_n : $\Rightarrow\begin{cases}\text{pour le }P_1\text{ on a }\Delta_1=1-0=1\\\text{pour le }P_1\text{ on a }\Delta_2=1-0=1\end{cases}$ 0,5

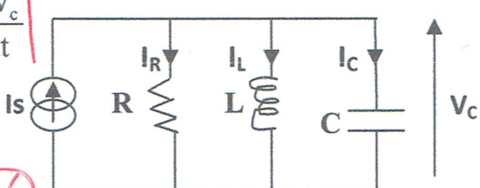
En effet, quand on élimine l'un des chemins direct 1 ou 2 on remarque qu'il ne reste aucune boucle complète $\Rightarrow$ Δ_n =1 (pour n=1 et n=2)

- On obtient enfin selon la formule de **Mason** la fonction de transfert globale :

$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{G_1G_3(G_2+G_4)}{1+(G_2H_1+G_4H_1)(H_2-H_3)}$$ 0,5

4) a) Calcul de la FT du circuit électrique

Selon la loi des noueds on : $I_s=I_R+I_L+I_C=\dfrac{V_c}{R}+\dfrac{1}{L}\int V_c(t)dt+C\dfrac{dV_c}{dt}$ 0,5



La transformée de Laplace donne :

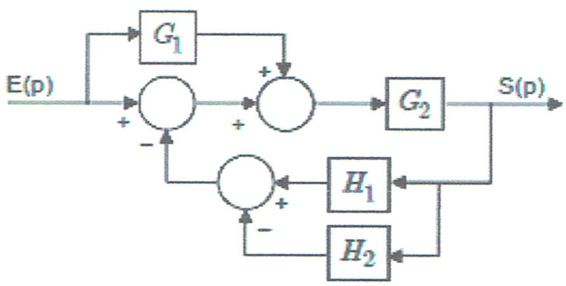
$$I_s=\frac{V_c}{R}+\frac{V_c}{Lp}+CpV_c\Rightarrow\boxed{\frac{V_c}{I_s}=1/(\frac{1}{R}+\frac{1}{Lp}+Cp)=\frac{RLp}{RLCp^2+Lp+R}}$$ 0,5

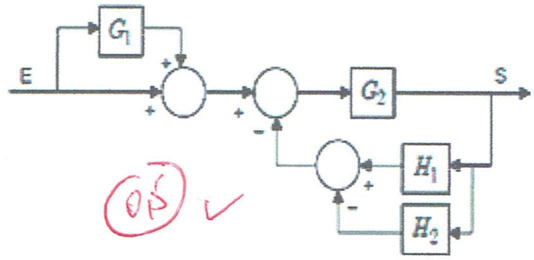
c) Détermination de la pulsation propre (ω_n) et le coefficient d'amortissement (ξ)

$$\frac{V_c}{I_s}=\frac{\frac{1}{C}p}{p^2+\frac{1}{RC}p+\frac{1}{LC}}$$ Par identification avec la forme standard $p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n$

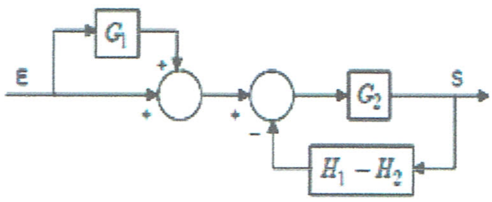
On aura : $$\begin{cases}\omega_n^2=\dfrac{1}{LC}\Rightarrow\omega_n=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}(rad/\sec) & \checkmark\ 0{,}5\\[2mm] 2\xi\omega_n=\dfrac{1}{RC}\Rightarrow\xi=\dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} & \checkmark\ 0{,}5\end{cases}$$

5) Simplification et calcul de la F.T.

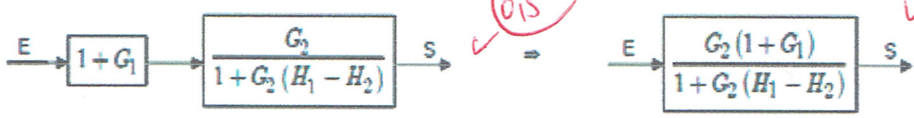




0,5 ✓



✓ 0,5



✓ 0,5 ✓ 0,5

6) Démonstration :

$$\frac{dF(p)}{dp}=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dp}\left[e^{-pt}f(t)\right]dt=\int_0^{+\infty}-t.e^{-pt}f(t)dt=L[-t.f(t)]=-L[t.f(t)]$$ 0,5

$$\Rightarrow\frac{d}{dp}F(p)=-L\left[t.f(t)\right]\qquad \text{C.Q.F.D}$$

Partie 2. (06.5pts)

a) Calculer le coefficient d'amortissement (ξ), puis dire de quel **régime** s'agit t-il ?

On a $D_1 = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0,2 \Rightarrow \dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2 \Rightarrow \boxed{\xi = 0,456}$ (0,75)

Comme $0<\xi<1$, alors, il s'agit d'un régime oscillatoire amorti. (0,5)

a) Déterminer la pseudo-pulsation (ω_d), puis en déduire la valeur de la pulsation propre non amortie (ω_n).

On a $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_d = \pi = 3,14 \text{ (rad/s)}}$ (0,5)

Comme $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \dfrac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{3,14}{\sqrt{1-(0,456)^2}} = 3,53 \text{ (rad/s)}}$ (0,75)

c) Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système (figure a) : **F(p)= Y(p)/X(p)** puis la mettre sous sa forme standard (canonique).

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F_1 \cdot \frac{1}{p}}{1+F_1\cdot\frac{1}{p}} \quad \text{où} \quad F_1 = \frac{\frac{K_1}{Jp+f}}{1+\frac{K_1K_2}{Jp+f}} = \frac{K_1}{Jp+f+K_1K_2}$$ (1)

$$\text{d'où} \quad F(p) = \frac{\frac{K_1}{(Jp+f+K_1K_2)}\cdot\frac{1}{p}}{1+\frac{K_1}{(Jp+f+K_1K_2)}\cdot\frac{1}{p}} = \frac{K_1}{Jp^2+(f+K_1K_2)p+K_1} = \frac{K_1/J}{p^2+\left(\frac{f+K_1K_2}{J}\right)p+\frac{K_1}{J}}$$

Comme $J=1$ et $f=1 \Rightarrow \boxed{F(p) = \dfrac{K_1}{p^2+(1+K_1K_2)p+K_1}}$, Forme standard (0,5)

b) Calculer les valeurs des **gains k_1 et k_2**

Par identification avec $p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2$ on obtient :

$\omega_n^2 = K_1 \Rightarrow \boxed{K_1 = \omega_n^2 = (3,53)^2 = 12,5}$ (1)

$2\xi\omega_n = 1+K_1K_2 \Rightarrow K_2 = \dfrac{2\xi\omega_n - 1}{K_1} = \dfrac{2(0,456)\cdot(3,53)-1}{12,5} \Rightarrow \boxed{K_2 = 0,178}$ (1)

Calculer le temps de réponse t_r **à ±5%** près :

à ±5% on a $\boxed{t_r \simeq 3\tau = 3\cdot\dfrac{1}{\xi\omega_n} = 3\cdot\dfrac{1}{(0,456)\cdot(3,53)} = 1,85 \text{ (sec)}}$ (0,5)

Question de cours : (02.5pts)

Compléter le Schéma global d'un système asservi suivant :